

第 1 章 事件与概率

已学知识点

- 随机现象与统计规律

- ▶ 随机试验：可重复性，可观察性，不确定性.

- 样本空间、随机事件

- ▶ 样本空间与样本点

- ▶ 随机事件与事件的发生：基本事件，必然事件，不可能事件

- ▶ 事件的关系与运算： \subset ， $=$ ， \cup ， \cap ， $-$ ， $AB = \Phi$ ， \bar{A} ，交换律、结合律、分配律、对偶律

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
\bar{A}	余集	A 不发生

已学知识点

● 古典概型

- ▶ 频率的定义: $F_n(A) = \frac{n_A}{n}$, 随机波动, 稳定性(统计规律)
- ▶ 频率的性质: 非负有界性, 规范性, 有限可加性
- ▶ 概率的描述性定义: 频率的极限, 优点 — 直观、易于理解, 缺点 — 用现象定义本质
- ▶ 古典概型 (等可能概率模型): (1) 样本空间样本点有限; (2) 每个样本点等可能出现.
- ▶ 古典概型概率的计算公式: $P(A) = \frac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含的样本点总数}}$.

已学知识点

- 组合数学相关知识

- ▶ **加法原理:** 做一件事情有 A 或 B 两类不同方式, A 有 n 种不同方法, B 有 m 种不同方法, 则完成这件事情共有 $n + m$ 种不同的方法.
- ▶ **乘法原理:** 做一件事情必须经过 A 与 B 两个不同步骤, A 有 n 种不同方法, B 有 m 种不同方法, 则完成这件事情一共有 $n \times m$ 种不同方法.

已学知识点

- 组合数学相关知识

- ▶ 基本排列组合公式:

- 不可重复的排列: $A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

- 全排列: $P_n = A_n^n = n!$

- 可以重复的排列: n^r

- 二项式组合: $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (r \leq n).$ $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$

- 多项式组合: $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}.$ $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$

- 可重复组合: $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 非负整数解的个数

已学知识点

- 古典概率的性质:

- ① **非负性**: 对任一事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

- ② **规范性**: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$.

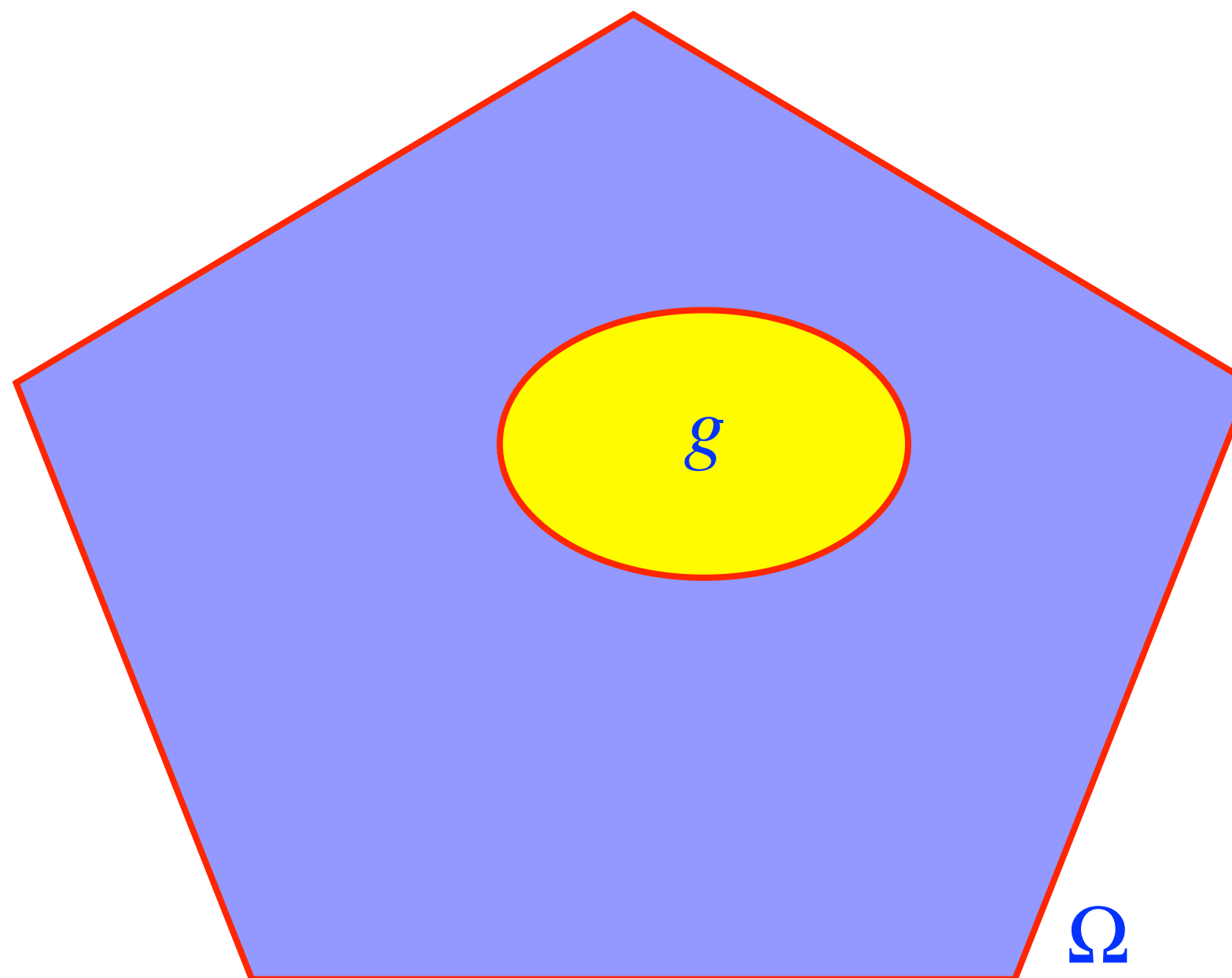
- ③ **有限可加性**: 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则 $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

