概 率 论

Probability

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 随机现象与统计规律性

    ① 概率的频率解释依然是当今最通行的解释.

    ② 描述频率趋近于概率的大数定律总是概率论的第一大数定律.

    ③ 实际当中用频率作为概率的估计是十分自然的.
  - 样本空间与事件

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	余集	A 不发生

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 古典概型 (等可能概率模型)：(1) 样本空间样本点有限；(2) 每个样本点等可能出现.
    - 计数方法：排列组合.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、有限可加性.
  - 几何概率：以等可能性定义概率，处理无限场合，概率是几何体的测度之比.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、可列可加性.
  - 概率空间：$\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$
    - 难点和要点：事件域 $\mathscr{F}$ 的选择，太小不能满足需要，太大难以定义概率.
    - 选择包含我们关注的所有事件的 σ 域，保证事件对交、并、逆、差作可列次运算的封闭性.
    - 在这种 σ 域上，能定义满足非负、规范和可列可加性的概率测度.

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性
  - 条件概率：$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}.$
    - 乘法公式：$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P\left(A_2\middle|A_1\right)\cdot P\left(A_3\middle|A_1A_2\right)\cdot\cdots\cdot P\left(A_n\middle|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$
    - 全概率公式：$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)$
    - Bayes 公式：$P\left(A_k\middle|B\right)=\dfrac{P(A_k)\cdot P\left(B\middle|A_k\right)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\cdot P\left(B\middle|A_i\right)}$

$$\left.\begin{aligned}&A_i\cap A_j=\Phi\quad(i\neq j)\\&\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega\end{aligned}\right\}$$

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性
  - 事件独立性：两个事件 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. 三个事件 $\begin{cases} P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(AC) = P(A) \cdot P(C) \\ P(BC) = P(B) \cdot P(C) \\ P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$
  - 试验独立性：一个试验的结果对其它各试验的可能结果的概率都无影响.
  - Bernoulli 试验 E：概率空间 $\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$，其中

$$A \subset \Omega, \quad \mathscr{F} = \left\{\Phi, A, \bar{A}, \Omega\right\}, \quad P(A) = p, P\left(\bar{A}\right) = q, \quad (p > 0, q > 0, p + q = 1)$$

- Bernoulli 分布
- Pascal 分布
- 二项分布
- 多项分布
- 几何 分布
- Poisson 分布

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

  - 随机变量 (r.v.) 与分布函数 (c.d.f.)：

    - 随机变量 ξ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中定义域为 Ω、取值于 $\mathbb{R}$ 的一个单值 Borel 函数.
    - 分布函数 $F(x) = P\{\xi(\omega) \le x\}$ ，$-\infty < x < \infty$ 是单调不降、取值 $[0, 1]$ 的左连续函数. 它完整描述了随机变量，是研究的主要对象.
    - 随机变量依取值 $\begin{cases} \text{离散型：} & \text{分布律 (mass function)、分布列} \\ \text{连续型：} & \text{概率密度 (p.d.f.)} \end{cases}$
    - 主要分布：$\begin{cases} \text{离散型：} & \text{Bernoulli, binomial, Poisson, hyper-geometric, geometric} \\ \text{连续型：} & \text{uniform, exponential, normal, } \Gamma \end{cases}$
    - 概率计算：$\begin{cases} \text{离散型：} & P\{x \in D\} = \sum\limits_{x_i \in D} p_i, \quad P\left\{(x, y) \in D\right\} = \sum\limits_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij} \\ \text{连续型：} & P\{x \in D\} = \int\limits_D p(x)\mathrm{d}x, \quad P\{(x, y) \in D\} = \iint\limits_D p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

  - 随机向量，随机变量的独立性：

    - 随机向量即多元随机变量
      - 联合分布： 联合分布函数、联合分布律、联合密度
      - 边际分布： 边际分布函数、边际分布律、边际密度
      - 条件分布： 条件分布函数、条件分布律、条件密度
      - 独立性： 与事件独立性几乎完全相同

