概　率　论

Probability

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 随机现象与统计规律性

    ① 概率的频率解释依然是当今最通行的解释.

    ② 描述频率趋近于概率的大数定律总是概率论的第一大数定律.

    ③ 实际当中用频率作为概率的估计是十分自然的.

  - 样本空间与事件

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	余集	A 不发生

已学知识点

- 第一章 事件与概率
  - 古典概型 (等可能概率模型)：(1) 样本空间样本点有限；(2) 每个样本点等可能出现.
    - 计数方法：排列组合.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、有限可加性.
  - 几何概率：以等可能性定义概率，处理无限场合，概率是几何体的测度之比.
    - 三个基本性质：非负性、规范性、可列可加性.
  - 概率空间：$\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$
    - 难点和要点：事件域 $\mathscr{F}$ 的选择，太小不能满足需要，太大难以定义概率.
    - 选择包含我们关注的所有事件的 σ 域，保证事件对交、并、逆、差作可列次运算的封闭性.
    - 在这种 σ 域上，能定义满足非负、规范和可列可加性的概率测度.

已学知识点

- 第二章 条件概率与统计独立性

  - 条件概率的定义：$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}.$

  - 条件概率也是概率：

① $P(A\,|\,B)\geq 0$

② $P(\Omega\,|\,B)=1$

A_i 两两互不相容

③ $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\,\middle|\,B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P\left(A_i\,\middle|\,B\right)$

④ $P\left(\overline{A}\,\middle|\,B\right)=1-\left(A\,\middle|\,B\right)$

⑤ $P\left(A\cup B\,\middle|\,C\right)=P\left(A\,\middle|\,C\right)+P\left(B\,\middle|\,C\right)-P\left(AB\,\middle|\,C\right)$

已学知识点

- 第二章　条件概率与统计独立性

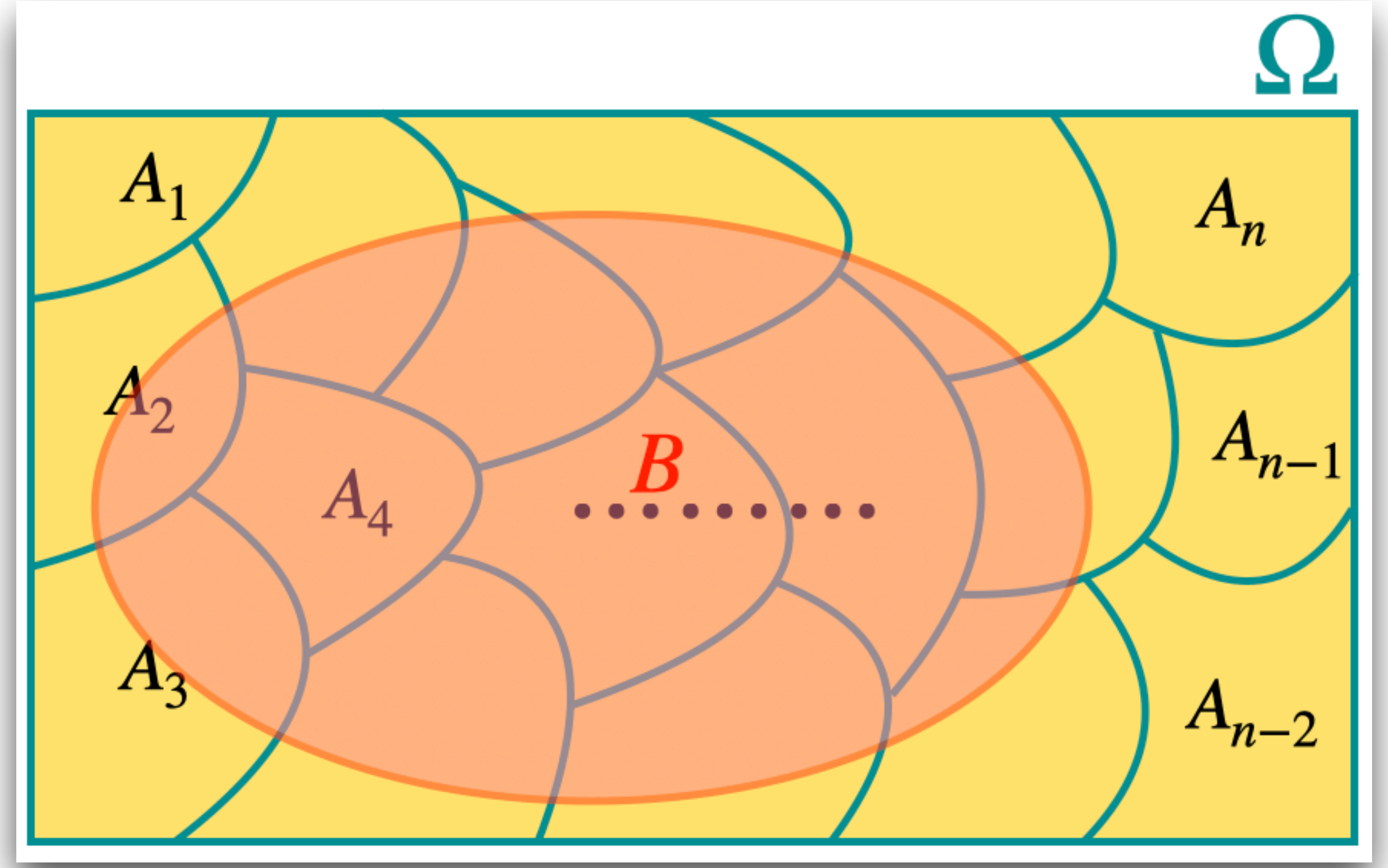
  - 乘法公式：$P(AB) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

