概　　率　　论

Probability

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 随机现象与统计规律性
    ① 概率的频率解释依然是当今最通行的解释.
    ② 描述频率趋近于概率的大数定律总是概率论的第一大数定律.
    ③ 实际当中用频率作为概率的估计是十分自然的.
  - 样本空间与事件

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	余集	A 不发生

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 古典概型 (等可能概率模型)：(1) 样本空间样本点有限；(2) 每个样本点等可能出现.
    - 计数方法：排列组合.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、有限可加性.
  - 几何概率：以等可能性定义概率，处理无限场合，概率是几何体的测度之比.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、可列可加性.
  - 概率空间：$\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$
    - 难点和要点：事件域 $\mathscr{F}$ 的选择，太小不能满足需要，太大难以定义概率.
    - 选择包含我们关注的所有事件的 σ 域，保证事件对交、并、逆、差作可列次运算的封闭性.
    - 在这种 σ 域上，能定义满足非负、规范和可列可加性的概率测度.

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性
  - 条件概率：$P(A\,|\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}.$
    - 乘法公式：$P\left(A_1A_2\cdots A_n\right) = P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\middle|\,A_1\right)\cdot P\left(A_3\middle|\,A_1A_2\right)\cdot\cdots\cdot P\left(A_n\middle|\,A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$
    - 全概率公式：$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\,\middle|A_i\right)$
    - Bayes 公式：$P\left(A_k\,\middle|B\right) = \dfrac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B\,\middle|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\,\middle|A_i\right)}$

$$\left.\begin{aligned} &A_i \cap A_j = \Phi \quad (i \neq j) \\ &\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \end{aligned}\right\}$$

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性
  - 事件独立性：两个事件 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. 三个事件 $\begin{cases} P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(AC) = P(A) \cdot P(C) \\ P(BC) = P(B) \cdot P(C) \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$
  - 试验独立性：一个试验的结果对其它各试验的可能结果的概率都无影响.
  - Bernoulli 试验 E：概率空间 $\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$，其中

$$A \subset \Omega, \quad \mathscr{F} = \left\{\Phi, A, \bar{A}, \Omega\right\}, \quad P(A) = p, P\left(\bar{A}\right) = q, \quad (p > 0, q > 0, p + q = 1)$$

    - Bernoulli 分布
    - 二项分布
    - 几何 分布
    - Pascal 分布
    - 多项分布
    - Poisson 分布

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

  - 随机变量 (r.v.) 与分布函数 (c.d.f.)：

    - 随机变量 ξ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中定义域为 Ω、取值于 $\mathbb{R}$ 的一个单值 Borel 函数.
    - 分布函数 $F(x) = P\{\xi(\omega) < x\}$，$-\infty < x < \infty$ 是单调不降、取值 $[0, 1]$ 的左连续函数. 它完整描述了随机变量，是研究的主要对象.
    - 随机变量依取值 $\begin{cases} \text{离散型：} & \text{分布律 (mass function)、分布列} \\ \text{连续型：} & \text{概率密度 (p.d.f.)} \end{cases}$
    - 主要分布：$\begin{cases} \text{离散型：} & \text{Bernoulli, binomial, Poisson, hyper-geometric, geometric} \\ \text{连续型：} & \text{uniform, exponential, normal, } \Gamma \end{cases}$
    - 概率计算：$\begin{cases} \text{离散型：} & P\{x \in D\} = \sum\limits_{x_i \in D} p_i, \quad P\left\{(x, y) \in D\right\} = \sum\limits_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij} \\ \text{连续型：} & P\{x \in D\} = \int\limits_D p(x)\mathrm{d}x, \quad P\{(x, y) \in D\} = \iint\limits_D p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

▶ 随机向量，随机变量的独立性：

- 随机向量即多元随机变量
  - 联合分布： 联合分布函数、联合分布律、联合密度
  - 边际分布： 边际分布函数、边际分布律、边际密度
  - 条件分布： 条件分布函数、条件分布律、条件密度
  - 独立性： 与事件独立性几乎完全相同

- 主要分布：
  - 离散型： 多项分布、多元超几何分布
  - 连续型： 二元均匀分布、二元正态分布

$$(\xi,\eta)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right) \sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \begin{cases}\xi\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), \qquad \eta\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)\\ \left(\eta\,\middle|\,\xi=x\right)\sim N\left(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right)\\ \left(\xi\,\middle|\,\eta=y\right)\sim N\left(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right)\\ \xi \text{ 与 } \eta \text{ 相互独立} \Longleftrightarrow \rho=0\end{cases}$$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

▶ 随机变量的函数及其分布：

- 随机变量的函数什么情况下还是随机变量

- 离散型易：$\begin{cases} \eta = g(\xi): & \text{对应法} \\ \zeta = g(\xi, \eta): & \text{表上作业法，独立情形和的卷积公式} \end{cases}$