    - 主要分布：
      - 离散型： 多项分布、多元超几何分布
      - 连续型： 二元均匀分布、二元正态分布

$$
(\xi,\eta)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right) \sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \xi\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), \qquad \eta\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right) \\ \left(\eta \,\middle|\, \xi=x\right)\sim N\left(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\left(x-\mu_1\right),\ \sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)\right) \\ \left(\xi \,\middle|\, \eta=y\right)\sim N\left(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(y-\mu_2\right),\ \sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right) \\ \xi \text{ 与 } \eta \text{ 相互独立} \Longleftrightarrow \rho=0 \end{cases}
$$

已学知识点

- 第三章 随机变量与分布函数

▶ 随机变量的函数及其分布：

- 随机变量的函数什么情况下还是随机变量
- 离散型易： $\begin{cases} \eta = g(\xi): & \text{对应法} \\ \zeta = g(\xi, \eta): & \text{表上作业法，独立情形和的卷积公式} \end{cases}$
- 连续型难：

$$\begin{cases} \eta = g(\xi): \text{直接法 } F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = \int_{g(x)<y} p_\xi(x)\mathrm{d}x \\ \zeta = g(\xi, \eta): \text{直接法 } F_\zeta(z) = P\{\zeta < z\} = \iint_{g(x,\, y)<z} p(x,\, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \qquad \text{和 (卷积公式)、差、商、积、 max , min 的公式} \\ \begin{cases} \zeta_1 = g_1(\xi, \eta) \\ \zeta_2 = g_2(\xi, \eta) \end{cases} : \text{变换法 } \begin{cases} u = g_1(x, y) \\ v = g_2(x, y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = h_1^{-1}(u, v) \\ y = h_2^{-1}(u, v) \end{cases} \Longrightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$q_{\zeta_1,\, \zeta_2}(u,\, v) = p\left(h_1^{-1}(u,\, v),\, h_2^{-1}(u,\, v)\right) \cdot |J|$$

第四章 数字特征与特征函数

4.1 数字特征

4.2 方差、相关系数、矩

4.3 熵与信息

4.4 母函数

4.5 特征函数

4.6 多元正态分布

4.1 数学期望

一、数学期望的概念

二、离散型场合

三、应用实例

四、连续型场合

五、一般场合

六、随机变量函数的数学期望

七、多维场合

八、数学期望的基本性质

一、数学期望的概念

- 数字特征是由随机变量决定的一些常数，数学期望 (mathematical expectation) 与方差 (variance) 是其中最重要的两个特征，它们只能刻化随机变量的部分性质.

- 数学期望 (mathematical expectation) 是一个随机变量的平均取值，是它所有可能取值的加权平均，权是这些可能值相应的概率.

- 例：一位射击教练将从两个候选人中挑选一人作为他的队员，甲还是乙的成绩更好?

成绩 (环数)	8	9	10
甲的概率	0.1	0.3	0.6
乙的概率	0.2	0.5	0.3

定义 $\longrightarrow$ $\begin{cases} \xi\text{: 甲射击一次的环数} \\ \eta\text{: 乙射击一次的环数} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \xi \text{ 的数学期望: } E(\xi) = 8\times 0.1 + 9\times 0.3 + 10\times 0.6 = 9.5 \text{ (环)} \\ \eta \text{ 的数学期望: } E(\eta) = 8\times 0.2 + 9\times 0.5 + 10\times 0.3 = 9.1 \text{ (环)} \end{cases}$

二、离散型场合

定义：设 ξ 为一离散型随机变量，其分布律为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$P\{\xi = x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

如果级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

绝对收敛，则把它称为 ξ 的数学期望 (mathematical expectation)，简称期望，或均值 (mean)，记作 $E(\xi)$.

- 数学期望反映了随机变量取值的中心趋势.
- 当 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ 发散时，说 ξ 的数学期望不存在.

