概 率 论

Probability

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 随机现象与统计规律
  - 随机试验：可重复性，可观察性，不确定性.
- 样本空间、随机事件
  - 样本空间与样本点
  - 随机事件与事件的发生：基本事件，必然事件，不可能事件
  - 事件的关系与运算：$\subset$ ，$=$ ，$\cup$ ，$\cap$ ，$-$ ，$AB=\Phi$ ，$\bar{A}$，交换律、结合律、分配律、对偶律

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB=\Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A-B$	差集	A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	余集	A 不发生

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 古典概型
  - 频率的定义：$F_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$，随机波动，稳定性(统计规律)
  - 频率的性质：非负有界性，规范性，有限可加性
  - 概率的描述性定义：频率的极限，优点 — 直观、易于理解，缺点 — 用现象定义本质
  - 古典概型 (等可能概率模型)：(1) 样本空间样本点有限；(2) 每个样本点等可能出现.
  - 古典概型概率的计算公式：$P(A) = \dfrac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含的样本点总数}}.$

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 组合数学相关知识
  - 加法原理: 做一件事情有 A 或 B 两类不同方式，A 有 n 种不同方法，B 有 m 种不同方法，则完成这件事情共有 $n+m$ 种不同的方法.
  - 乘法原理: 做一件事情必须经过 A 与 B 两个不同步骤，A 有 n 种不同方法，B 有 m 种不同方法，则完成这件事情一共有 $n \times m$ 种不同方法.

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 组合数学相关知识
  - 基本排列组合公式：
    - 不可重复的排列：$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
    - 全排列：$P_n = A_n^n = n!$
    - 可以重复的排列：n^r
    - 二项式组合：$C_n^r = \dbinom{n}{r} = \dfrac{A_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (r \le n).$ $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \dbinom{n}{r} a^r b^{n-r}$
    - 多项式组合：$\dbinom{n}{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_k} = \dfrac{n!}{r_1!\; r_2!\; \cdots\; r_k!}.$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \dbinom{n}{r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$
    - 可重复组合：$\dbinom{n+r-1}{r} = \dfrac{(n+r-1)!}{r!\;(n-1)!}.$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 非负整数解的个数

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 古典概率的性质:

① 非负性：对任一事件 A，有 $0 \le P(A) \le 1$.

② 规范性: 对必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$.

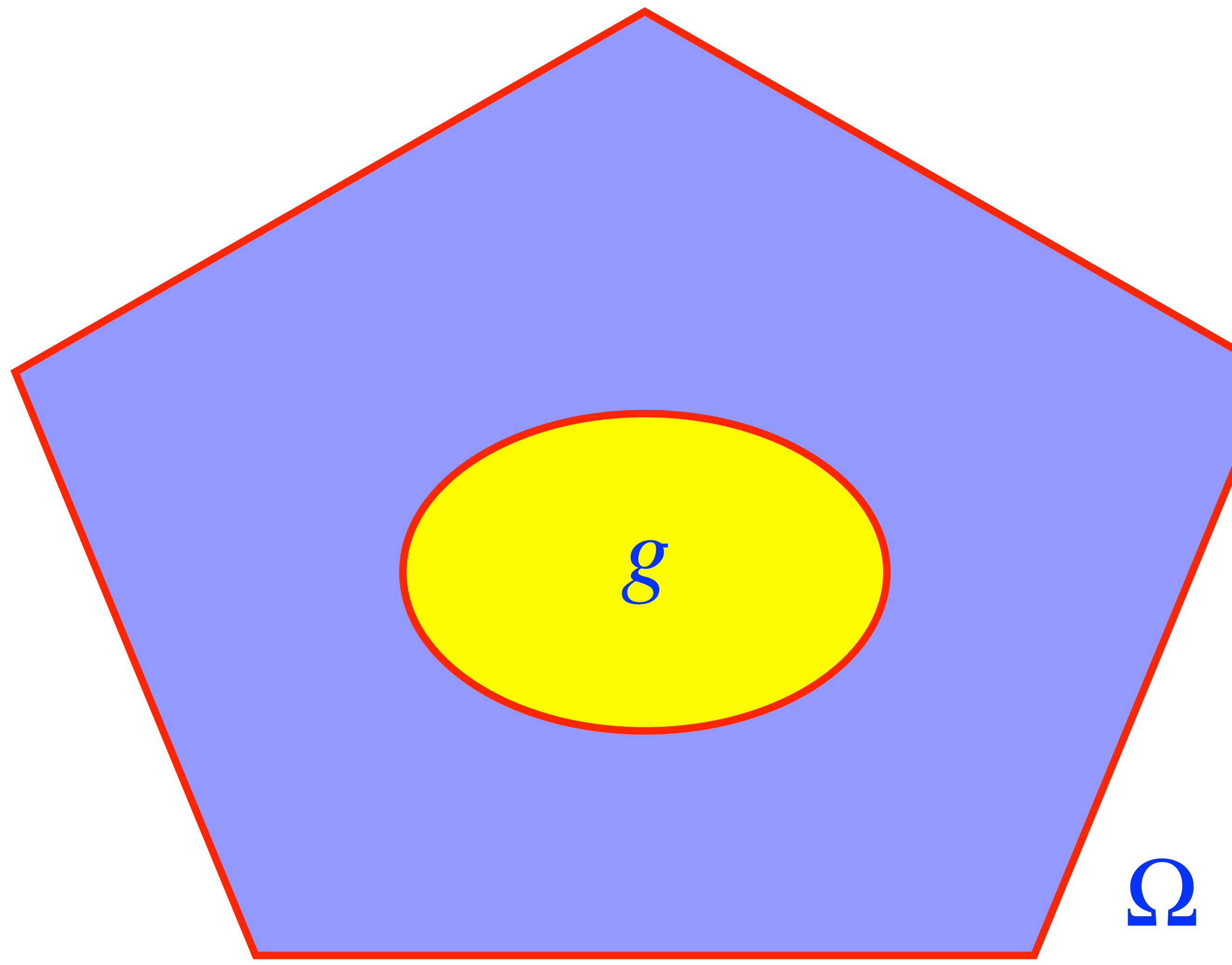
③ 有限可加性：若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)$.

- 推论：$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 几何概型
  - 试验的可能结果是某区域中的一个点 (一维、二维、n 维)，样本空间、事件所含样本点均无限个.
  - 等可能性：落在某区域 g 的概率与区域的几何度量 $m(g)$ (长度、面积、体积等) 成正比.
  - 若 A_g 表示在区域 Ω 中随机取一点，该点落在区域 g 中这一事件，其概率为：$P\left(A_g\right) = \dfrac{m(g)}{m(\Omega)}$.