- 连续型难：

$$\begin{cases} \eta = g(\xi):\text{直接法 } F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = \int_{g(x)<y} p_\xi(x)\mathrm{d}x \\ \zeta = g(\xi, \eta):\text{直接法 } F_\zeta(z) = P\{\zeta < z\} = \iint_{g(x,\, y)<z} p(x,\, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \qquad\qquad \text{和 (卷积公式)、差、商、积、 max , min 的公式} \\ \begin{cases} \zeta_1 = g_1(\xi, \eta) \\ \zeta_2 = g_2(\xi, \eta) \end{cases} : \text{变换法} \begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = h_1^{-1}(u, v) \\ y = h_2^{-1}(u, v) \end{cases} \Longrightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$q_{\zeta_1,\, \zeta_2}(u,\, v) = p\left(h_1^{-1}(u,\, v),\, h_2^{-1}(u,\, v)\right) \cdot |J|$$

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数

  - 数学期望

    - 定义： $E(\xi)=\begin{cases}\sum\limits_i x_i\cdot p_i\,, & \text{离散型}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot p_\xi(x)\mathrm{d}x\,, & \text{连续型}\end{cases}$ ，绝对收敛.

    - 随机变量函数的数学期望： $E\left[g(\xi)\right]=\begin{cases}\sum\limits_i g\left(x_i\right)\cdot p_i\,, & \text{离散型}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot p_\xi(x)\mathrm{d}x\,, & \text{连续型}\end{cases}$

$$E\left[g\left(\xi,\,\eta\right)\right]=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j g\left(x_i,\,y_j\right)\cdot p_{ij}\,, & \text{离散型}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x,\,y\right)\cdot p_{(\xi,\,\eta)}(x,\,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, & \text{连续型}\end{cases}$$

数学期望的性质：

① $E(c)=c$

② $a\le\xi\le b \implies a\le E(\xi)\le b$

③ $\xi\le\eta \implies E(\xi)\le E(\eta)$

④ $E\left(a\xi+b\eta\right)=a\cdot E\left(\xi\right)+b\cdot E\left(\eta\right)$

⑤ $\xi,\,\eta$ 独立 $\implies E(\xi\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数

▶ 方差：$D(\xi)=E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]^2\right\}$ 标准差：$\sqrt{D(\xi)}$ 计算公式：$D(\xi)=E(\xi^2)-\left[E(\xi)\right]^2$

▶ Chebyshev 不等式：

$$P\left\{\left|\xi-E(\xi)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}\iff P\left\{\left|\xi-E(\xi)\right|<\varepsilon\right\}\ge1-\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$$

▶ 协方差：

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)\triangleq E\left\{\left[\xi-E(\xi)\right]\left[\eta-E(\eta)\right]\right\}=E(\xi\eta)-E(\xi)\cdot E(\eta)$$

▶ 和的方差：$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm2\operatorname{cov}(X,Y)$

方差的性质：

① 设 C 是常数，则 $D(C)=0$.

② 设 ξ 是随机变量，c 为常数，则 $D(\xi+c)=D(\xi)$.

③ 设 ξ 是随机变量，c 为常数，则 $D(c\xi)=c^2D(\xi)$.

④ 若 $c\ne E(\xi)$，则 $D(\xi)<E\left[(\xi-c)^2\right]$.

⑤ $D(\xi)=0\iff P\{\xi=C\}=1$.

⑥ 若 ξ 与 η 独立，则 $D(\xi\pm\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

协方差的性质：

① $\operatorname{cov}(X,X)=D(X)$.

② $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$

③ $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$，$a$, b 为常数.

④ $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$.

⑤ 若 X, Y 相互独立，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

⑥ 若 C 为常数，则 $\operatorname{cov}(X,C)=0$.

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数

  - 常见分布的数学期望与方差：

分布	符号表示	数学期望	方差
二项分布	$\xi \sim b(n, p)$	$E(\xi) = np$	$D(\xi) = np(1-p)$
Bernoulli 分布	$\xi \sim b(1, p)$	$E(\xi) = p$	$D(\xi) = p(1-p)$
Poisson 分布	$\xi \sim P(\lambda)$	$E(\xi) = \lambda$	$D(\xi) = \lambda$
均匀分布	$\xi \sim U[a, b]$	$E(\xi) = \frac{a+b}{2}$	$D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Gamma 分布	$X \sim \Gamma(r, \lambda)$	$E(\xi) = \frac{r}{\lambda}$	$D(\xi) = \frac{r}{\lambda^2}$
指数分布	$\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$	$D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$
χ^2 分布	$X \sim \chi_n^2$	$E(\xi) = n$	$D(\xi) = 2n$
正态分布	$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$	$E(\xi) = \mu$	$D(\xi) = \sigma^2$