二、离散型场合

- 几种重要的离散型分布的期望：

① Bernoulli 分布：

X	0	1
p_i	$1-p$	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

② 二项分布：$X\sim b(n,p)$ $\Longrightarrow$ $p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ ， $k=0,1,2,\ldots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_k=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,\left[(n-1)-(k-1)\right]!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\xrightarrow{i=k-1\,,\,m=n-1}=np\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!\,(m-i)!}p^i(1-p)^{m-i}=np\left[p+(1-p)\right]^m=np$$

二、离散型场合

- 几种重要的离散型分布的期望：

③ Poisson 分布：$X \sim P(\lambda)$ $\Longrightarrow$ $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\ \ldots$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda$$

④ 几何分布：$\Longrightarrow$ $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,3,\ \ldots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^{k-1}p=-p\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-p)^k\right]'=-p\left[\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right]'$$

$$=-p\left[\frac{1}{1-(1-p)}-1\right]'=-p\left(\frac{1-p}{p}\right)'=\frac{1}{p}$$

二、离散型场合

- 从以上内容可见，重要的离散型分布的参数都可由数学期望算得，因此它是一个重要的概念.
- 例：随机变量 ξ 取值 $x_k = (-1)^k \dfrac{2^k}{k}$，$k = 1, 2, \ldots$，对应的概率为 $p_k = P\{\xi = x_k\} = \dfrac{1}{2^k}$.

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{1}{2^k} > 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{是 } \xi \text{ 的概率分布}$$

$$\xrightarrow{\text{计算 } \xi \text{ 的数学期望}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$$

$$\xrightarrow{\text{但是}} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \Longrightarrow \xi \text{ 的数学期望不存在}$$

三、应用实例

- 例：某人有 10 万元，如果投资于一项目将有 30% 的可能获利 5 万，60% 的可能不赔不赚，但有 10% 的可能损失全部 10 万元；同期银行的利率为 2% ，问他应该如何决策?

记 ξ 为投资该项目的利润

ξ	5	0	-10
$P\{\xi = x_i\}$	0.3	0.6	0.1

$\Longrightarrow$ ξ 的数学期望

$$E(\xi) = 5\times 0.3 + 0\times 0.6 + (-10)\times 0.1 = 0.5 > 0.2 = \text{同期银行利率}$$

$\xrightarrow{\text{结论}}$ 从期望收益的角度应该投资这个项目

三、应用实例

- **例：** 血液化验. 假设要对 N 个人进行血液化验，比较下述两种方式的化验次数.

① 单独化验：每个人的血液分别进行化验，共需作 N 次化验.

② 分组化验：将 k 个人的血液混合在一起进行化验，如果呈阴性，则只需作一次化验；如果呈阳性，则对 k 个人再分别进行化验，此时共需做 $k+1$ 次化验.

$$\begin{cases} p \triangleq \text{任意一人化验呈阳性的概率} \\ \xi \triangleq \text{分组化验，一组需要作的化验次数} \end{cases} \Longrightarrow$$

ξ	1	$k+1$
p_i	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

ξ 的数学期望 $\longrightarrow$

$$E(\xi) = 1\times(1-p)^k + (k+1)\times\left[1-(1-p)^k\right] = (k+1) - k\cdot(1-p)^k$$

分组化验需要作的平均次数 $\longrightarrow$

$$\frac{N}{k}\cdot E(\xi) = \frac{N}{k}\cdot\left[(k+1) - k\cdot(1-p)^k\right]$$

三、应用实例

- 例：血液化验. 假设要对 N 个人进行血液化验，比较下述两种方式的化验次数.

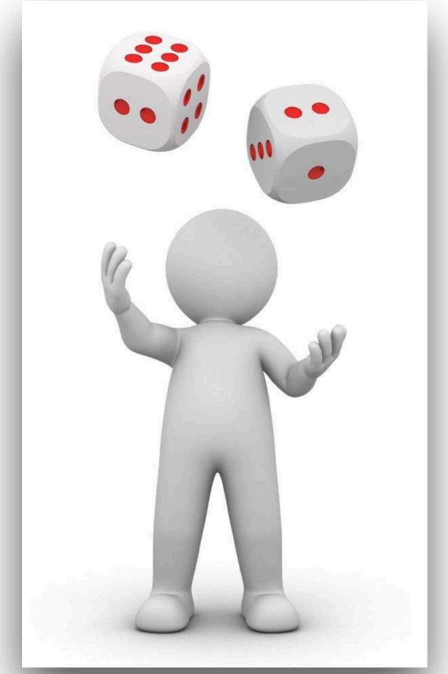
  ① 单独化验：每个人的血液分别进行化验，共需作 N 次化验.