已学知识点

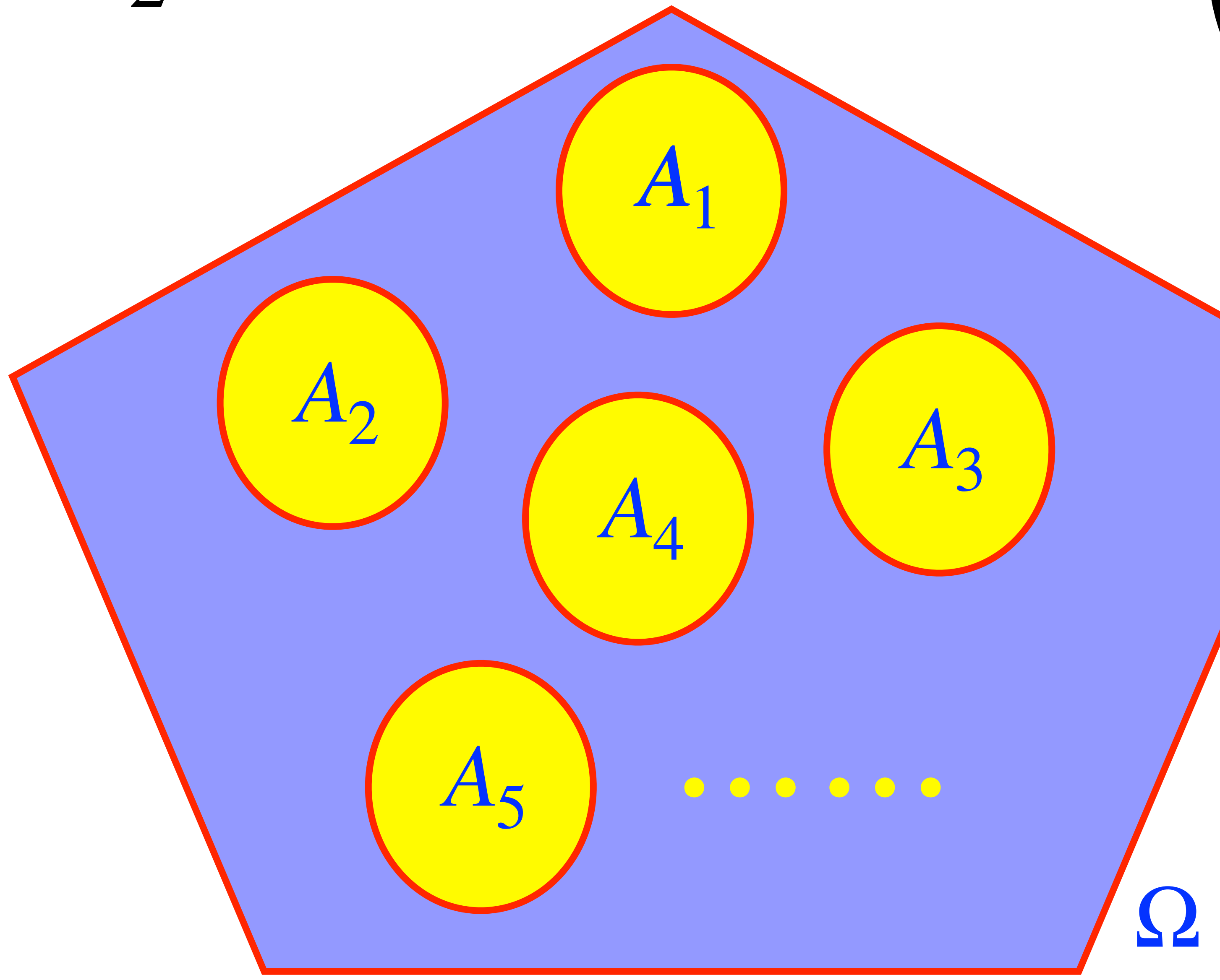
第 1 章 事件与概率

- 几何概率的性质

① 非负性：对任一事件 A，有 $0 \le P(A) \le 1$.

② 规范性: 对必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$.

③ 可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \ldots$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.



已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间

  - σ 域：满足下列条件的集类 $\mathscr{F}$ 称为 σ 域或 σ 代数

    (包含全集)

    ② 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$. (对逆运算封闭)

    ③ 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots,$ 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$. (对可列并运算封闭)

  - 事件域：若 $\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的一个 σ 域，则称 $\mathscr{F}$ 为事件域 (event field). $\mathscr{F}$ 中的元素称为事件 (event)，Ω 称为必然事件 (certain event)，Φ 称为不可能事件 (impossible event).

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间

  - 命题：给定 Ω 的一个非空集类 $\mathscr{G}$，必然存在唯一的一个 Ω 上的 σ 域 $m(\mathscr{G})$，满足

  - 一维 Borel 点集：由一切形为 $[a\ ,\ b)$ 的有界左闭右开区间构成的集类所产生的 σ 域，称为一维 Borel σ 域，记为 $\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_1$ 中的集合称为一维 Borel 点集.

    实际上，$\mathscr{B}_1$ 中包含一切开区间、闭区间、单个实数、可列个实数，及由它们经可列次并、交运算而得到的集合. 这是一个相当大的集合，足以将实际问题研究中的点集都包括在内.

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间

  - 概率空间：设 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为 Ω 上的事件域，称定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 $P(\cdot)$ 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率测度，如果它满足

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

$\forall A \in \mathscr{F}$，我们称函数值 $P(A)$ 为事件 A 的概率. 称三元组 $\left(\Omega, \mathscr{F}, P\right)$ 为概率空间.

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间
  - 概率测度的性质：

    - 若 $A \subset B$，则 $P(A) \leq P(B)$
    - $\forall A \subset \Omega$，有 $0 \leq P(A) \leq 1$

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间
  - 概率测度的性质：
    - Boolean 不等式：$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
    - Bonferroni 不等式：$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) - \sum_{\substack{i<j \\ i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n}} P\left(A_i A_j\right) + \sum_{\substack{i<j<k \\ i,\, j,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n}} P\left(A_i A_j A_k\right) - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间

  - 概率的可列可加性与连续性：

  - 定义：若 $S_n \in \mathscr{F}$ ，$n = 1, 2, \ldots$ 且 $S_n \subset S_{n+1}$，则 S_n 是 $\mathscr{F}$ 中的一个单调不减的集序列.

    若 $S_n \in \mathscr{F}$ ，$n = 1, 2, \ldots$ 且 $S_n \supset S_{n+1}$，则 S_n 是 $\mathscr{F}$ 中的一个单调不增的集序列.