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数

  - 相关系数：$\rho_{\xi\eta} \triangleq \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}$

  - Cauchy-Schwarz 不等式：$\left|E(\xi\eta)\right|^2 \le E(\xi^2)\cdot E(\eta^2)$

  - 矩：
$$\begin{cases} k\ \text{阶原点矩：}\ m_k = E(\xi^k)\ , \quad k = 1, 2, 3, \ \dots \\ k\ \text{阶中心矩：}\ c_k = E\left\{[\xi - E(\xi)]^k\right\}\ , \quad k = 2, 3, \ \dots \\ k+l\ \text{阶混合原点矩：}\ E(\xi^k\eta^l) \\ k+l\ \text{阶混合中心矩：}\ E\left\{[\xi - E(\xi)]^k[\eta - E(\eta)]^l\right\} \end{cases}$$

  - 定理：中心矩和原点矩可以相互表示.
$$\begin{cases} c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} m_i (-m_1)^{k-i} \\ m_k = \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} c_{k-i}\, m_1^i \end{cases}$$

相关系数的性质：

① $\left|\rho_{\xi\eta}\right| \le 1.$

② 等价命题：$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$；$\xi$ 与 η 不相关；
$E(\xi\cdot\eta) = E(\xi)\cdot E(\eta)$；
$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta).$

③ 若随机变量 ξ 与 η 独立，则 ξ 与 η 不相关.

④ 二元正态分布的独立性和不相关性是等价的.

⑤ 二值随机变量的不相关性与独立性等价.

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数

  - 条件期望：$$\begin{cases} E\left(\eta \,\middle|\, \xi = x_i\right) = \sum\limits_j y_j \cdot P\left\{\eta = y_j \,\middle|\, \xi = x_i\right\} = \sum\limits_j y_j \cdot \dfrac{p\left(x_i, y_j\right)}{p_1\left(x_i\right)} \\ E\left(\xi \,\middle|\, \eta = y_j\right) = \sum\limits_i x_i \cdot P\left\{\xi = x_i \,\middle|\, \eta = y_j\right\} = \sum\limits_i x_i \cdot \dfrac{p\left(x_i, y_j\right)}{p_2\left(y_j\right)} \end{cases}$$

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_1(\bullet)$
x_1	$p\left(x_1, y_1\right)$	$p\left(x_1, y_2\right)$	$\cdots$	$p\left(x_1, y_j\right)$	$\cdots$	$p_1\left(x_1\right)$
x_2	$p\left(x_2, y_1\right)$	$p\left(x_2, y_2\right)$	$\cdots$	$p\left(x_2, y_j\right)$	$\cdots$	$p_1\left(x_2\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	$p\left(x_i, y_1\right)$	$p\left(x_i, y_2\right)$	$\cdots$	$p\left(x_i, y_j\right)$	$\cdots$	$p_1\left(x_i\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_2(\bullet)$	$p_2\left(y_1\right)$	$p_2\left(y_2\right)$	$\cdots$	$p_2\left(y_j\right)$	$\cdots$	1

  - 连续型随机变量的条件期望：$E\left(\eta \,\middle|\, \xi = x\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p\left(y \,|\, x\right) \mathrm{d}y$

    - η 关于 ξ 的条件期望 $E\left(\eta \,|\, \xi\right)$ 是一个随机变量，它在 $E\left(\eta \,\middle|\, \xi = x\right)$ 处的密度函数为 $p_\xi(x)$.

  - 重期望公式：$E\left(\xi\right) = E\left[E\left(\xi \,\middle|\, \eta\right)\right]$.

已学知识点

- 第四章 数字特征与特征函数
  - 复随机变量：若 ξ 与 η 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的实值随机变量，称 $\zeta = \xi + i\eta$ 为复随机变量.
    - 可平行定义或建立一系列结果：如 $E(\zeta) = E(\xi) + iE(\eta)$、独立性等.
    - Euler 公式：$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$.

4.5 特征函数

一、特征函数的定义

二、特征函数的性质

三、逆转公式与唯一性定理

四、分布函数的再生性

五、多元特征函数

一、特征函数的定义

- 分布函数及其密度无疑是描述随机变量概率规律的有力工具，可以方便地解决许多与随机变量有关的概率问题.
- 分布函数的不足：
  - 分布函数本身的分析性质不太好，它只是一个单边连续的有界非降函数.
  - 相互独立的随机变量之和的分布函数等于各分布函数的卷积，这在计算上带来不少麻烦.
- 另一方面，数字特征也只反映了概率分布的某些侧面，一般并不能通过它来确定分布函数.
- 特征函数：即能完全决定分布函数，又具有良好的分析性质.