  ② 分组化验：将 k 个人的血液混合在一起进行化验，如果呈阴性，则只需作一次化验；如果呈阳性，则对 k 个人再分别进行化验，此时共需作 $k+1$ 次化验.

分组化验需要作的平均次数 $\frac{N}{k}\cdot E(\xi)=\frac{N}{k}\cdot\left[(k+1)-k\cdot(1-p)^{k}\right]$

k	$p=\frac{1}{100}$ 时分组检验的试验次数	$p=\frac{1}{1000}$ 时分组检验的试验次数
2	$0.52N$	$0.50N$
5	$0.25N$	$0.20N$
10	$0.20N$	$0.11N$
20	$0.23N$	$0.07N$
40	$0.36N$	$0.06N$
100	$0.64N$	$0.10N$

三、应用实例



- 例：博彩的本质. 掷两枚均匀的骰子，投手赢的情形有如下两种

  ① 首局赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和等于 7 或 11.

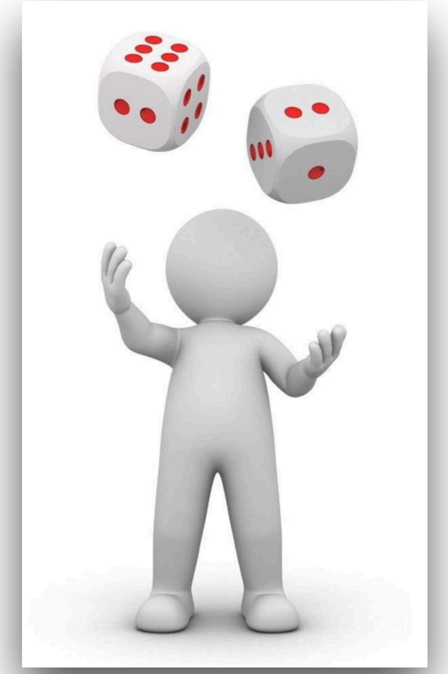
  ② 点数赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和为 4, 5, 6, 8, 9, 10，则他可以继续掷骰子. 若再次掷出的点数之和为首次掷出的点数之和、且在这之前中间未曾掷出 7 点，则投手赢. 其它情形皆判投手输.

$$A_1 \triangleq \{首局赢\}, \quad A_i \triangleq \{以点数\ i\ 赢\}, \quad i = 4, 5, 6, 8, 9, 10$$

$$\Longrightarrow \quad P\{投手赢\} = P\{A_1\} + P\{A_4\} + P\{A_5\} + P\{A_6\} + P\{A_8\} + P\{A_9\} + P\{A_{10}\}$$

$$P\{A_1\} = P\{第一次掷出\ 7\ 点或\ 11\ 点\} = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$$

三、应用实例



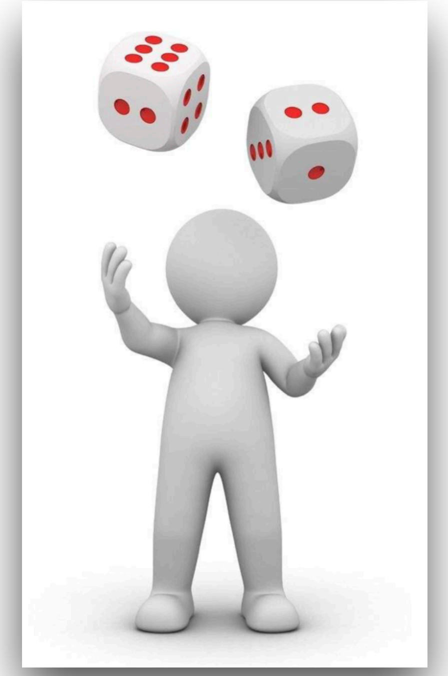
- 例：博彩的本质. 掷两枚均匀的骰子，投手赢的情形有如下两种

  ① 首局赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和等于 7 或 11.