- **推论**: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

已学知识点

● 几何概型

- ▶ 试验的可能结果是某区域中的一个点 (一维、二维、 n 维), 样本空间、事件所含样本点均无限个.
- ▶ 等可能性: 落在某区域 g 的概率与区域的几何度量 $m(g)$ (长度、面积、体积等) 成正比.
- ▶ 若 A_g 表示在区域 Ω 中随机取一点, 该点落在区域 g 中这一事件, 其概率为: $P(A_g) = \frac{m(g)}{m(\Omega)}$.

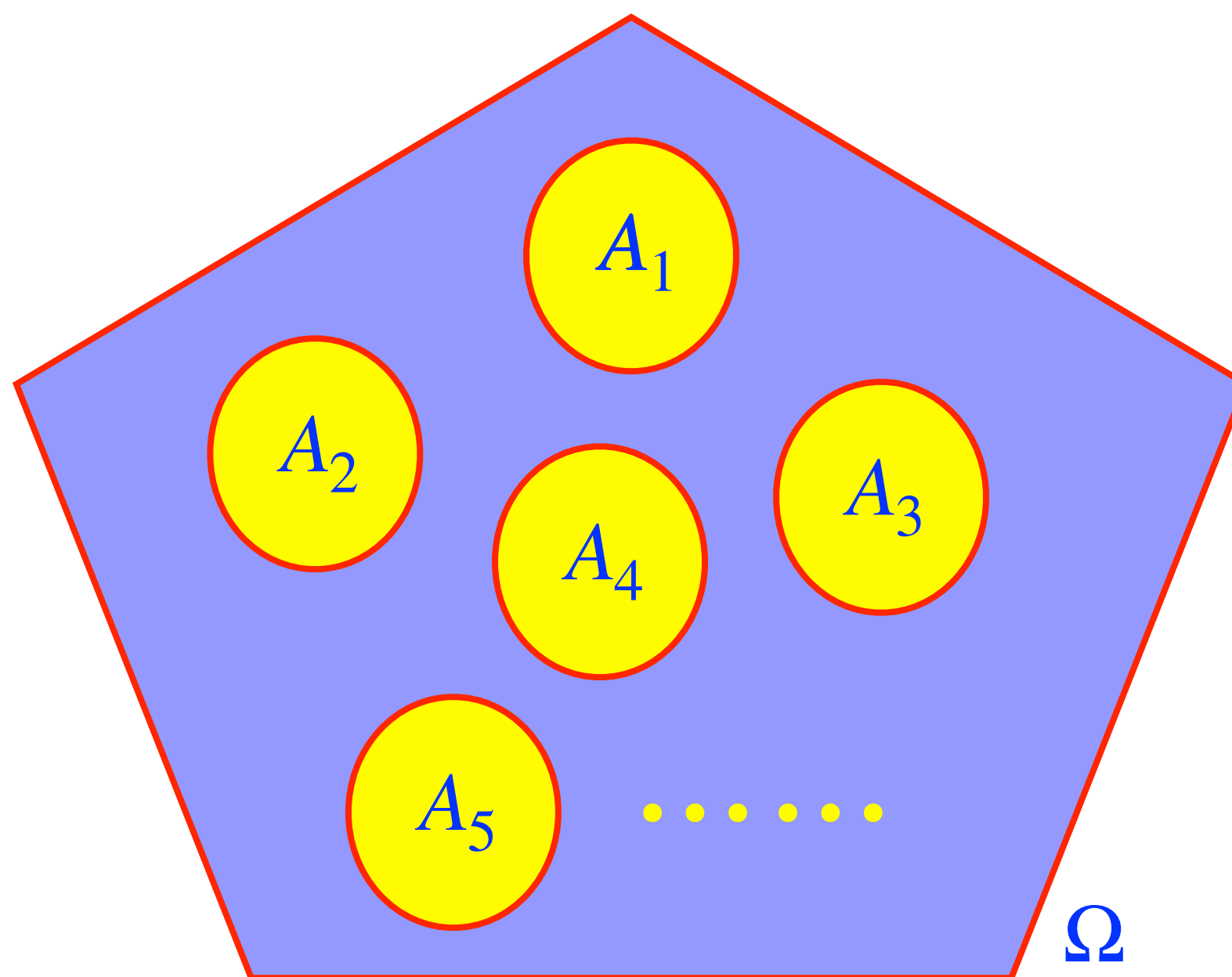


● 几何概率的性质

① 非负性: 对任一事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

② 规范性: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$.

③ 可列可加性: 若事件 A_1, A_2, \dots 两两互不相容, 则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.



1.5 概率空间

- 采用等可能性来定义概率，其适用范围有限. 对一般随机现象该如何明确定义概率等基本概念？
- 前苏联数学家 Kolmogorov 于1933年在**概率论基础**一书中，用公理化的方法与集合论的观点成功地解决了这一问题，他在定义概率这一基本概念时，仅指明概率应具有的基本性质，而把具体概率的给定放在一边，这样做的好处是能针对不同的随机试验给定适当的概率.
- Kolmogorov 提出的公理为数很少且极为简单，但在此基础上却建立起了概率论的宏伟大厦.



一、事件域

- **随机试验**: 一个试验 (或观察), 若它的结果预先无法确定, 则称之为随机试验, 简称**试验**.
- **样本空间**: 一个试验的所有可能结果组成的集合, 称为样本空间, 记作 Ω .