一、特征函数的定义

定义：如果 ξ 与 η 都是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的实值随机变量，则称 $\zeta = \xi + i\eta$ 为**复随机变量**.

- 对复随机变量的研究本质上是对二维随机变量的研究.
- 如果二维随机变量 (ξ_1, η_1) 与 (ξ_2, η_2) 相互独立，则称复随机变量 $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ 与 $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ 相互独立.
- 定义复随机变量 $\zeta = \xi + i\eta$ 的数学期望为

$$E(\zeta) = E(\xi) + iE(\eta)$$

一、特征函数的定义

- 对于复随机变量，可平行的定义或建立一系列结果. 例如：
  - 若 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ 是相互独立的复随机变量，则

$$E\left(\zeta_1\zeta_2\cdot\cdots\cdot\zeta_n\right)=E\left(\zeta_1\right)E\left(\zeta_2\right)\cdot\cdots\cdot E\left(\zeta_n\right)$$

  - 若 $g(x)$ 是一元 Borel 可测函数，$\eta=g\left(\xi\right)$，则

$$E\left(\mathrm{e}^{it\eta}\right)=E\left(\mathrm{e}^{it\cdot g(\xi)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\cdot g(x)}\mathrm{d}F_{\xi}(x)=\begin{cases}\sum_k \mathrm{e}^{it\cdot g(x_k)}\cdot p_k, & \text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{it\cdot g(x)}\cdot p_{\xi}(x)\,\mathrm{d}x, & \text{连续型}\end{cases}$$

  - Euler 公式：$\mathrm{e}^{ix}=\cos x+i\sin x.$

一、特征函数的定义

定义：如果随机变量 ξ 的分布函数为 $F_\xi(x)$，则称

$$f_\xi(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}F_\xi(x) = \begin{cases} \sum\limits_k \mathrm{e}^{it\cdot x_k}\cdot p_k, & \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{it\cdot x}\cdot p_\xi(x)\,\mathrm{d}x, & \text{连续型} \end{cases}$$

为 ξ 的特征函数.

- 特征函数是一个实变量的复值函数，由于 $\left|\mathrm{e}^{itx}\right| = 1$，所以它对一切实数 t 都有意义.
- 特征函数只与分布函数有关，因此又称某一分布函数的特征函数.

一、特征函数的定义

- 对于离散型随机变量 ξ，若其分布列为：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$$\xrightarrow{\text{特征函数为}} \quad f(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \cdot \mathrm{e}^{itx_j}$$

- 对于连续型随机变量 ξ，若其分布密度函数为 $p_\xi(x)$

$$\xrightarrow{\text{特征函数为}} \quad f(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx} \cdot p_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

密度函数 $p_\xi(x)$ 的 Fourier 变换

一、特征函数的定义

- 一些重要分布的特征函数

  - 例. 退化分布 $I_c(x)$ 的特征函数 $f(t)=E\left(e^{it\xi}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\cdot e^{itx_j}=e^{itc}$

  - 例. 二项分布 $b\left(n,p\right)$ 的特征函数

$$f(t)=E\left(e^{it\xi}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\cdot e^{itx_j}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}\cdot e^{itk}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(p\cdot e^{it}\right)^k\left(1-p\right)^{n-k}=\left(pe^{it}+1-p\right)^n$$

  - 例. Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的特征函数

$$f(t)=E\left(e^{it\xi}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\cdot e^{itx_j}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot e^{itk}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

一、特征函数的定义

- 一些重要分布的特征函数

  - 例. Γ 分布 $\Gamma(r, \lambda)$ 的特征函数

$$f(t)=E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)x}\mathrm{d}x=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{\left[\lambda\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)\right]^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)x}\,\mathrm{d}x$$

$\Gamma\left(r, \lambda\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)\right)$ 的密度函数

$$=\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-r}$$

$r=1$，指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ $\longrightarrow$ $f(t)=\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

$r=\dfrac{n}{2}$，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，χ_n^2 分布 $\longrightarrow$ $f(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.

$$f(t)=E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{itx}\right|\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\mathrm{d}F(x)=1=f(0)$$

$$f(-t)=E\left(\mathrm{e}^{-it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(-tx)+i\sin(-tx)\right]\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(tx)-i\sin(tx)\right]\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\left[\cos(tx)+i\sin(tx)\right]}\,\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\mathrm{e}^{itx}}\,\mathrm{d}F(x)=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}F(x)}=\overline{f(t)}$$