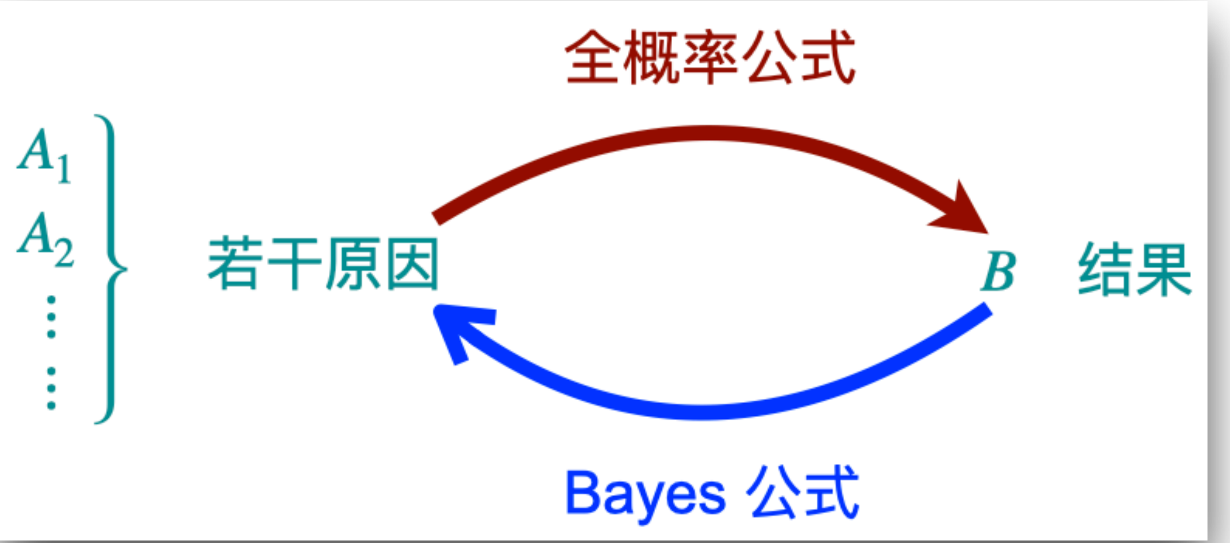
    $$P\left(A_1A_2\cdots A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 \middle| A_1\right) \cdot P\left(A_3 \middle| A_1A_2\right) \cdot \cdots \cdot P\left(A_n \middle| A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$

    乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.

  - 全概率公式：$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \cdot P\left(B \middle| A_i\right)$

  - Bayes 公式：$P\left(A_k \middle| B\right) = \dfrac{P\left(A_k\right) \cdot P\left(B \middle| A_k\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \cdot P\left(B \middle| A_i\right)}$





2.2 事件独立性

一、两个事件的独立性

二、多个事件的独立性

三、事件独立性与概率的计算

四、试验的独立性

一、两个事件的独立性

- 例：一袋中有 b 只黑球、w 只白球，有放回地摸球，计算

① 已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率.

② 第二次摸出黑球的概率.

古典概型
$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{b}{b+w} \\ P(AB) = \dfrac{b^2}{(b+w)^2} \\ P\left(\bar{A}B\right) = \dfrac{wb}{(b+w)^2} \end{cases}$$

记 $\begin{cases} A: & \text{第一次摸得黑球} \\ B: & \text{第二次摸得黑球} \end{cases}$

$$P\left(B \middle| A\right) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\dfrac{b^2}{(b+w)^2}}{\dfrac{b}{b+w}} = \frac{b}{b+w}$$

$$P(B) = P(AB) + P\left(\bar{A}B\right) = \frac{b^2}{(b+w)^2} + \frac{wb}{(b+w)^2} = \frac{b}{b+w} = P\left(B \middle| A\right) = P\left(B \middle| \bar{A}\right)$$

一、两个事件的独立性

- 定义：对两个事件 A 与 B，如果

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

则称事件 A 与 B 是统计独立的，简称 A 与 B 独立 (independent).

- 推论一：若事件 A 与 B 独立，且 $P(B) > 0$，则 $P\left(A \middle| B\right) = P(A)$.

- 推论二：若事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

- Remark：

① 必然事件 Ω 及不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都独立.

② 相互独立与互不相容是无关的两个概念.

一、两个事件的独立性

- 例：从一副扑克牌中随机抽取一张，设 A 表示取到的扑克牌是 K，B 表示取到的扑克牌是方块.