- **样本点**: Ω 中的元素称为样本点, 用 ω 表示.
- **事件**: 事件 A 定义为 Ω 的一个子集, 它包含若干样本点. 事件 A 发生当且仅当 A 所包含的样本点中有一个发生. 事件常用大写字母 A, B, C, \dots 等表示.
- **集类**: 由 Ω 中的若干子集构成的集合称为集类, 集类一般用花写字母 $\mathcal{B}, \mathcal{F}, \dots$ 等表示.

一、事件域

● **问题:** 针对哪些事件给出概率?

① 记 \mathcal{F} 为我们所**研究的**所有事件的全体.

② 但 \mathcal{F} 一般不包括所有的事件, 即样本空间 Ω 的一切子集, 因为这将给确定概率带来困难.

③ \mathcal{F} 必须把我们感兴趣的事件都包含进来.

④ 因为事件的积、和、对立等也应为事件, 也应有相应的概率, 所以需要将它们亦包括进来.

⑤ 当然, Ω 和 Φ 必不可少.

一、事件域

- **定义**: (σ 域) 满足下列条件的集类 \mathcal{F} 称为 σ 域或 σ 代数

(包含全集)

② 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$. (对逆运算封闭)

③ 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. (对可列并运算封闭)

- 若 \mathcal{F} 是由样本空间 Ω 的一些子集构成的一个 σ 域, 则称 \mathcal{F} 为**事件域** (event field). \mathcal{F} 中的元素称为**事件** (event), Ω 称为**必然事件** (certain event), \emptyset 称为**不可能事件** (impossible event).
- 根据定义, 很显然必然事件和不可能事件都在事件域中, 事件的有限及可列交、并也都在事件域中.