二、特征函数的性质

- 性质 1　特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- 性质 2　特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

$$\left|f(t+h)-f(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(t+h)x}\mathrm{d}F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\left(\mathrm{e}^{ihx}-1\right)\mathrm{d}F(x)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{itx}\left(\mathrm{e}^{ihx}-1\right)\right|\mathrm{d}F(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{itx}\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{ihx}-1\right|\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{ihx}-1\right|\mathrm{d}F(x)$$

$$\left|\mathrm{e}^{ihx}-1\right| = \left|\cos(hx)-1+i\sin(hx)\right| = \sqrt{\left[\cos(hx)-1\right]^2+\sin^2(hx)} = \sqrt{2\left[1-\cos(hx)\right]} = 2\left|\sin\frac{hx}{2}\right|$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f(t+h)-f(t)\right| \le 2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x) = 2\left[\int_{-\infty}^{-A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)+\int_{A}^{+\infty}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\right]$$

$$= 2\left[\int_{|x|\ge A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\right] \le 2\left[\int_{|x|\ge A}\mathrm{d}F(x)+\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right|\mathrm{d}F(x)\right]$$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

$$\Longrightarrow \quad \left|f(t+h)-f(t)\right| \le 2\left[\int_{|x|\ge A} \mathrm{d}F(x) + \int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right| \mathrm{d}F(x)\right]$$

与 t 无关

$$\int_{|x|\ge A} \mathrm{d}F(x) \to 0 , \qquad A \to +\infty$$

$$\int_{-A}^{A}\left|\sin\frac{hx}{2}\right| \mathrm{d}F(x) \to 0 , \qquad h \to 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left|f(t+h)-f(t)\right| \to 0 , \qquad h \to 0$$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.
- **性质 3** 对于任意的正整数 n 以及任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$、任意复数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k - t_j\right)\lambda_k\overline{\lambda_j} \ge 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k - t_j\right)\lambda_k\overline{\lambda_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(e^{i\left(t_k - t_j\right)\xi}\right)\lambda_k\overline{\lambda_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(t_k - t_j\right)x} dF(x)\right]\lambda_k\overline{\lambda_j}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\left(t_k - t_j\right)x}\lambda_k\overline{\lambda_j}\right] dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{it_k x}\lambda_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} e^{-it_j x}\overline{\lambda_j}\right) dF(x)$$

二、特征函数的性质

$$e^{it_kx}\ \lambda_k=\left[\cos\left(t_kx\right)+i\sin\left(t_kx\right)\right]\cdot\left(\overset{\lambda_k}{\overbrace{a_k+ib_k}}\right)=a_k\cos\left(t_kx\right)-b_k\sin\left(t_kx\right)+i\left[a_k\sin\left(t_kx\right)+b_k\cos\left(t_kx\right)\right]$$

$$e^{-it_jx}\ \overline{\lambda_j}=\left[\cos\left(t_jx\right)-i\sin\left(t_jx\right)\right]\cdot\left(\overset{\overline{\lambda_j}}{\overbrace{a_j-ib_j}}\right)=a_j\cos\left(t_jx\right)-b_j\sin\left(t_jx\right)+i\left[-a_j\sin\left(t_jx\right)-b_j\cos\left(t_jx\right)\right]$$

$$=a_j\cos\left(t_jx\right)-b_j\sin\left(t_jx\right)-i\left[a_j\sin\left(t_jx\right)+b_j\cos\left(t_jx\right)\right]$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{it_kx}\ \lambda_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[a_k\cos\left(t_kx\right)-b_k\sin\left(t_kx\right)\right]+i\sum\limits_{k=1}^{n}\left[a_k\sin\left(t_kx\right)+b_k\cos\left(t_kx\right)\right]\\ \sum\limits_{j=1}^{n}e^{-it_jx}\ \overline{\lambda_j}=\sum\limits_{j=1}^{n}\left[a_j\cos\left(t_jx\right)-b_j\sin\left(t_jx\right)\right]-i\sum\limits_{j=1}^{n}\left[a_j\sin\left(t_jx\right)+b_j\cos\left(t_jx\right)\right]\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \overline{\sum_{k=1}^{n}\left(e^{it_kx}\ \lambda_k\right)}=\sum_{j=1}^{n}\left(e^{-it_jx}\ \overline{\lambda_j}\right)\ \Longrightarrow\ \sum_{k=1}^{n}\left(e^{it_kx}\ \lambda_k\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(e^{-it_jx}\ \overline{\lambda_j}\right)=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(e^{it_kx}\ \lambda_k\right)\right|^2$$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 一致连续.
- **性质 3** 对于任意的正整数 n 以及任意实数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 、任意复数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k-t_j\right)\lambda_k\overline{\lambda_j}\ge 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k-t_j\right)\lambda_k\overline{\lambda_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{i\left(t_k-t_j\right)\xi}\right)\lambda_k\overline{\lambda_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\left(t_k-t_j\right)x}\mathrm{d}F(x)\right]\lambda_k\overline{\lambda_j}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{i\left(t_k-t_j\right)x}\lambda_k\overline{\lambda_j}\right]\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{it_kx}\lambda_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-it_jx}\overline{\lambda_j}\right)\mathrm{d}F(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{it_kx}\lambda_k\right|^2\mathrm{d}F(x)\ge 0$$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.
- **性质 3** 对于任意的正整数 n 以及任意实数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$、任意复数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k - t_j\right)\lambda_k \overline{\lambda_j} \ge 0$$

- **性质 4** 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.