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

$$P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$P(AB)=\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B)$$

$\Longrightarrow$ 事件 A 与 B 相互独立

二、多个事件的独立性

- 三事件 A, B, C 独立性如何定义？ $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ 还是 $\begin{cases} P(AB) = P(A) \cdot P(B) \\ P(AC) = P(A) \cdot P(C) \\ P(BC) \cancel{=} P(B) \cdot P(C) \end{cases}$ ？

- 例：掷一红、一绿两枚均匀的骰子一次，定义事件

$$\begin{cases} A: & \text{红色骰子出现向上的是 1 点或 2 点} \\ B: & \text{绿色骰子出现向上的是 3 点或 4 点或 5 点} \\ C: & \text{两枚骰子向上的点数之和等于 4 或 11 或 12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3} \\ P(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2} \\ P(C) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} P(AB) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} \\ P(AC) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18} \\ P(BC) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18} \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

A

B

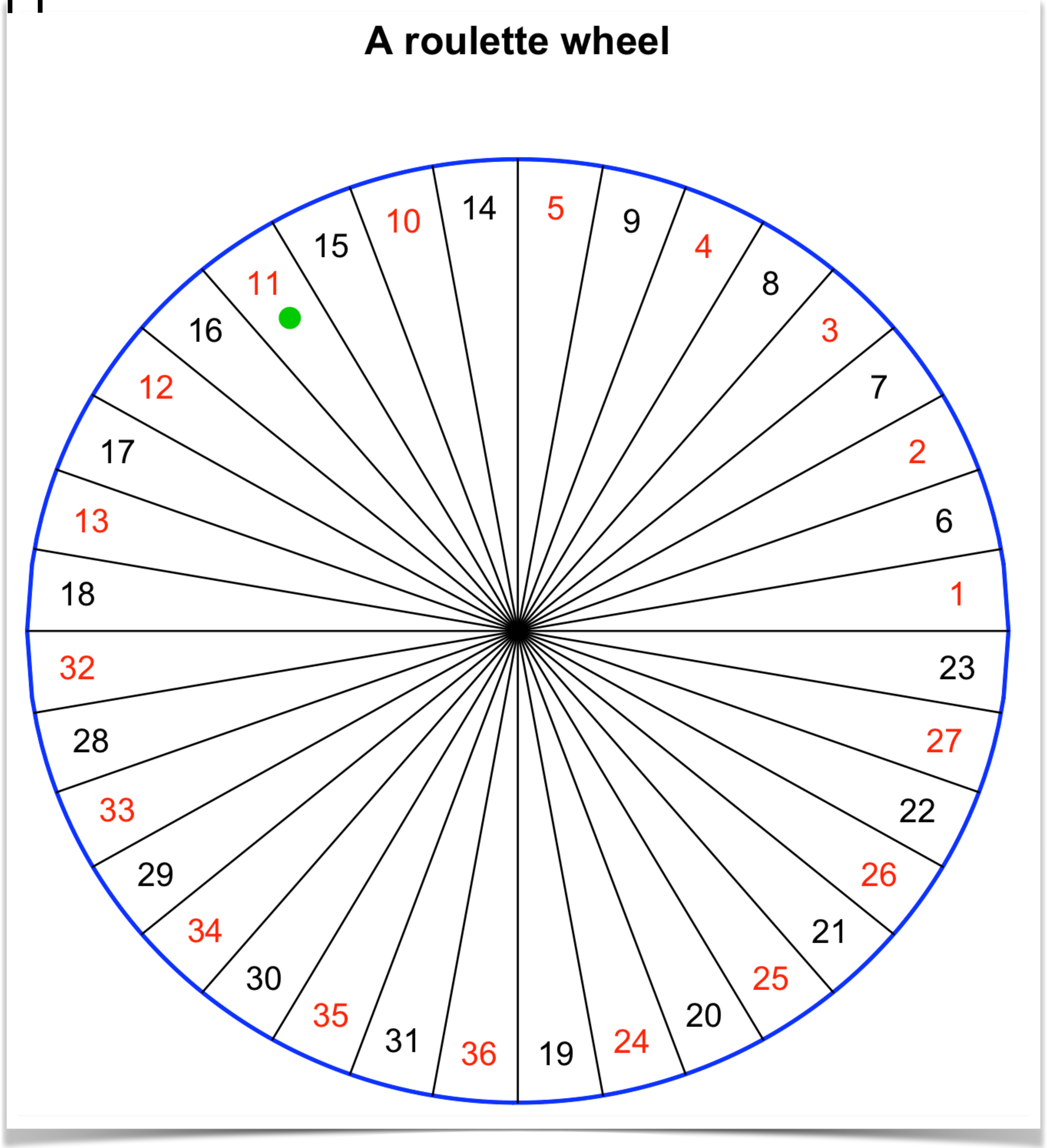
$$P(ABC) = \frac{1}{36} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

$$P(BC) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = P(B) \cdot P(C)$$

二、多个事件的独立性

- 三事件 A, B, C 独立性如何定义？ $P(ABC) \cancel{=} P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ 还是 $\begin{cases} P(AB)=P(A)\cdot P(B) \\ P(AC)=P(A)\cdot P(C) \\ P(BC)=P(B)\cdot P(C) \end{cases}$ ？
- 例：轮盘赌的轮盘有 36 个数，分为红、黑两种颜色，定义事件

$$\begin{cases} R: & \text{出现红色数字} \\ E: & \text{出现的是偶数} \\ T: & \text{出现的数字不超过 18} \end{cases}$$



$$\begin{cases} P(R)=\dfrac{1}{2} \\ P(E)=\dfrac{1}{2} \\ P(T)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(RE)=\dfrac{1}{4} \\ P(RT)=\dfrac{1}{4} \\ P(ET)=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$P(RET)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$\neq \frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(R)\cdot P(E)\cdot P(T)$$

二、多个事件的独立性

- 定义：对三个事件 A, B, C，如果以下四个等式同时成立，则称 A, B, C 相互独立.

$$\underbrace{\begin{cases} P(AB) = P(A)\cdot P(B) \\ P(AC) = P(A)\cdot P(C) \\ P(BC) = P(B)\cdot P(C) \end{cases}}_{\text{两两相互独立}}$$

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

二、多个事件的独立性

- 定义：对 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，若对于所有可能的组合 $1 \le i < j < k < \cdots \le n$ 都有

$$\begin{cases} P\left(A_iA_j\right) = P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) \\ P\left(A_iA_jA_k\right) = P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) \cdot P\left(A_k\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P\left(A_1A_2\cdots A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdots P\left(A_n\right) \end{cases}$$

成立，则称 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立.