一、事件域

- 例： $\mathcal{F} = \{\Phi, \Omega\}$ 是一个 σ 域.
- 例： $\mathcal{F} = \{\Phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ 是一个 σ 域.
- 例：若 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, \mathcal{F} 是由 Ω 的所有子集构成的集合. 这里的 \mathcal{F} 是一个有限集合, 共有 2^n 个元素. \mathcal{F} 是一个 σ 域.

对一般的 Ω , 若 \mathcal{F} 是由 Ω 的所有子集构成的集合, 可以验证, \mathcal{F} 是一个 σ 域.

- 注：事件域可以很简单, 也可以十分复杂, 要根据问题的不同要求来选择适当的事件域.

一、事件域

- **命题**: 给定 Ω 的一个非空集类 \mathcal{G} , 必然存在唯一的一个 Ω 上的 σ 域 $m(\mathcal{G})$, 满足

证明: 设 \mathcal{F} 是由 Ω 的所有子集构成的集类, 则 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. 由于 \mathcal{F} 是一个 σ 域, 说明至少存在 Ω 上的一个包含集类 \mathcal{G} 的 σ 域.

取 $m(\mathcal{G})$ 由 Ω 上所有包含 \mathcal{G} 的 σ 域的交, 则它就是满足上述两个性质的 σ 域.

\mathcal{G} 包含 Ω 的某些子集, 从这些最基本子集出发反复进行最多可列次并、交、逆运算 (Borel 运算), 不断添加子集从而得到所需的 σ 域, 或者把包含这些基本子集的全部 σ 域做交运算.

一、事件域

● Borel 集类

- 用 \mathbb{R}^1 表示实数直线或实数全体，用 \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间 (Euclidean space).
- **一维 Borel 点集**：由一切形为 $[a, b)$ 的有界左闭右开区间构成的集类所产生的 σ 域，称为一维 Borel σ 域，记为 \mathcal{B}_1 ， \mathcal{B}_1 中的集合称为一维 Borel 点集.
- **n 维 Borel 点集**：由一切 n 维矩形产生的 n 维 Borel σ 域.

- 若 x, y 表示任意实数，由于
$$\begin{cases} x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x, x + \frac{1}{n} \right) , & (x, y) = [x, y) - x \\ [x, y] = [x, y) + y , & (x, y] = [x, y) + y - x \end{cases}$$

因此 \mathcal{B}_1 中包含一切开区间、闭区间、单个实数、可列个实数，及由它们经可列次并、交运算而得到的集合. 这是一个相当大的集合，足以将实际问题研究中的点集都包括在内.

一、事件域

- Borel 集类

- 用 \mathbb{R}^1 表示实数直线或实数全体，用 \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间 (Euclidean space).
- **一维 Borel 点集**：由一切形为 $[a, b)$ 的有界左闭右开区间构成的集类所产生的 σ 域，称为一维 Borel σ 域，记为 \mathcal{B}_1 ， \mathcal{B}_1 中的集合称为一维 Borel 点集.
- **n 维 Borel 点集**：由一切 n 维矩形产生的 n 维 Borel σ 域.
- 同样， \mathcal{B}_n 也是一个相当大的集合，足够把实际问题中感兴趣的点集都包括在内.

二、概率的公理化定义

- **定义**：设 Ω 为样本空间， \mathcal{F} 为 Ω 上的事件域，称定义在事件域 \mathcal{F} 上的集合函数 $P(\cdot)$ 为 \mathcal{F} 上的一个**概率测度**，如果它满足

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

$\forall A \in \mathcal{F}$ ，我们称函数值 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**。称三元组 (Ω, \mathcal{F}, P) 为**概率空间**。