ξ_1 与 ξ_2 相互独立 $\Longrightarrow$ $e^{it\xi_1}=\cos\left(t\xi_1\right)+i\sin\left(t\xi_1\right)$ 与 $e^{it\xi_2}=\cos\left(t\xi_2\right)+i\sin\left(t\xi_2\right)$ 相互独立

$$\Longrightarrow f_{\xi_1+\xi_2}(t)=E\left(e^{it(\xi_1+\xi_2)}\right)=E\left(e^{it\xi_1}\cdot e^{it\xi_2}\right)=E\left(e^{it\xi_1}\right)\cdot E\left(e^{it\xi_2}\right)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)$$

$\xrightarrow{\text{推论}}$ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 相互独立 $\Longrightarrow f_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(t)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)\cdot\cdots\cdot f_{\xi_n}(t)$

- 正是由于性质 4，才使特征函数在概率论中占有重要地位.

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty，+\infty)$ 一致连续.
- **性质 3** 对于任意的正整数 n 以及任意实数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$、任意复数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k - t_j\right) \lambda_k \overline{\lambda_j} \ge 0$$

- **性质 4** 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.
- **性质 5** 设随机变量 ξ 的 n 阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k \le n$ 时：

$$f^{(k)}(0) = i^k E\left(\xi^k\right)$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{itx}\right)\right| = \left|i^k x^k \mathrm{e}^{itx}\right| \le \left|x^k\right| \quad \xrightarrow{\xi \text{ 的 } n \text{ 阶矩存在}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \,\mathrm{d}F(x) < \infty$$

二、特征函数的性质

$$f^{(k)}(t)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{itx}\right)\mathrm{d}F(x)=i^k\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{d}F(x)\xrightarrow{t=0}f^{(k)}(0)=i^k\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,\mathrm{d}F(x)=i^kE\left(\xi^k\right)$$

- 利用性质 5，我们可以方便地求随机变量的各阶矩.
- 推论：设随机变量 ξ 的 n 阶矩存在，则它的特征函数 $f(t)$ 可作如下展开

带有 Peano 余项的 Taylor 公式

$$f(t)=1+(it)E(\xi)+\frac{(it)^2}{2!}E\left(\xi^2\right)+\cdots+\frac{(it)^n}{n!}E\left(\xi^n\right)+o\left(t^n\right)$$

- **性质 5** 设随机变量 ξ 的 n 阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k\le n$ 时：

$$f^{(k)}(0)=i^kE\left(\xi^k\right)$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\mathrm{e}^{itx}\right)\right|=\left|i^kx^k\mathrm{e}^{itx}\right|\le\left|x^k\right|\qquad\xrightarrow{\xi\text{ 的 }n\text{ 阶矩存在}}\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^k\,\mathrm{d}F(x)<\infty$$

二、特征函数的性质

- **性质 1** 特征函数 $f(t)$ 有如下性质：$\left|f(t)\right| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$.
- **性质 2** 特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.
- **性质 3** 对于任意的正整数 n 以及任意实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$、任意复数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，均有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(t_k - t_j\right)\lambda_k \overline{\lambda_j} \ge 0$$

- **性质 4** 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.
- **性质 5** 设随机变量 ξ 的 n 阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k \le n$ 时：

$$f^{(k)}(0) = i^k E\left(\xi^k\right)$$

- **性质 6** 设 $\eta = a\xi + b$，这里 a, b 为常数，则 $f_\eta(t) = \mathrm{e}^{ibt}\cdot f_\xi(at)$.

$$f_\eta(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\eta}\right) = E\left(\mathrm{e}^{it(a\xi+b)}\right) = E\left(\mathrm{e}^{ita\xi}\cdot \mathrm{e}^{itb}\right) = \mathrm{e}^{itb}\cdot E\left(\mathrm{e}^{i(ta)\xi}\right) = \mathrm{e}^{ibt}\cdot f_\xi(at)$$

二、特征函数的性质

- 例：求正态分布 $N\left(\mu,\,\sigma^2\right)$ 的特征函数.