- 这样的等式共有 $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$ 个.

二、多个事件的独立性

- **推论**：设 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是相互独立的，则其中任意 m 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ 也是相互独立的，其中 $1 \le m \le n$，而 $i_1, i_2, \ldots, i_m$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的一个选排列.

- **注意**：① 上述结论关于对立事件 (逆事件) 也成立.

  ② 无穷多个事件相互独立，是指其中任意有限多个事件均相互独立.

三、事件独立性与概率的计算

- 相互独立事件至少发生其一的概率的计算

若 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 相互独立的，则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$$

$$\Longrightarrow \quad P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n_n}}\right)$$

独立性

$$= 1 - P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) \cdot P\left(\overline{A}_2\right) \cdot \cdots \cdot P\left(\overline{A}_n\right)$$

$$= 1 - \left[1 - P\left(A_1\right)\right]\left[1 - P\left(A_2\right)\right] \cdot \cdots \cdot \left[1 - P\left(A_n\right)\right]$$

三、事件独立性与概率的计算

- 例：假若每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，混合 100 个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

A_i：第 i 个人血清中含有肝炎病毒， $i = 1, 2, \ldots, 100$　　相互独立

$$\Longrightarrow \quad P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}\right) = 1 - \left[1 - P\left(A_1\right)\right]\left[1 - P\left(A_2\right)\right] \cdot \cdots \cdot \left[1 - P\left(A_{100}\right)\right]$$