  ② 点数赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和为 4, 5, 6, 8, 9, 10，则他可以继续掷骰子. 若再次掷出的点数之和为首次掷出的点数之和、且中间未曾掷出 7 点，则投手赢. 其它情形皆判投手输.

$$
\begin{aligned}
P\{A_4\} &= P\Big\{\{\text{第一次掷出 4 点}\}\cap\{\text{第二次掷出 4 点}\}\Big\} \\
&+ P\Big\{\{\text{第一次掷出 4 点}\}\cap\{\text{第二次掷出 4, 7 之外的点}\}\cap\{\text{第三次掷出 4 点}\}\Big\} \\
&+ P\Big\{\{\text{第一次掷出 4 点}\}\cap\{\text{第二次掷出 4, 7 之外的点}\}\cap\{\text{第三次掷出 4, 7 之外的点}\}\cap\{\text{第四次掷出 4 点}\}\Big\} + \cdots \\
&= \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36}+\frac{3}{36}\cdot\left(\frac{27}{36}\right)\cdot\frac{3}{36}+\frac{3}{36}\cdot\left(\frac{27}{36}\right)^2\cdot\frac{3}{36}+\cdots\cdots = \left(\frac{3}{36}\right)^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{27}{36}\right)^k = \left(\frac{3}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{1-\frac{27}{36}} = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

三、应用实例



- 例：博彩的本质. 掷两枚均匀的骰子，投手赢的情形有如下两种

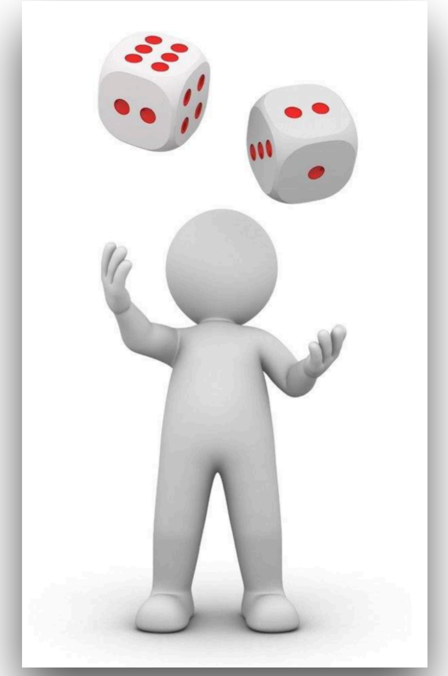
  ① 首局赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和等于 7 或 11.

  ② 点数赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和为 4, 5, 6, 8, 9, 10，则他可以继续掷骰子. 若再次掷出的点数之和为首次掷出的点数之和、且中间未曾掷出 7 点，则投手赢. 其它情形皆判投手输.

A_i	A_1	A_4	A_5	A_6	A_8	A_9	A_{10}
$P\{A_i\}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{16}{360}$	$\frac{25}{396}$	$\frac{16}{360}$	$\frac{16}{360}$	$\frac{1}{36}$

$$\Longrightarrow \quad P\{投手赢\} = P\{A_1\} + P\{A_4\} + P\{A_5\} + P\{A_6\} + P\{A_8\} + P\{A_9\} + P\{A_{10}\} = 0.493$$

三、应用实例



- 例：博彩的本质. 掷两枚均匀的骰子，投手赢的情形有如下两种

  ① 首局赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和等于 7 或 11.

  ② 点数赢：若投手第一次掷出的两枚骰子向上的点数之和为 4, 5, 6, 8, 9, 10，则他可以继续掷骰子. 若再次掷出的点数之和为首次掷出的点数之和、且中间未曾掷出 7 点，则投手赢. 其它情形皆判投手输.

$\xi \triangleq \{$投手以一元为赌注进行上述博彩活动的所得$\}$

ξ	1	-1
p_i	0.493	0.507

$$\xrightarrow{\xi\text{ 的均值}} E(\xi) = 1 \times 0.493 + (-1) \times 0.507 = -0.014 \text{ 元}$$

四、连续型场合

定义： 设 ξ 为一连续型随机变量，其密度函数为 $p(x)$，如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称之为 ξ 的**数学期望** (mathematical expectation) 或**均值** (mean)，记作 $E(\xi)$.