奇函数

先讨论 $\xi \sim N(0,\,1)$

$$f_\xi(t)=E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(tx)+i\sin(tx)\right]\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$\xi \sim N(0,\,1)$ 的一阶矩存在

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-x\cdot\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(tx)\cdot\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sin(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\left(\sin(tx)\right)$$

$$=0-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\cos(tx)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=0-t\cdot f_\xi(t)=-\,t\cdot f_\xi(t)$$

二、特征函数的性质

- 例：求正态分布 $N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ 的特征函数. $f(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

先讨论 $\xi \sim N(0,\ 1)$ $\longrightarrow$ $f_\xi(t)=E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ $\Longrightarrow$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_\xi(t)=-t\cdot f_\xi(t)$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{f_\xi(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_\xi(t)=-t$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{f_\xi(t)}\cdot\mathrm{d}f_\xi(t)=-t\,\mathrm{d}t$

$\Longrightarrow$ $\int\frac{1}{f_\xi(t)}\cdot\mathrm{d}f_\xi(t)=-\int t\,\mathrm{d}t+c$ $\Longrightarrow$ $\ln f_\xi(t)=-\frac{t^2}{2}+c$

$f_\xi(0)=1 \Longrightarrow c=0$ $\longrightarrow$ $f_\xi(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

$\eta \triangleq \mu+\sigma\cdot\xi$ $\Longrightarrow$ $\eta\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$

$\Longrightarrow$ $f_\eta(t)=\mathrm{e}^{i\mu t}\cdot f_\xi(\sigma t)=\mathrm{e}^{i\mu t}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

$=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$

- 性质 6 设 $\eta=a\xi+b$，这里 $a,\ b$ 为常数，则 $f_\eta(t)=\mathrm{e}^{ibt}\cdot f_\xi(at)$.

二、特征函数的性质

- 例：设 $\xi \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，由特征函数求其期望与方差.

$$f_\xi(t)=\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_\xi(t)=\left(i\mu-\sigma^2 t\right)\cdot \mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \xrightarrow{k=1\ ,\ t=0} i\mu=i^1\cdot E\left(\xi^1\right)=iE(\xi) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f_\xi(t)=-\sigma^2\cdot \mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}+\left(i\mu-\sigma^2 t\right)^2\cdot \mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow E(\xi)=\mu$$

$$\xrightarrow{k=2\ ,\ t=0} -\sigma^2+(i\mu)^2=i^2\cdot E\left(\xi^2\right)=-\left\{D(\xi)+\left[E(\xi)\right]^2\right\}=-\left\{D(\xi)+\mu^2\right\}$$

$$\Longrightarrow D(\xi)=\sigma^2$$

- 性质 5 设随机变量 ξ 的 n 阶矩存在，则它的特征函数可微分 n 次，且当 $k\le n$ 时：

$$f^{(k)}(0)=i^kE\left(\xi^k\right)$$

三、逆转公式与唯一性定理

- 特征函数和分布函数是相互唯一确定的.

$$f_\xi(t) \triangleq E\left(e^{it\xi}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_\xi(x) \quad \Longrightarrow \quad \text{分布函数可以确定特征函数}$$

定理：(逆转公式) 设分布函数 $F(x)$ 的特征函数为 $f(t)$，又 x_1, x_2 是 $F(x)$ 的连续点，则

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t)\, dt$$

定理：(唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定.

- 由唯一性定理知：特征函数可以完整地描述随机变量.
- 特别，当特征函数 $f(t)$ 绝对可积时，我们有下述更强的结果.

定理： 若特征函数 $f(t)$ 绝对可积，则相应的分布函数 $F(x)$ 的导数存在并连续，并且

$$F'(x) = p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\, dt$$

四、分布函数的再生性

- 性质 4 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.

- 在研究独立随机变量和的分布时，我们发现有的分布具有这样的性质：两个具有同一类型分布的独立随机变量之和的分布仍是这种类型的分布，且对应的参数等于两个随机变量相应参数之和. 这就称为再生性.

- 例：(二项分布) 设 $\xi_1 \sim b(m, p)$，$\xi_2 \sim b(n, p)$，并且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立，则

$$\xi_1 + \xi_2 \sim b(m+n, p)$$

$$\begin{cases} \xi_1 \sim b(m, p) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_1}(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^m \\ \xi_2 \sim b(n, p) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_2}(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n \end{cases}$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^m \cdot \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^{m+n}$$

定理：(唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定. $\Longrightarrow \quad \xi_1 + \xi_2 \sim b(m+n, p)$

四、分布函数的再生性

- 例：(Poisson 分布) 设 $\xi_1 \sim P(\lambda_1)$，$\xi_2 \sim P(\lambda_2)$，并且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立，则

$$\xi_1 + \xi_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\begin{cases} \xi_1 \sim P(\lambda_1) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{it}-1)} \\ \xi_2 \sim P(\lambda_2) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^{it}-1)} \end{cases}$$

- 性质 4　两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{e}^{it}-1)} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2(\mathrm{e}^{it}-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)(\mathrm{e}^{it}-1)}$$