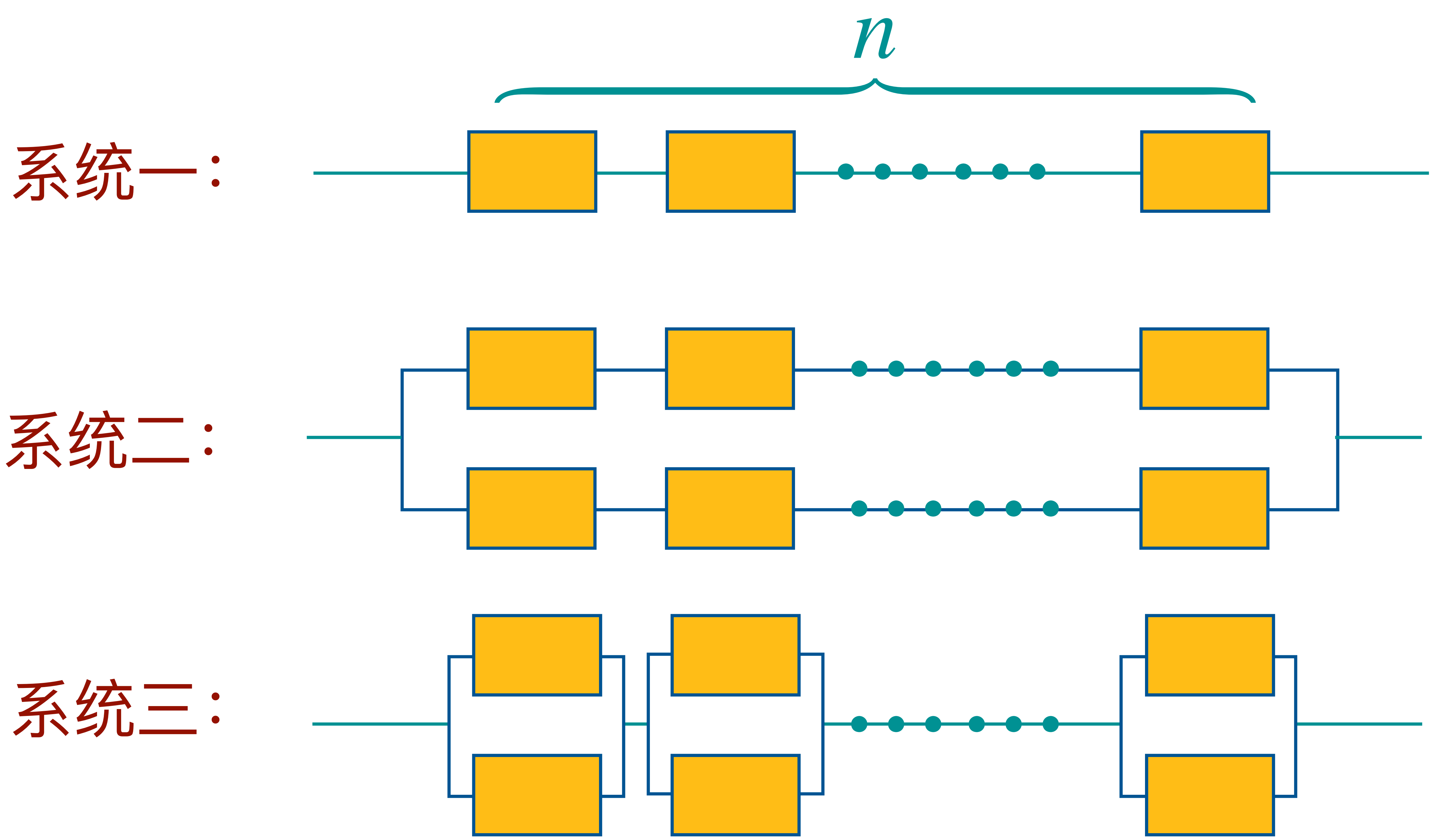
$$= 1 - (1 - 0.004)^{100}$$

$$\approx 0.33022$$

$P\left(A_i\right) = 0.4\,\%$

三、事件独立性与概率的计算

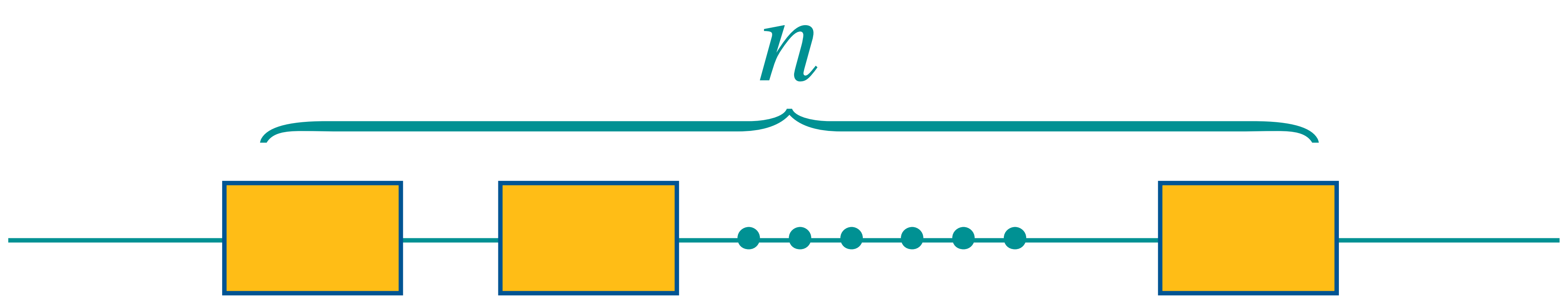
- 在可靠性理论中的应用
  - 元件的可靠性：一个元件能正常工作的概率 p.
  - 系统的可靠性：若干元件组成一个系统，系统正常工作的概率.



三、事件独立性与概率的计算

- 在可靠性理论中的应用
  - 元件的可靠性：一个元件能正常工作的概率 p $(0 < p < 1)$.
  - 系统的可靠性：若干元件组成一个系统，系统正常工作的概率.

系统一：



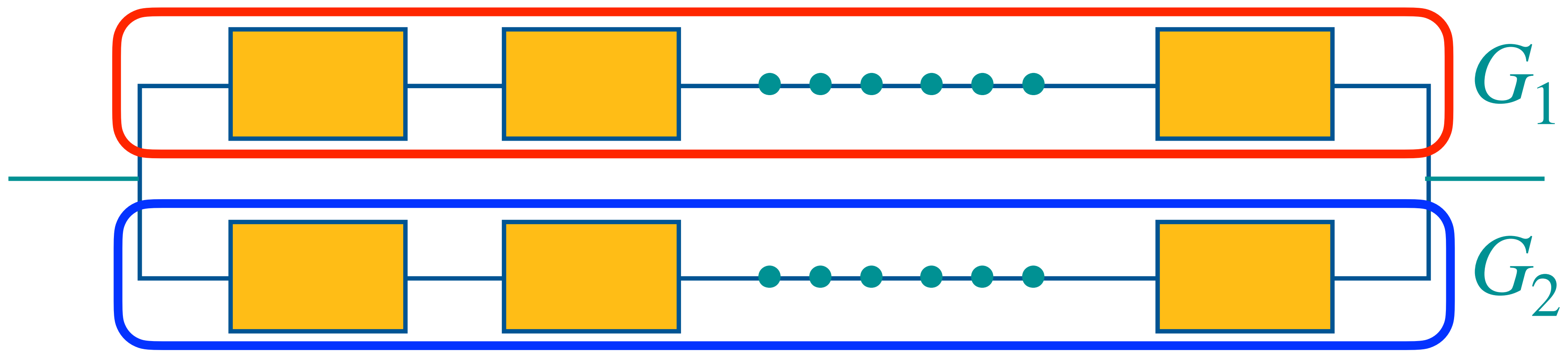
- 例：构成系统的每个元件的可靠性均为 p $(0 < p < 1)$，各元件能否正常工作相互独立的，求系统的可靠性.

系统一的可靠性 $= p^n$

三、事件独立性与概率的计算

- 在可靠性理论中的应用
  - 元件的可靠性：一个元件能正常工作的概率 $p\ (0<p<1)$.
  - 系统的可靠性：若干元件组成一个系统，系统正常工作的概率.
- 例：构成系统的每个元件的可靠性均为 $p\ (0<p<1)$，各元件能否正常工作相互独立的，求系统的可靠性.