四、连续型场合

- 几种重要的连续型分布的期望：

① 均匀分布：$X \sim U[a, b] \implies p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$$

② 指数分布：$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \implies p_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x \cdot \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = -\left[\left(x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{\lambda}$$

四、连续型场合

- 几种重要的连续型分布的期望：

③ 正态分布：$X \sim N\left(\mu,\, \sigma^2\right) \Longrightarrow p_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$

$t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \longleftarrow \mathrm{d}x = \sigma\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma t + \mu\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \mu$$

四、连续型场合

- 几种重要的连续型分布的期望：

④ Cauchy 分布： $\Longrightarrow$ $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\,,\quad -\infty<x<+\infty$ $\Longrightarrow$ ξ 的数学期望不存在

$$E\left(\left|\xi\right|\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot p_\xi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x=\infty$$

⑤ Gamma 分布：$X\sim\Gamma(r,\lambda)$ $\Longrightarrow$ $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,, & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^r\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}(\lambda x)=\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)}=\frac{r}{\lambda}$$

五、一般场合

- 适合所有随机变量的数学期望的定义

定义：设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，定义 Stieltjes 积分

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x)$$

为 ξ 的数学期望或均值，这里自然要求上述积分绝对收敛，否则称为数学期望不存在.

- 关于 Stieltjes 积分：

① 若 $F(x)$ 可微，则上述 Stieltjes 积分化为普通 (Riemann) 积分

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)\,\mathrm{d}x$$

五、一般场合

- 适合所有随机变量的数学期望的定义

定义：设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，定义 Stieltjes 积分

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}F(x)$$

为 ξ 的数学期望或均值，这里自然要求上述积分绝对收敛，否则称为数学期望不存在.

- 关于 Stieltjes 积分：

② 若 $F(x)$ 为跳跃函数，在 x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ 处有跃度 p_i，则上述 Stieltjes 积分化为无穷级数

$$E(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

五、一般场合

- 适合所有随机变量的数学期望的定义

定义：设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，定义 Stieltjes 积分

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x)$$

为 ξ 的数学期望或均值，这里自然要求上述积分绝对收敛，否则称为数学期望不存在.

- 关于 Stieltjes 积分：

③ 线性性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[ag_1(x)+bg_2(x)\right]\,\mathrm{d}F(x)=a\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(x)\,\mathrm{d}F(x)+b\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(x)\,\mathrm{d}F(x)$

④ 线性性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}\left[aF_1(x)+bF_2(x)\right]=a\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}F_1(x)+b\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}F_2(x)$

五、一般场合

- 适合所有随机变量的数学期望的定义

定义：设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，定义 Stieltjes 积分

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}F(x)$$

为 ξ 的数学期望或均值，这里自然要求上述积分绝对收敛，否则称为数学期望不存在.

- 关于 Stieltjes 积分：

⑤ $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}F(x) = \int_a^c g(x)\, \mathrm{d}F(x) + \int_c^b g(x)\, \mathrm{d}F(x) \qquad (a \le c \le b)$

⑥ 若 $g(x) \ge 0$，$F(x)$ 单调不降，$b > a$，则 $\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}F(x) \ge 0$.

六、随机变量函数的数学期望

- 单个变量函数的期望

ξ 是随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则 $\eta=g(\xi)$ 是随机变量.

定理：设 ξ 为随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则随机变量 $\eta=g(\xi)$ 的数学期望为

$$E(\eta)=E\left[g(\xi)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\ \mathrm{d}F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}F_{\xi}(x)$$

- 求 $\eta=g(\xi)$ 的均值不必计算新随机变量 η 的分布.
- 证明略，该定理的证明要用到测度论的知识，超出本课程的范围.

六、随机变量函数的数学期望

- 单个变量函数的期望

ξ 是随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是随机变量.

定理：设 ξ 为随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则随机变量 $\eta = g(\xi)$ 的数学期望为

$$E(\eta) = E\left[g(\xi)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, \mathrm{d}F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}F_\xi(x)$$

▶ 离散型场合. 公式化为 $E\left[g(\xi)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_\xi(x_i)$

ξ 的分布列 $\longrightarrow$

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P\{\xi = x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$\eta = g(\xi)$ 的分布列 $\longrightarrow$

$\eta = g(\xi)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
$P\{\eta = g(x_i)\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

六、随机变量函数的数学期望

- 单个变量函数的期望

ξ 是随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则 $\eta = g(\xi)$ 是随机变量.