定理：(唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定. $\Longrightarrow$ $\xi_1 + \xi_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

四、分布函数的再生性

- 例：(正态分布) 设 $\xi_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$，$\xi_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$，并且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立，则

$$\xi_1 + \xi_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

$$\begin{cases} \xi_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_1}(t) = \mathrm{e}^{i\mu_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} \\ \xi_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_2}(t) = \mathrm{e}^{i\mu_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} \end{cases}$$

- 性质 4 两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) = \mathrm{e}^{i\mu_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} \cdot \mathrm{e}^{i\mu_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = \mathrm{e}^{i(\mu_1 + \mu_2)t - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$$

定理：(唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定. $\Longrightarrow \quad \xi_1 + \xi_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

四、分布函数的再生性

- 例：(Gamma 分布) 设 $\xi_1 \sim \Gamma(r_1, \lambda)$，$\xi_2 \sim \Gamma(r_2, \lambda)$，并且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立，则

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(r_1 + r_2, \lambda)$$

$$\begin{cases} \xi_1 \sim \Gamma(r_1, \lambda) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_1}(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-r_1} \\ \xi_2 \sim \Gamma(r_2, \lambda) & \Longrightarrow \quad f_{\xi_2}(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-r_2} \end{cases}$$

- 性质 4　两个相互独立的随机变量之和的特征函数等于它们各自特征函数的乘积.

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r_1} \cdot \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-r_2} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-(r_1 + r_2)}$$

定理：(唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定. $\Longrightarrow$ $\xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(r_1 + r_2, \lambda)$

四、分布函数的再生性

- 分布函数的分解问题
  - 若两个独立随机变量之和服从某一分布，问能否断定这两个随机变量也分别服从该分布?
  - 这实际上是分布函数再生性问题的逆问题.
  - 已经证明：对于 正态分布 和 Poisson 分布，分解问题成立.

五、多元特征函数

- 若随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$，与随机变量相仿，我们定义它的特征函数为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n)} \mathrm{d}F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- 类似于一元情形，我们可以建立起 n 元特征函数的理论，方法完全相同，我们只叙述相关结论，证明一概从略.

五、多元特征函数

- **性质 1** $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中一致连续，并且 $\begin{cases} |f(t_1, t_2, \ldots, t_n)| \le f(0, 0, \ldots, 0) = 1 \\ f(-t_1, -t_2, \ldots, -t_n) = \overline{f(t_1, t_2, \ldots, t_n)} \end{cases}$

- **性质 2** 如果 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 的特征函数，则 $\eta = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$ 的特征函数为 $f_\eta = f(a_1t, a_2t, \ldots, a_nt)$.

- **性质 3** 如果 $E\left(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\right)$ 存在，则

$$E\left(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}\right) = i^{-\sum_{j=1}^{n} k_j}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

对应于任意 k 个分量 $\left(\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_k}\right)$ 的边际分布函数的特征函数，可以类似得到.

- **性质 4** 如果 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 的特征函数为 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$，则 k $(k < n)$ 维随机向量 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ 的特征函数为 $f_{1,2,\ldots,k}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = f(t_1, t_2, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$.

五、多元特征函数

- 逆转公式

如果 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是 $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 的特征函数，而 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是它的分布函数，则

$$P\left\{a_1 \le \xi_1 < b_1 , a_2 \le \xi_2 < b_2 , \ \ldots \ , a_n \le \xi_n < b_n\right\} =$$

$$\lim_{T_1\to\infty,\, T_2\to\infty,\, \ldots,\, T_n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\int_{-T_2}^{T_2}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-it_k a_k}-\mathrm{e}^{-it_k b_k}}{it_k}\right)\cdot f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

其中 a_k 和 b_k 都是任意实数，但满足唯一的要求：$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ 落在平行体

$$a_k \le \xi_k < b_k\ , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

的面上的概率为零.

五、多元特征函数

- **唯一性定理：** 分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 由其特征函数 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 唯一决定.
  - 有了唯一性定理，可以进一步证明特征函数的下述两个性质，它们表征了独立性.
- **性质 5** 若 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的特征函数为 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$，而 ξ_j 的特征函数为 $f_{\xi_j}(t), j=1,2,\dots,n$，则随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 相互独立的充要条件为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f_{\xi_1}(t_1) f_{\xi_2}(t_2) \cdots f_{\xi_n}(t_n)$$

- **性质 6** 若 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的特征函数为 $f_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$，而 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ 的特征函数为 $f_2(u_1, u_2, \dots, u_m)$，记 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ 的特征函数为 $f(t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$，则 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 与 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ 独立的充要条件是：对一切实数 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 以及 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 成立

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = f_1(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot f_2(u_1, u_2, \dots, u_m)$$