系统二：



$$P(G_1)=P(G_2)=p^n$$

$$\text{系统二的可靠性}=1-P\left(\overline{G}_1\overline{G}_2\right)=1-P\left(\overline{G}_1\right)\cdot P\left(\overline{G}_2\right)$$

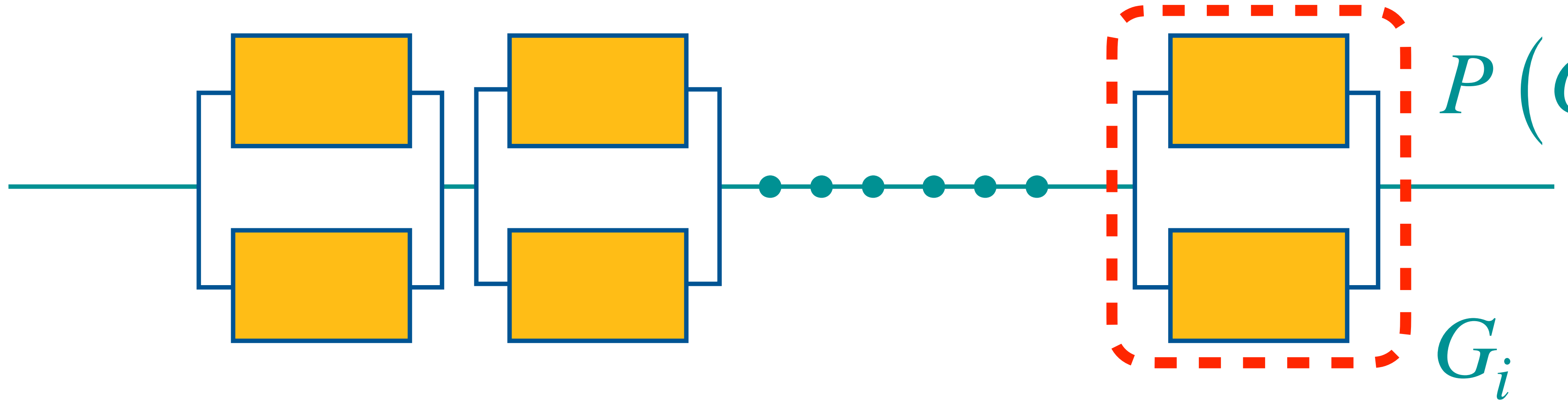
$$=1-\left(1-p^n\right)^2=p^n\left(2-p^n\right)$$

三、事件独立性与概率的计算

- 在可靠性理论中的应用
  - 元件的可靠性：一个元件能正常工作的概率 $p\ (0 < p < 1)$.
  - 系统的可靠性：若干元件组成一个系统，系统正常工作的概率.
- 例：构成系统的每个元件的可靠性均为 $p\ (0 < p < 1)$，各元件能否正常工作相互独立的，求系统的可靠性.

系统三的可靠性 $= P\left(G_1G_2\cdots G_n\right) = P\left(G_1\right)\cdot P\left(G_2\right)\cdot\cdots\cdot P\left(G_n\right) = p^n(2-p)^n$

系统三：



$P\left(G_i\right) = 1-(1-p)^2 = p(2-p)$

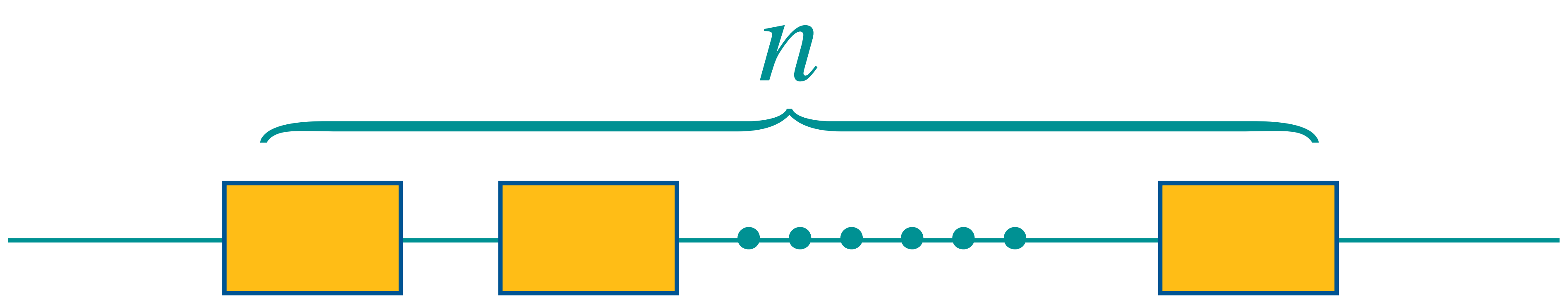
三、事件独立性与概率的计算

- 在可靠性理论中的应用

  - 元件的可靠性：一个元件能正常工作的概率 p.
  - 系统的可靠性：若干元件组成一个系统，系统正常工作的概率.

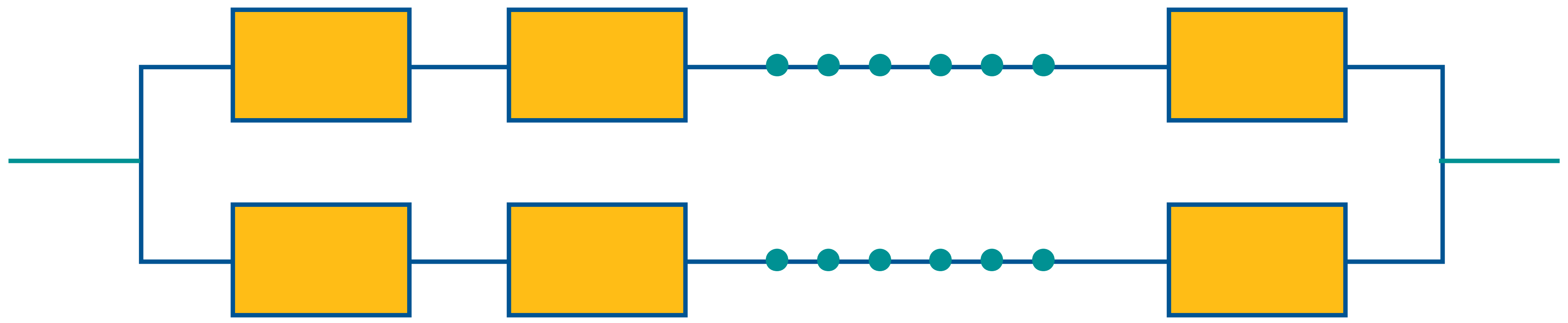
$n=20\ ,\ p=0.9$ $\qquad\qquad$ $n=10\ ,\ p=0.8$