  - 定义：对于 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 $P(\cdot)$，若它对 $\mathscr{F}$ 中任何一个单调不减的集序列$\{S_n\}$ 均有

    $$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)$$ 成立，则称 $P(\cdot)$ 是下连续的.

    对于 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 $P(\cdot)$，若它对 $\mathscr{F}$ 中任何一个单调不增的集序列$\{S_n\}$ 均有

    $$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)$$ 成立，则称 $P(\cdot)$ 是上连续的.

已学知识点

第 1 章 事件与概率

- 概率空间
  - 概率的可列可加性与连续性：
  - 定理：若 P 为 $\mathscr{F}$ 上满足 $P(\Omega) = 1$ 的非负集合函数，则它具有可列可加性的充要条件为：
  - 推论 1：概率是下连续的.
  - 推论 2：概率是上连续的.
  - 推论 3：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$.

第 2 章 条件概率与统计独立性

2.1 条件概率，全概率公式与 Bayes 公式

2.2 事件独立性

2.3 Bernoulli 试验与直线上的随机游动

2.4 二项分布与 Poisson 分布

2.1 条件概率，全概率公式与 Bayes 公式

一、条件概率

- **条件概率的直观定义**

某个事件发生的可能性大小经常会受到另一相关事件发生与否的影响. 若在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率为 p，则称 p 为在已知 B 发生的条件下 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)$.

- **问题的提出**

① 掷一枚均匀的骰子，A 表示掷出 2 点向上，B 表示掷出的是偶数点向上，则

$$P(A)=\frac{1}{6},\quad P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

一、条件概率

- 条件概率的直观定义

某个事件发生的可能性大小经常会受到另一相关事件发生与否的影响. 若在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率为 p，则称 p 为在已知 B 发生的条件下 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)$.

- 问题的提出

$$\Omega=\{(男,男), (男,女), (女,男), (女,女)\}$$

② 假定生男生女等可能. 若已知某家庭有两个孩子，求该家庭有一个男孩、一个女孩 (A) 的概率；若已知该家庭至少有一个女孩 (B)，求该家庭有一个男孩、一个女孩的条件概率.

$$A=\{(男,女), (女,男)\} \qquad P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$B=\{(男,女), (女,男), (女,女)\} \qquad P(A|B)=\frac{2}{3}$$

一、条件概率

- 条件概率的概念

  - 定义：设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个概率空间，$B \in \mathscr{F}$ 且 $P(B) > 0$，则对任意 $A \in \mathscr{F}$，记

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

    并称 $P(A \mid B)$ 为已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的条件概率 (conditional probability).

  - 以后，若出现条件概率 $P(A \mid B)$ 时，都假定 $P(B) > 0$.

一、条件概率

- 例：体检发现，某地区自然人群中，每 10 万人内平均有 40 人患原发性肝癌，有 34 人甲胎球蛋白含量高，有 32 人患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白含量高. 现从这一地区随机抽查一人，发现其甲胎球蛋白量高，求其患原发性肝癌的概率有多大？若在这个人群中，已知一人患原发性肝癌，求该人甲胎球蛋白含量高的概率？

$$\left.\begin{array}{l} A = \text{患原发性肝癌} \\ B = \text{甲胎球蛋白含量高} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{欲计算} \quad P(A\,|\,B)\,,\, P(B\,|\,A)$$

$$\text{已知} \quad \left\{\begin{array}{l} P(A) = \dfrac{40}{100000} = 0.0004 \\ P(B) = \dfrac{34}{100000} = 0.00034 \\ P(AB) = \dfrac{32}{100000} = 0.00032 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A\,|\,B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.00032}{0.00034} = 0.9412 \\ P(B\,|\,A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.00032}{0.0004} = 0.8 \end{array}\right.$$

一、条件概率

- 条件概率也是概率：条件概率 $P(A\,|\,B)$ 满足概率的三条公理，以及其它一切性质. 例如

① $P(A\,|\,B) \geq 0$

② $P(\Omega\,|\,B) = 1$

A_i 两两互不相容

③ $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \,\middle|\, B\right)$$

④ $$P\left(\overline{A} \,\middle|\, B\right) = 1 - P\left(A \,\middle|\, B\right)$$

⑤ $$P\left(A \cup B \,\middle|\, C\right) = P\left(A \,\middle|\, C\right) + P\left(B \,\middle|\, C\right) - P\left(AB \,\middle|\, C\right)$$

一、条件概率

- **注意：**

$$P\left(\Omega|B\right) = 1 \ , \qquad P\left(B|\Omega\right) \neq 1$$

$$P\left(A|\Omega\right) = P(A) \ , \qquad P\left(A|A\right) = 1$$

$$P\left(A\left|\overline{B}\right.\right) \cancel{=} P\left(\overline{A}\right| B\left.\right) \ , \qquad P\left(A\left|\overline{B}\right.\right) \cancel{=} 1 - P\left(A\right| B\left.\right)$$

一般总有 $P(A\,|\,B) \geq P(AB)$ 成立. 但 $P(A\,|\,B)$ 与 $P(A)$ 不可比.

- **条件概率的三大公式**

  ① 乘法公式

  ② 全概率公式

  ③ Bayes 公式

二、乘法公式

① 若 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)\cdot P(A\,|\,B)$.

若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)$.

② 若 $P\left(A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)>0$，则

$$P\left(A_1A_2\cdots A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\,\middle|\,A_1\right)\cdot P\left(A_3\,\middle|\,A_1A_2\right)\cdot\cdots\cdot P\left(A_n\,\middle|\,A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$

二、乘法公式

- 乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.
- 例：一批零件共有 100 个，其中有 10 个不合格品. 从中一个一个不放回地取出，求第三次才取出不合格品的概率.

$A_i=$ 第 i 次取出的是不合格品，$B_i=$ 第 i 次取出的是合格品，$(i=1,2,\ \ldots)$

$$P\left(B_1B_2A_3\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(B_2\left|B_1\right.\right)\cdot P\left(A_3\left|B_1B_2\right.\right)$$

$$=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}$$

$$=0.0825603$$

二、乘法公式

- 乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.
- 例：(Polya 坛子模型) 坛子中有 b 只黑球及 r 只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与取出球同色的球 c 只，再取第二次，这样下去共取了 n 次，问前面的 n_1 次出现黑球，后面的 $n_2 = n - n_1$ 次出现红球的概率是多少?