二、概率的公理化定义

- 概率测度的其他性质

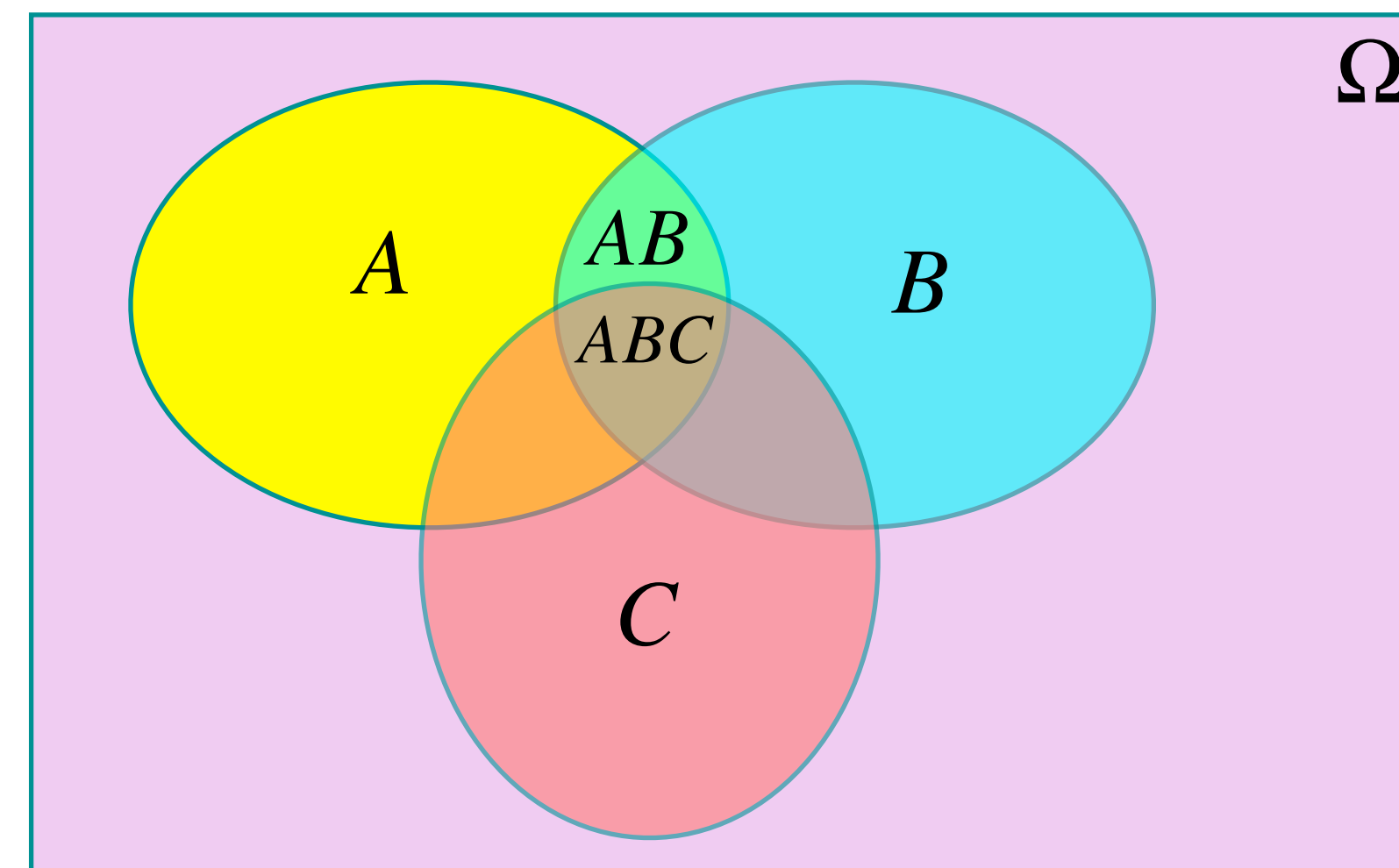
$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

- 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$
- $\forall A \subset \Omega$, 有 $0 \leq P(A) \leq 1$

二、概率的公理化定义

- 概率测度的其他性质

- 布尔 (Boolean) 不等式: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- Bonferroni 不等式: $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{\substack{i < j \\ i, j=1, 2, \dots, n}} P(A_i A_j) + \sum_{\substack{i < j < k \\ i, j, k=1, 2, \dots, n}} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$$

二、概率的公理化定义

- 利用上面性质作概率计算，常能使解题思路清晰，计算便捷.
- **例：**(最大车牌号) 某区域有 N 部卡车，车牌号从 1 到 N ，有一个外地人到该区域去，把遇到的 n 部卡车的车牌号抄下来(可以重复)，以 A 表示抄到的最大号码正好为 k ($1 \leq k \leq N$)，求 A 的概率.