$=0.122$ 系统一：



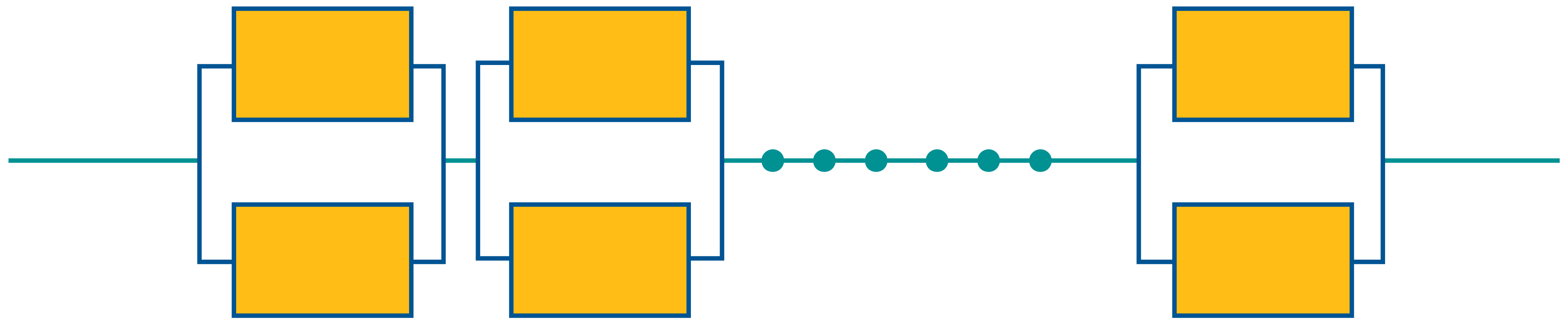
p^n $\quad =0.107$

$=0.228$ 系统二：



$p^n\left(2-p^n\right)$ $\quad =0.203$

$=0.818$ 系统三：



$p^n\left(2-p\right)^n$ $\quad =0.665$

四、试验的独立性

- 所谓试验相互独立，就是其中一个试验所得到的结果，对其它各试验取得的可能结果的概率都没有影响.
- 若试验 E_1 的任一结果与试验 E_2 的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.
- 设试验 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{\omega^{(1)}\}$，试验 E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{\omega^{(2)}\}$，…，试验 E_n 的样本空间 $\Omega_n=\{\omega^{(n)}\}$. 为描述这 n 次试验，构造依次进行试验 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 的复合试验 E，其样本点为

$$\omega=\{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(n)}\}$$

其构成的样本空间记作

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n$$

四、试验的独立性

- 例：设有如下两个试验

E_1 ：掷一枚硬币 $\Longrightarrow$ $\Omega_1 = \{H, T\}$

E_2 ：从装有红、白、黑三球的袋子中摸出一球 $\Longrightarrow$ $\Omega_2 = \{R, W, B\}$

E ：首先掷一枚硬币，再摸一只球

$$\Longrightarrow \quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(H, R), (H, W), (H, B), (T, R), (T, W), (T, B)\}$$

四、试验的独立性

- 定义：设 $\mathscr{A}_k$ 表示与第 k 次试验有关的事件全体 $(k = 1, 2, \ldots, n)$，若对于任意的

$$A^{(1)} \in \mathscr{A}_1\ , A^{(2)} \in \mathscr{A}_2\ ,\ \ldots\ , A^{(n)} \in \mathscr{A}_n$$

均成立

$$P\left(A^{(1)}A^{(2)} \cdot \cdots \cdot A^{(n)}\right) = P\left(A^{(1)}\right) \cdot P\left(A^{(2)}\right) \cdot \cdots \cdot P\left(A^{(n)}\right)$$

则称试验 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ 是相互独立的.

四、试验的独立性

- 例：设有如下两个试验

E_1 ：掷一枚硬币 $\Longrightarrow$ $\Omega_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$

E_2 ：从装有红、白、黑三球的袋子中摸出一球 $\Longrightarrow$ $\Omega_2 = \{\mathrm{R}, \mathrm{W}, \mathrm{B}\}$

E ：首先掷一枚硬币，再摸一只球

$$\Longrightarrow \quad \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\mathrm{H}, \mathrm{R}), (\mathrm{H}, \mathrm{W}), (\mathrm{H}, \mathrm{B}), (\mathrm{T}, \mathrm{R}), (\mathrm{T}, \mathrm{W}), (\mathrm{T}, \mathrm{B})\}$$

利用古典概型概率的计算可以验证：试验 E_1 与 E_2 是相互独立的.

- 例：n 次有放回摸球所构成的 n 个试验是相互独立的.

  n 次不放回摸球所构成的 n 个试验不相互独立的.

四、试验的独立性

- 重复独立试验：研究在同样条件下重复进行的独立试验的数学模型.