$A_i =$ 第 i 次取出黑球，$i = 1, 2, \ldots, n$

$\Longrightarrow$ 欲计算 $P\left(A_1A_2\cdots A_{n_1}\,\overline{A}_{n_1+1}\overline{A}_{n_1+2}\cdots\overline{A}_n\right)$ 乘法公式

$$= P(A_1)\cdot P\left(A_2\left|A_1\right.\right)\cdot P\left(A_3\left|A_1A_2\right.\right)\cdots P\left(A_{n_1}\left|A_1A_2\cdots A_{n_1-1}\right.\right)\cdot$$

$$P\left(\overline{A}_{n_1+1}\left|A_1A_2\cdots A_{n_1}\right.\right)\cdot P\left(\overline{A}_{n_1+2}\left|A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A}_{n_1+1}\right.\right)\cdot\cdots\cdot P\left(\overline{A}_n\left|A_1A_2\cdots A_{n_1}\overline{A}_{n_1+1}\cdots\overline{A}_{n-1}\right.\right)$$

$$P(A_1) = \frac{b}{b+r},\ P\left(A_2\left|A_1\right.\right) = \frac{b+c}{b+r+c},\ P\left(A_3\left|A_1A_2\right.\right) = \frac{b+2c}{b+r+2c},\cdots\cdots,\ P\left(A_{n_1}\left|A_1A_2\cdots A_{n_1-1}\right.\right) = \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}$$

二、乘法公式

- 乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.
- 例：(Polya 坛子模型) 坛子中有 b 只黑球及 r 只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与取出球同色的球 c 只，再取第二次，这样下去共取了 n 次，问前面的 n_1 次出现黑球，后面的 $n_2 = n - n_1$ 次出现红球的概率是多少?

$A_i =$ 第 i 次取出黑球 , $i = 1, 2, \ldots, n$

$\Longrightarrow$ 欲计算 $P\left(A_1A_2\cdots A_{n_1}\,\bar{A}_{n_1+1}\bar{A}_{n_1+2}\cdots\bar{A}_n\right)$ 乘法公式

$$= P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{n_1}|A_1A_2\cdots A_{n_1-1})\cdot$$

$$P(\bar{A}_{n_1+1}|A_1A_2\cdots A_{n_1})\cdot P(\bar{A}_{n_1+2}|A_1A_2\cdots A_{n_1}\bar{A}_{n_1+1})\cdot\cdots\cdot P(\bar{A}_n|A_1A_2\cdots A_{n_1}\bar{A}_{n_1+1}\cdots\bar{A}_{n-1})$$

$$P(\bar{A}_{n_1+1}|A_1A_2\cdots A_{n_1}) = \frac{r}{b+r+n_1c},\ P(\bar{A}_{n_1+2}|A_1A_2\cdots A_{n_1}\bar{A}_{n_1+1}) = \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c},\ \ldots\ldots,\ P(\bar{A}_n|A_1A_2\cdots A_{n_1}\bar{A}_{n_1+1}\cdots\bar{A}_{n-1}) = \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$$

二、乘法公式

- 乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.

- 例：(Polya 坛子模型) 坛子中有 b 只黑球及 r 只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与取出球同色的球 c 只，再取第二次，这样下去共取了 n 次，问前面的 n_1 次出现黑球，后面的 $n_2 = n - n_1$ 次出现红球的概率是多少?

$$A_i = \text{第 } i \text{ 次取出黑球}, \ i = 1, 2, \ \ldots, n$$

乘法公式

$$\Longrightarrow \quad \text{欲计算} \quad P\left(A_1 A_2 \cdots A_{n_1} \overline{A}_{n_1+1} \overline{A}_{n_1+2} \cdots \overline{A}_n\right)$$

$$= \frac{b}{b+r} \cdot \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b+2c}{b+r+2c} \cdots\cdots \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c} \cdot \frac{r}{b+r+n_1 c} \cdot \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c} \cdots\cdots \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(b+kc) \cdot \prod_{k=0}^{n_2-1}(r+kc)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)}$$

二、乘法公式

- 乘法公式主要用于计算若干个事件同时发生的概率.
- 例：(Polya 坛子模型) 坛子中有 b 只黑球及 r 只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与取出球同色的球 c 只，再取第二次，这样下去共取了 n 次，问前面的 n_1 次出现黑球，后面的 $n_2 = n - n_1$ 次出现红球的概率是多少?

$$A_i = \text{第 } i \text{ 次取出黑球},\ i = 1, 2, \ \ldots, n$$

$$\Longrightarrow \quad \text{计算得} \quad P\left(A_1A_2\cdots A_{n_1}\ \overline{A}_{n_1+1}\overline{A}_{n_1+2}\cdots\overline{A}_n\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(b+kc)\cdot\prod_{k=0}^{n_2-1}(r+kc)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)}$$