定理：设 ξ 为随机变量，$g(x)$ 是一元 Borel 函数，则随机变量 $\eta = g(\xi)$ 的数学期望为

$$E(\eta) = E\left[g(\xi)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \,\mathrm{d}F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}F_\xi(x)$$

▶ 连续型场合. 若 ξ 有密度函数 $p_\xi(x)$，公式化为 $E\left[g(\xi)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot p_\xi(x)\,\mathrm{d}x$

$$E\left[g(\xi)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot p_\xi(x)\,\mathrm{d}x$$

六、随机变量函数的数学期望

Poisson 分布部分和计算公式 $\longrightarrow$ $\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^1 x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\lambda} y^{r-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$

- 单个变量函数的期望

- 例：(报童问题) 设某报童每日的潜在卖报数 ζ 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 如果每卖出一份报可得报酬 a，卖不掉而退回则每份赔偿 b. 若某日该报童买进 n 份报，试求其期望所得，进一步求最佳的买进份数 n.

$\xi \triangleq$ 每日实际的卖报数 $\Longrightarrow$ $\xi=\begin{cases}\zeta, & \zeta<n\\ n, & \zeta\ge n\end{cases}$ $\longrightarrow$ $\xi\sim$ 截尾 Poisson 分布： $P\{\xi=k\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k<n\\ \sum\limits_{i=n}^{\infty}\dfrac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k\ge n\end{cases}$

$\eta \triangleq$ 每日卖报所得报酬 $\Longrightarrow$ $\eta=g(\xi)=\begin{cases}an, & \xi=n\\ a\xi-b(n-\xi), & \xi<n\end{cases}$

期望所得 $\longrightarrow$ $E(\eta)=E\left[g(\xi)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[ak-b(n-k)\right]\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+an\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=(a+b)\lambda\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}-(a+b)n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}+an$

最佳买进份数 $\longrightarrow$ 给定 a, b, λ，确定 n 使得 $E(\eta)=E\left[g(\xi)\right]$ 达到最大，这是一个优化问题！

六、随机变量函数的数学期望

- 单个变量函数的期望

- 例：假定某公司开发了一种新产品，他们每卖出一件可获利 500 元，而积压一件将损失 2000元，预计这种产品的销售量 ξ 服从参数为 $\lambda = 0.00001$ 的指数分布，

$$p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

问应该生产多少才能使得平均获利最大?

如果生产了 c 件 $\xrightarrow{\text{获利}}$ $\eta = \eta(c, \xi) = \begin{cases} 500\xi - 2000(c - \xi), & \xi < c \\ 500c, & \xi \geq c \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{平均获利}}$ $E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(c, x) p_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} [500x - 2000(c - x)]\, p_\xi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} 500c p_\xi(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^c [500x - 2000(c - x)]\,\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x + 500c\int_c^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 2500\frac{1}{\lambda}\left(2 - e^{-\lambda c}\right) - 2000c$$

$\lambda = 0.00001$

$$= 2500 \times 100000 \times \left(2 - e^{-0.00001c}\right) - 2000c$$

六、随机变量函数的数学期望

- 单个变量函数的期望

- 例：假定某公司开发了一种新产品，他们每卖出一件可获利 500 元，而积压一件将损失 2000元，预计这种产品的销售量 ξ 服从参数为 $\lambda = 0.00001$ 的指数分布，

$$p_\xi(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

问应该生产多少才能使得平均获利最大? 平均获利： $E(\eta) = 2500 \times 100000 \times \left(2 - \mathrm{e}^{-0.00001c}\right) - 2000c$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c} E(\eta) = 2500 \times \mathrm{e}^{-0.00001c} - 2000 \xrightarrow{\text{令其为零得}} c = -\frac{1}{0.00001} \ln\left(\frac{2000}{2500}\right) = 22314.36$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}c^2} E(\eta) = -0.025 \times \mathrm{e}^{-0.00001c} < 0 \implies E(\eta) \text{ 有最大值}$$

$\implies$ 结论：生产 22314 件产品可使平均获利最大！