① $\Omega_1 = \Omega_2 = \cdots = \Omega_n$.

② 有关事件的概率保持不变.

③ 各次试验是相互独立的.

四、试验的独立性

- 例：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验.

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, \frac{N}{N}$

$$\Longrightarrow \quad P\left(p=\frac{i}{N}\right)=\frac{1}{N}, \quad i=1, 2, \ldots, N$$

问题：如果连续掷该硬币 n 次均正面向上，问第 $n+1$ 次依然正面向上的概率是多少?

定义 $\begin{cases} A: & \text{第 } n+1 \text{ 次正面向上} \\ B: & \text{连续 } n \text{ 次均正面向上} \\ C_i: & \text{正面向上的概率 } p=\frac{i}{N}, i=1, 2, \ldots, N \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 求 $P\left(A \mid B\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(B)=P\left(B \mid C_1\right) \cdot P\left(C_1\right)+P\left(B \mid C_2\right) \cdot P\left(C_2\right)+\cdots+P\left(B \mid C_N\right) \cdot P\left(C_N\right)$$

全概率公式

四、试验的独立性

定义 $\begin{cases} A: & \text{第 } n+1 \text{ 次正面向上} \\ B: & \text{连续 } n \text{ 次均正面向上} \\ C_i: & \text{正面向上的概率 } p=\dfrac{i}{N},\ i=1,2,\ \ldots,N \end{cases}$

- 例：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验.

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\dfrac{1}{N},\dfrac{2}{N},\ \ldots\ ,\dfrac{N}{N}$

$$\Longrightarrow\quad P\left(p=\frac{i}{N}\right)=\frac{1}{N},\quad i=1,2,\ \ldots,N \quad\Longrightarrow\quad P(C_i)=\frac{1}{N}$$

问题：如果连续掷该硬币 n 次均正面向上，问第 $n+1$ 次依然正面向上的概率是多少?

$$P\left(B\,\middle|\,C_i\right)=P\left(\{\text{第 1 次正面}\}\bigcap\cdots\cdots\bigcap\{\text{第 n 次正面}\}\,\middle|\,C_i\right)=\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

试验独立性

$$P(B)=P\left(B\,\middle|\,C_1\right)\cdot P(C_1)+P\left(B\,\middle|\,C_2\right)\cdot P(C_2)+\cdots+P\left(B\,\middle|\,C_N\right)\cdot P(C_N)$$

全概率公式

四、试验的独立性

定义 $\begin{cases} A: & \text{第 } n+1 \text{ 次正面向上} \\ B: & \text{连续 } n \text{ 次均正面向上} \\ C_i: & \text{正面向上的概率 } p = \dfrac{i}{N},\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$

- 例：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \dots, \dfrac{N}{N}$

$$\Longrightarrow P\left(p = \frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N \Longrightarrow P(C_i) = \frac{1}{N}$$

问题：如果连续掷该硬币 n 次均正面向上，问第 $n+1$ 次依然正面向上的概率是多少?

$$P(B|C_i) = P\left(\{\text{第 1 次正面}\} \bigcap \cdots\cdots \bigcap \{\text{第 n 次正面}\} \middle| C_i\right) = \left(\frac{i}{N}\right)^n$$

试验独立性

$$P(B) = \left(\frac{1}{N}\right)^n \cdot \frac{1}{N} + \left(\frac{2}{N}\right)^n \cdot \frac{1}{N} + \cdots + \left(\frac{N}{N}\right)^n \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

四、试验的独立性

定义 $\begin{cases} A: & \text{第 } n+1 \text{ 次正面向上} \\ B: & \text{连续 } n \text{ 次均正面向上} \\ C_i: & \text{正面向上的概率 } p=\dfrac{i}{N},\ i=1,2,\ldots,N \end{cases}$

- 例：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验.

$$P\left(A\,|\,B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\dfrac{1}{N},\ \dfrac{2}{N},\ \ldots,\ \dfrac{N}{N}$

$$\Longrightarrow\quad P\left(p=\frac{i}{N}\right)=\frac{1}{N},\quad i=1,2,\ldots,N \quad\Longrightarrow\quad P\left(C_i\right)=\frac{1}{N}$$

问题：如果连续掷该硬币 n 次均正面向上，问第 $n+1$ 次依然正面向上的概率是多少?

$\Longrightarrow$ 同理可得 $P(AB)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1}$ $\quad\Longrightarrow\quad P\left(A\,|\,B\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n}}$

$$P(B)=\left(\frac{1}{N}\right)^n\cdot\frac{1}{N}+\left(\frac{2}{N}\right)^n\cdot\frac{1}{N}+\cdots+\left(\frac{N}{N}\right)^n\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

四、试验的独立性

- **例**：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验.

定义 $\begin{cases} A : \text{第 } n+1 \text{ 次正面向上} \\ B : \text{连续 } n \text{ 次均正面向上} \\ C_i : \text{正面向上的概率 } p = \dfrac{i}{N},\ i = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \ldots, \dfrac{N}{N}$

$$\Longrightarrow \quad P\left(p = \frac{i}{N}\right) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

问题：如果连续掷该硬币 n 次均正面向上，问第 $n+1$ 次依然正面向上的概率是多少?

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{\dfrac{1}{n+2}}{\dfrac{1}{n+1}} \approx P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\dfrac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N}\cdot\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{n}}$$

$$\approx \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}$$

$$\approx \int_0^1 x^{n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$