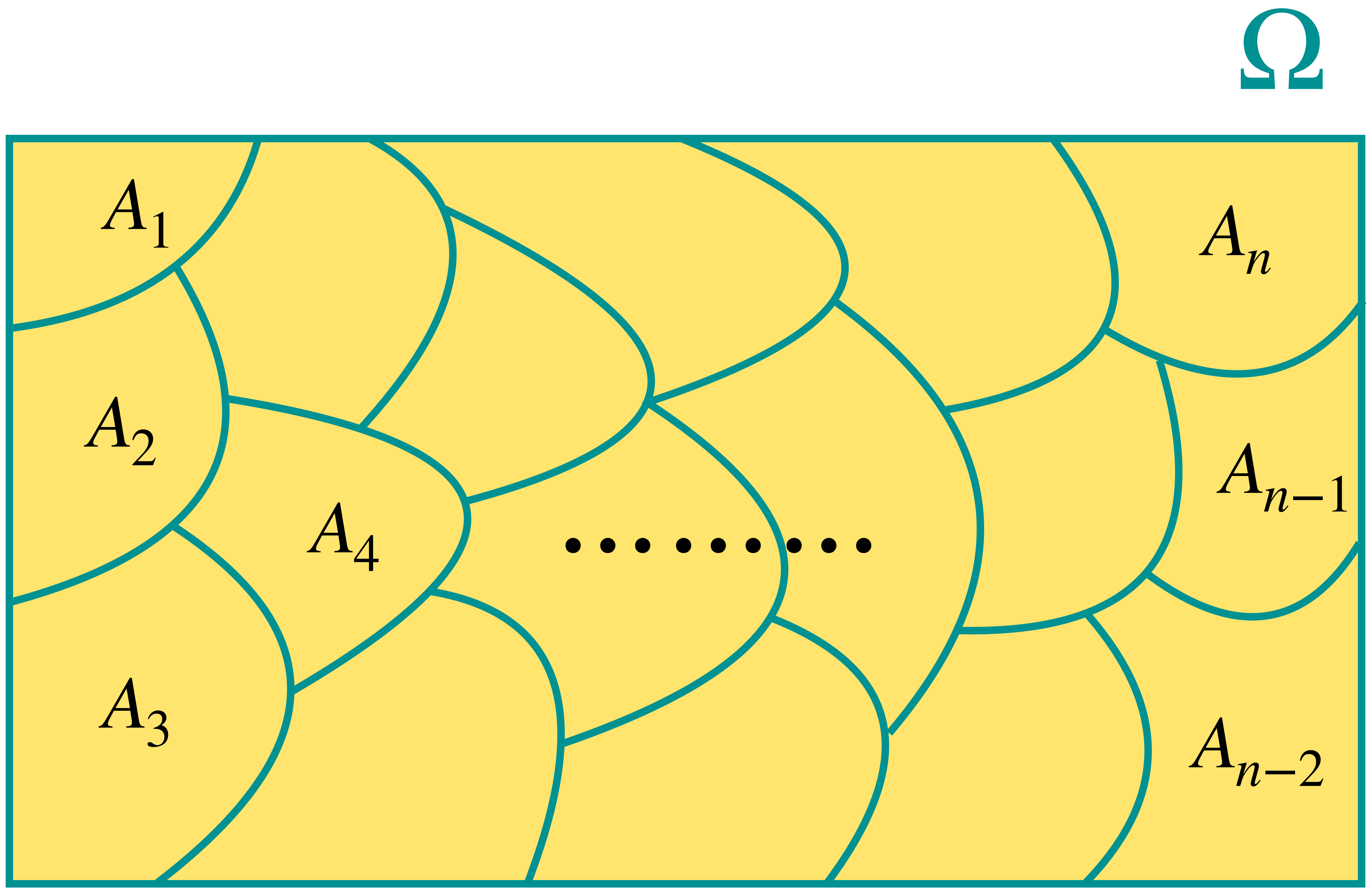
- 注意：这个答案只与黑球及红球出现的次数有关，而与出现的顺序无关.
- 该模型曾被 Polya 用来作为描述传染病的数学模型. 这是一个很一般的摸球模型，特别取 $c = 0$ 则是有放回摸球，$c = -1$ 则是不放回摸球.

三、全概率公式

- 完备事件组 (样本空间 Ω 的一个分割)

① $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i \neq j\ ,\ i, j = 1, 2, \ \ldots.$

② $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega\ .$



三、全概率公式

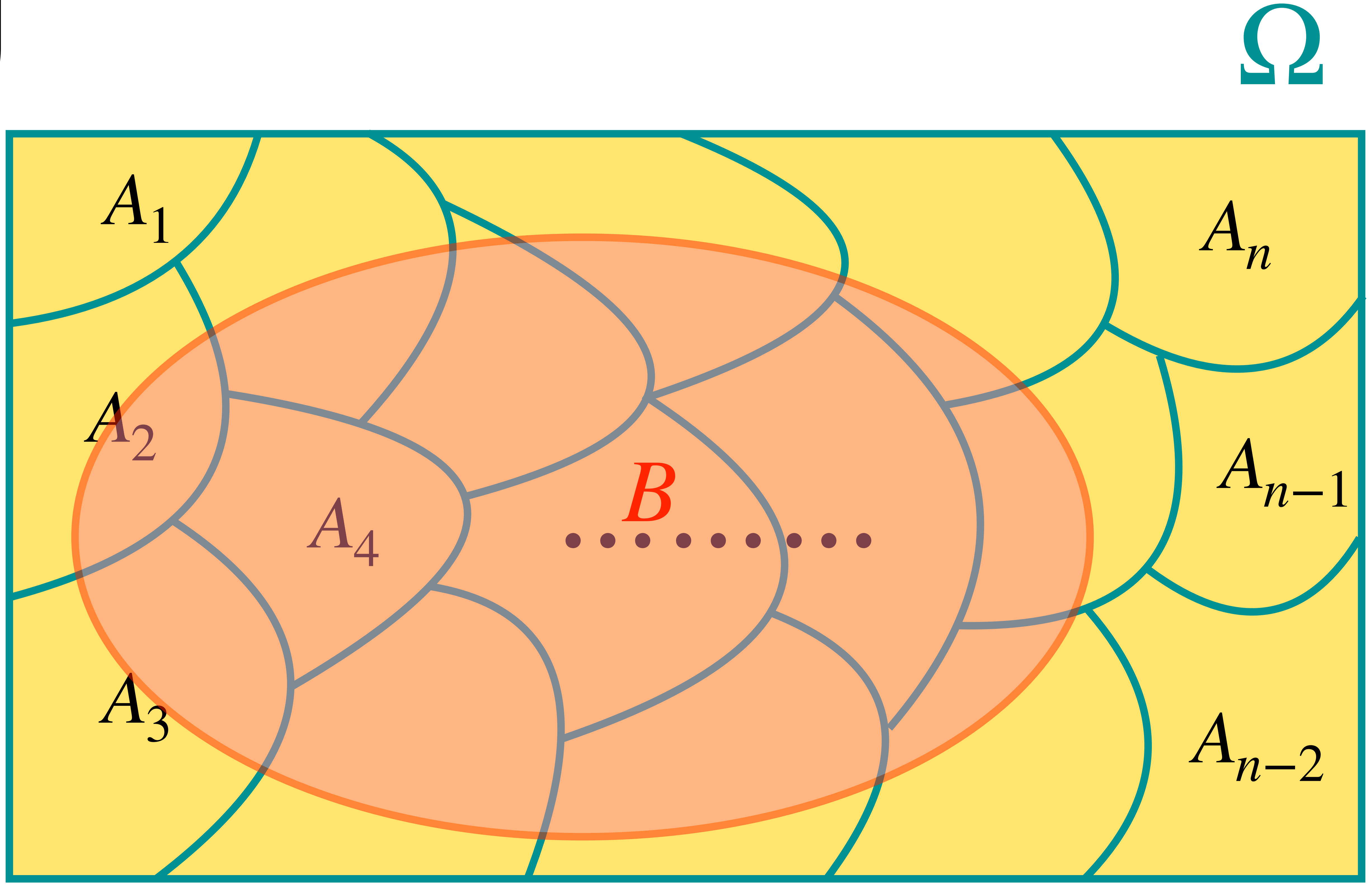
- 全概率公式：若事件 A_1 ，A_2 ，… 是样本空间 Ω 的一组分割，且 $P\left(A_i\right) > 0$，则对任意事件 B，我们有

$$P(B) = P(B\cap\Omega) = P\left(B\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B\cap A_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}P\left(B\cap A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}P\left(A_i\right)\cdot P\left(B\left|A_i\right.\right)$$



三、全概率公式

- 全概率公式：若事件 A_1，A_2，… 是样本空间 Ω 的一组分割，且 $P(A_i) > 0$，则对任意事件 B，我们有
$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$
  - 全概率公式用于求复杂事件的概率. 公式中的 B 是较复杂事件，A_i 是引起 B 发生的各种原因、情况或途径.
  - 使用全概率公式的关键在于寻找另一组事件来分割样本空间 Ω .
  - 样本空间 Ω 也可由有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 分割，此时有 $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$.
  - 全概率公式的最简单形式：$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \mid \bar{A})$.

三、全概率公式

- 例：雨伞丢失了，落在图书馆的概率为 50%，这种情况下找回的概率为 0.80；落在教室的概率为 30%，这种情况下找回的概率为 0.60；落在商场的概率为 20%，这种情况下找回的概率为 0.05. 求找回雨伞的概率.

记 $\begin{cases} A_1 : & \text{雨伞落在图书馆} \\ A_2 : & \text{雨伞落在教室} \\ A_3 : & \text{雨伞落在商场} \\ B : & \text{找回雨伞} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 已知 $\begin{cases} P(A_1) = 0.5 \;,\; P(B|A_1) = 0.8 \\ P(A_2) = 0.3 \;,\; P(B|A_2) = 0.6 \\ P(A_3) = 0.2 \;,\; P(B|A_3) = 0.05 \end{cases}$

全概率公式 $\Longrightarrow$ $P(B) = P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

$$= 0.5\times 0.8 + 0.3\times 0.6 + 0.2\times 0.05$$

$$= 0.59$$

三、全概率公式

- 例：播种用的小麦种子中混有一等、二等、三等、四等四个等级的种子，分别占比 95.5%、2%、1.5% 和 1%，用一等、二等、三等、四等种子长出的麦穗含 50 颗以上麦粒的概率分别为 0.5、0.15、0.10 和 0.05. 求这批种子所结的麦穗含有 50 颗以上麦粒的概率.

记 $\begin{cases} A_i : \text{这批种子中任选一颗是 } i \text{ 等}, i = 1, 2, 3, 4 \\ B : \text{种子所结麦穗含有 50 颗以上麦粒} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 已知 $\begin{cases} P(A_1) = 0.955 \ , \ P(B|A_1) = 0.5 \\ P(A_2) = 0.02 \ , \ P(B|A_2) = 0.15 \\ P(A_3) = 0.015 \ , \ P(B|A_3) = 0.1 \\ P(A_4) = 0.01 \ , \ P(B|A_3) = 0.05 \end{cases}$

全概率公式 $\Longrightarrow$ $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + P(A_4) \cdot P(B|A_4)$

$$= 0.955 \times 0.5 + 0.02 \times 0.15 + 0.015 \times 0.1 + 0.01 \times 0.05 = 0.4825$$

四、贝叶斯 (Bayes) 公式

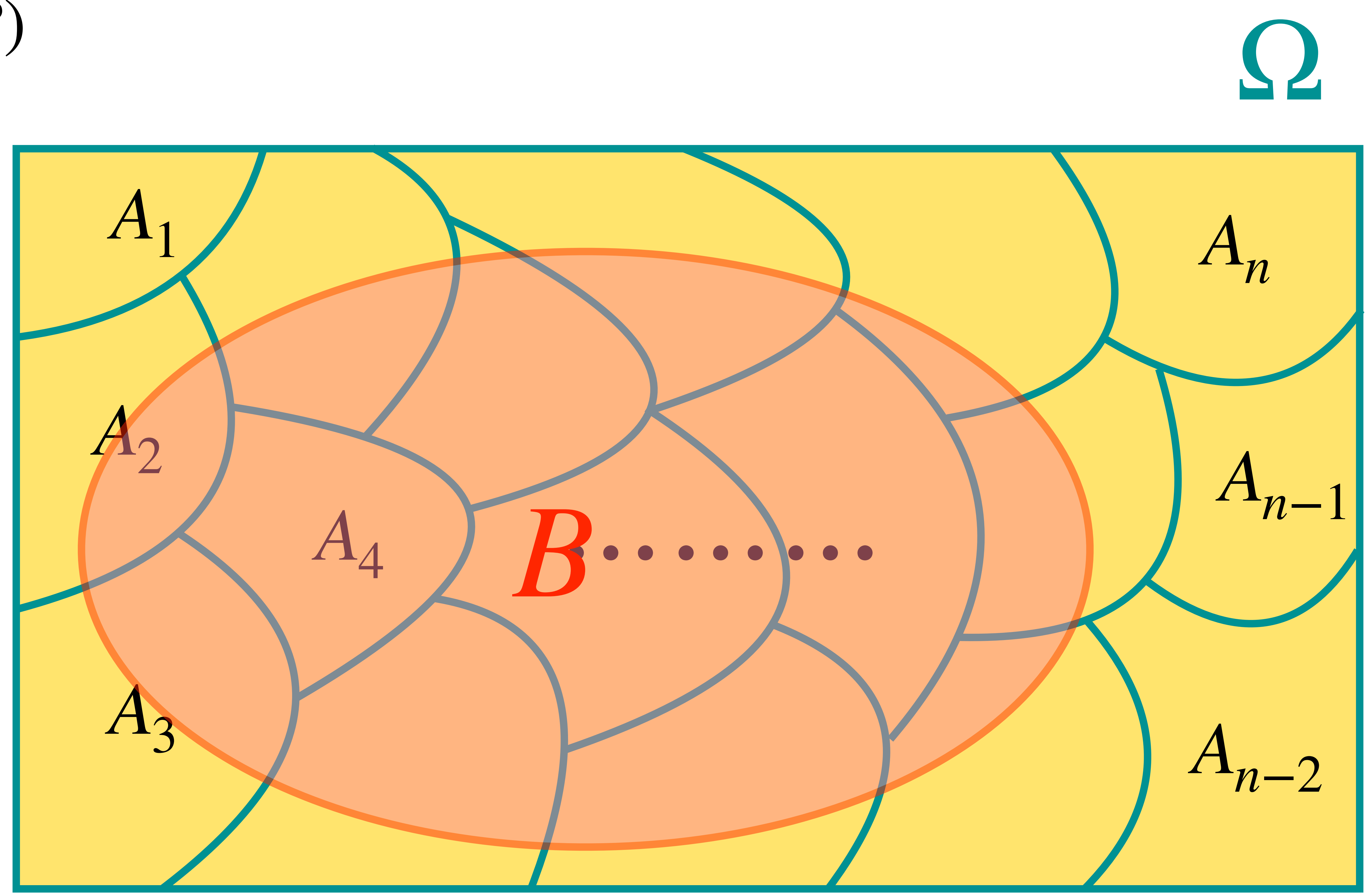
- Bayes 公式：若事件 A_1，A_2，… 是样本空间 Ω 的一组分割，且 $P(B)>0$，则

乘法公式

$$P\left(A_k \middle| B\right)=\frac{P\left(A_k B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B \middle| A_k\right)}{P(B)}$$

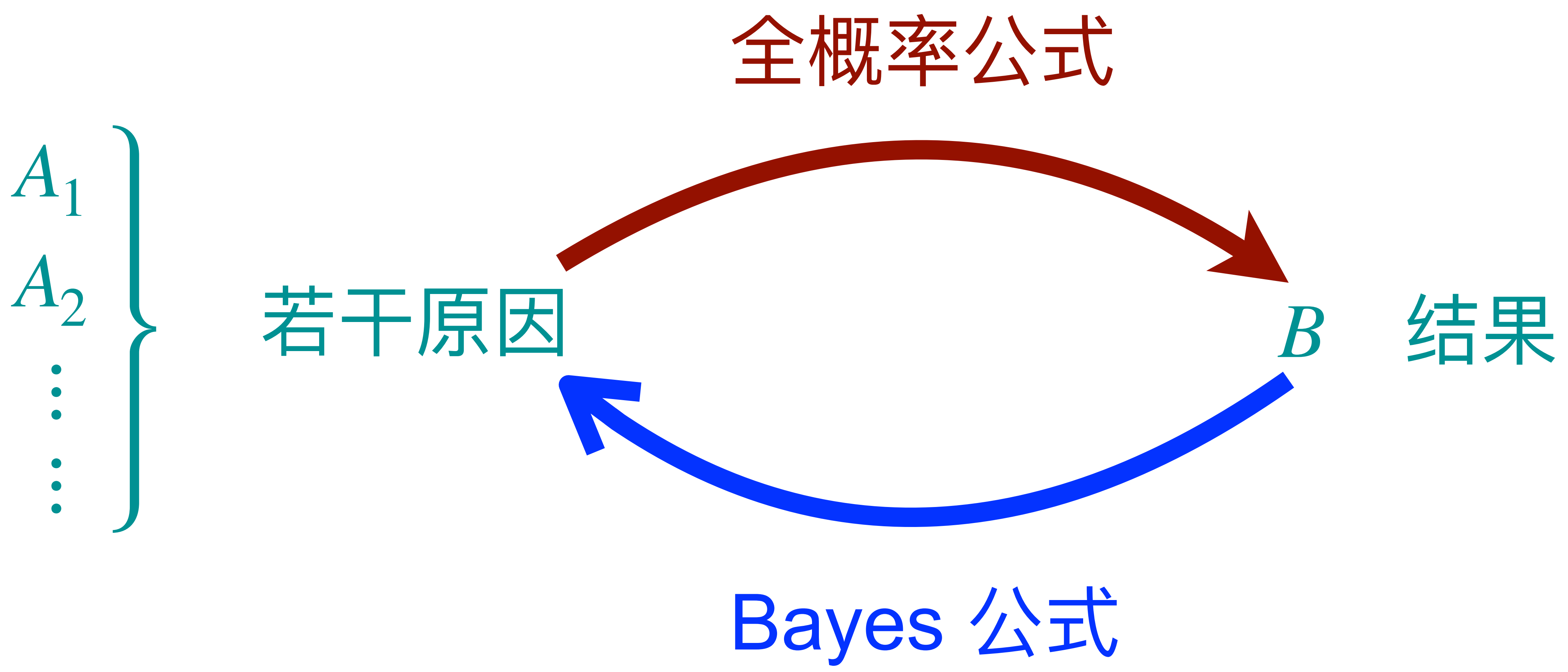
$$=\frac{P\left(A_k\right)\cdot P\left(B \middle| A_k\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)\cdot P\left(B \middle| A_i\right)}$$

全概率公式



四、贝叶斯 (Bayes) 公式

- 乘法公式是计算若干个事件同时发生的概率.
- 全概率公式是求结果的概率.
- Bayes 公式是已知结果求发生原因的概率.



四、贝叶斯 (Bayes) 公式

- Bayes 公式是英国统计学家 Bayes 于 1763 年首先提出的，是先验概率与后验概率的转化工具.
- 经过多年的发展和完善，Bayes 公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经形成为概率统计中的贝叶斯统计.
- Bayes 公式的意义

① 当不知道某信息 (事件B) 时，我们对各事件 A_1 , A_2 , … 发生的可能性大小的认识为：

$\underbrace{P(A_1),\ P(A_2),\ \ldots}_{\text{先验概率}}$.

② 当知道某信息 (事件 B) 已经发生时，我们对各事件 A_1 , A_2 , … 发生的可能性大小要重新认识：$\underbrace{P\left(A_1 \middle| B\right),\ P\left(A_2 \middle| B\right),\ \ldots}_{\text{后验概率}}$.

四、贝叶斯 (Bayes) 公式

- 例：用血清甲胎球蛋白法诊断肝癌：$P\left(\text{阳性}\middle|\text{患者}\right)=0.95$，$P\left(\text{阴性}\middle|\text{健康者}\right)=0.90$；已知自然人群中，$P(\text{患者})=0.0004$. 现随机抽查一人，用血清甲胎球蛋白法诊断结果为阳性，求其真正患肝癌的概率有多大?

记 $\begin{cases} A: & \text{血清甲胎球蛋白法诊断结果为阳性} \\ C: & \text{某人患有肝癌} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ 已知 $\begin{cases} P(C)=0.0004 \\ P\left(A\middle|C\right)=0.95 \\ P\left(\bar{A}\middle|\bar{C}\right)=0.90 \end{cases}$

Bayes 公式 $\Longrightarrow$

$$P\left(C\middle|A\right)=\frac{P(C)\cdot P\left(A\middle|C\right)}{P(C)\cdot P\left(A\middle|C\right)+P(\bar{C})\cdot P\left(A\middle|\bar{C}\right)}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}=0.0038$$

Why ?

四、贝叶斯 (Bayes) 公式

过去的经验或知识		新信息		修正后的认识
$P(C)=0.0004$	+	A	$\Longrightarrow$	$P(C\mid A)=0.0038$
(先验概率)		(诊断阳性)		(后验概率)

- 后验概率小的关键原因在于先验概率 (人群的患病率) 非常小.
- 如果先验概率 (人群的患病率) 取作 $P(C)=0.01$，其它保持不变，则后验概率为

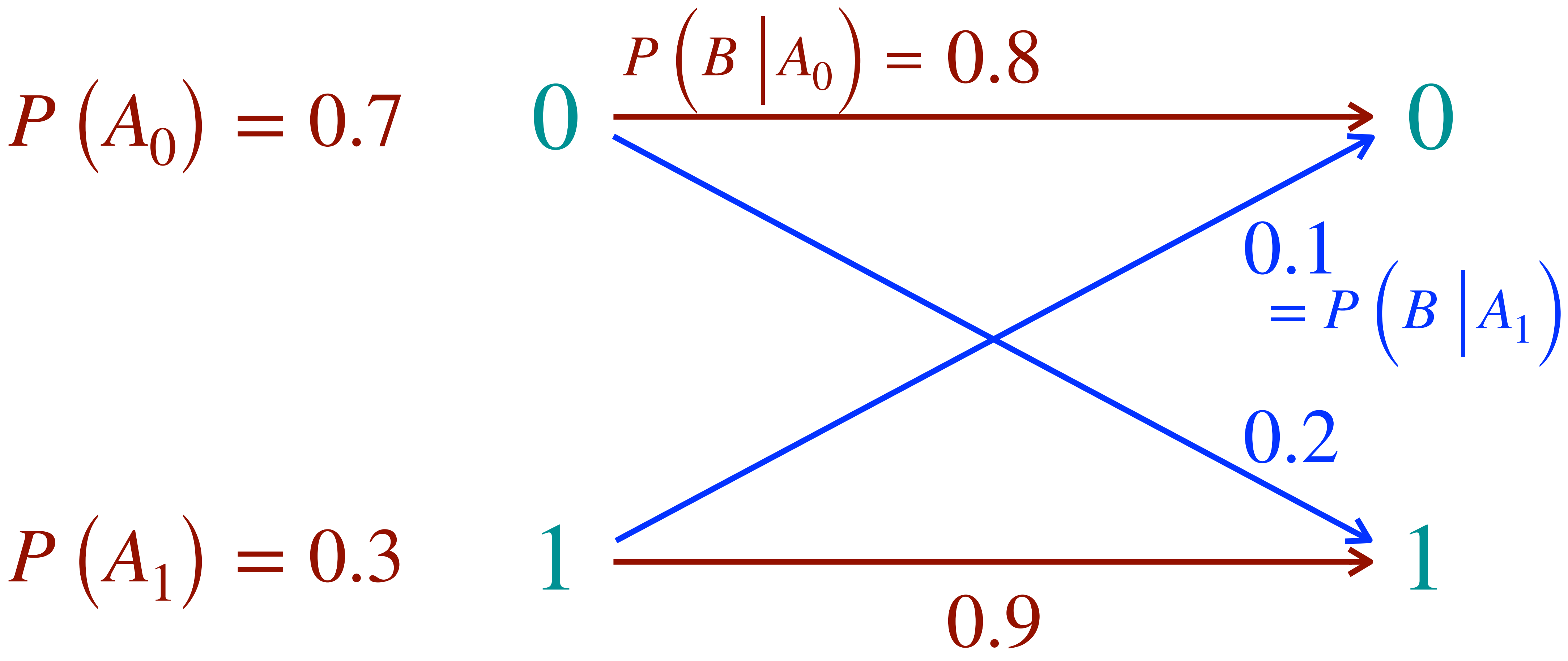
$$P(C\mid A)=\frac{P(C)\cdot P(A\mid C)}{P(C)\cdot P(A\mid C)+P(\overline{C})\cdot P(A\mid \overline{C})}=\frac{0.01\times 0.95}{0.01\times 0.95+0.99\times 0.1}=0.0876$$

- 如果先验概率 (人群的患病率) 取作 $P(C)=0.5$，其它仍保持不变，则后验概率为

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)\cdot P(A\mid C)}{P(C)\cdot P(A\mid C)+P(\overline{C})\cdot P(A\mid \overline{C})}=\frac{0.5\times 0.95}{0.5\times 0.95+0.5\times 0.1}=0.9048$$

四、贝叶斯 (Bayes) 公式

- 例：发报机以 0.7 和 0.3 的概率发出信号 0 和 1，由于随机干扰的影响，当发出信号 0 时，接收机不一定收到 0，而是以概率 0.8 和 0.2 收到信号 0 和 1；同样，当发报机发出信号 1 时，接收机以概率 0.9 和 0.1 收到信号 1 和 0. 求当接收机收到信号 0 时，发报机发出信号是 0 的概率.



记 $\begin{cases} A_0 : & \text{发报机发出 0} \\ A_1 : & \text{发报机发出 1} \\ B : & \text{接收机接到信号 0} \end{cases}$

Bayes 公式 $\Longrightarrow$ $$P(A_0|B)=\frac{P(A_0)\cdot P(B|A_0)}{P(A_0)\cdot P(B|A_0)+P(A_1)\cdot P(B|A_1)}=\frac{0.7\times 0.8}{0.7\times 0.8+0.3\times 0.1}=0.9492$$

四、贝叶斯 (Bayes) 公式

- 例：(Bayes 决策) 为了判断一个字母是 C 还是 O，通常采用先提取它的某一个特征 X，然后再根据这个特征作出判决，此时 Bayes 决策是常用的方法之一.

记 $\begin{cases} A_1 : \text{被检验字母为 C} \\ A_2 : \text{被检验字母为 O} \end{cases}$　　指定先验概率 $\begin{cases} P(A_1) = \frac{1}{2} \\ P(A_2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ (无先验信息可用时一般取)

通过试验确定 $\begin{cases} P(X|A_1) \\ P(X|A_2) \end{cases}$　　Bayes 公式 $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} P(A_1|X) = \dfrac{P(A_1)\cdot P(X|A_1)}{P(A_1)\cdot P(X|A_1) + P(A_2)\cdot P(X|A_2)} \\[2ex] P(A_2|X) = \dfrac{P(A_2)\cdot P(X|A_2)}{P(A_1)\cdot P(X|A_1) + P(A_2)\cdot P(X|A_2)} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 若 $P(A_1|X) > P(A_2|X)$, 则作出决策：具有特征 X 的字母是 C

- 该方法在模式识别这一新兴学科中有重要应用，当然，这里是大为简化了的模型.