$$A_k = \{\text{记到的最大号码为 } k\} \quad \implies \quad A_k = B_k - B_{k-1}$$
$$B_k = \{\text{记到的最大号码不超过 } k\}$$

$$P(B_k) = \frac{k^n}{N^n} \quad \implies \quad P(A_k) = P(B_k - B_{k-1}) = P(B_k) - P(B_{k-1})$$
$$= \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}$$

二、概率的公理化定义

- 利用上面性质作概率计算，常能使解题思路清晰，计算便捷.
- **例：**(匹配问题) 某人写好 n 封信，又写好 n 只信封，然后在黑暗中把每封信放入一只信封中，试求至少有一封信放对的概率.

$$A_i = \{ \text{第 } i \text{ 封信与信封符合} \}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n, i \neq j, i \neq k, j \neq k$$

$$\dots\dots, \quad P(A_1 A_2 \cdots A_n) = \frac{1}{n!}$$

二、概率的公理化定义

- 利用上面性质作概率计算，常能使解题思路清晰，计算便捷.
- **例：**(匹配问题) 某人写好 n 封信，又写好 n 只信封，然后在黑暗中把每封信放入一只信封中，试求至少有一封信放对的概率.

$$A_i = \{ \text{第 } i \text{ 封信与信封符合} \}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$B = \{ \text{至少有一封信放对} \} \implies B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

利用加法公式的推广

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!} \\
 &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty, P = ?$

三、概率的可列可加性与连续性

- **定义**: 若 $S_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$ 且 $S_n \subset S_{n+1}$, 则 S_n 是 \mathcal{F} 中的一个**单调不减的集序列**.
若 $S_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$ 且 $S_n \supset S_{n+1}$, 则 S_n 是 \mathcal{F} 中的一个**单调不增的集序列**.

- **定义**: 对于 \mathcal{F} 上的集合函数 $P(\cdot)$, 若它对 \mathcal{F} 中任何一个单调不减的集序列 $\{S_n\}$ 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) \text{ 成立, 则称 } P(\cdot) \text{ 是下连续的.}$$

对于 \mathcal{F} 上的集合函数 $P(\cdot)$, 若它对 \mathcal{F} 中任何一个单调不增的集序列 $\{S_n\}$ 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) \text{ 成立, 则称 } P(\cdot) \text{ 是上连续的.}$$

三、概率的可列可加性与连续性

- **定理**: 若 P 为 \mathcal{F} 上满足 $P(\Omega) = 1$ 的非负集合函数, 则它具有**可列可加性**的充要条件为:

证明: 设 A_i 两两互不相容, 欲证明

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \\ P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n) \end{array} \right.$$

有限可加性

$S_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 单调不减

充分性: 有限可加性保证了 $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

下连续保证了 $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n)$

三、概率的可列可加性与连续性

- **定理**: 若 P 为 \mathcal{F} 上满足 $P(\Omega) = 1$ 的非负集合函数, 则它具有**可列可加性**的充要条件为:

证明: 设 A_i 两两互不相容, 欲证明

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \iff$$

$$\begin{cases} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \\ P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n) \end{cases}$$

有限可加性

$S_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 单调不减

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [P(S_n) - P(S_0)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(S_i) - P(S_{i-1})]$$

\implies 必要性: 可列可加性保证了有限可加性

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S_i - S_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} [P(S_i) - P(S_{i-1})]$$

两两互不相容

$S_0 = \emptyset$

三、概率的可列可加性与连续性

● **定理**: 若 P 为 \mathcal{F} 上满足 $P(\Omega) = 1$ 的非负集合函数, 则它具有**可列可加性**的充要条件为:

● **推论 1**: 概率是下连续的.

● **推论 2**: 概率是上连续的.

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset \dots$$

证明: 设 $B_i \in \mathcal{F}$ 且 $B_i \supset B_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, 令 $S_i = \bar{B}_i$, 则 $\{S_i\}$ 单调不减. 由推论 1 知

$$\begin{aligned}
 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\
 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) & 1 - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n\right) &= 1 - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n B_i\right)
 \end{aligned}$$

三、概率的可列可加性与连续性

- **定理**: 若 P 为 \mathcal{F} 上满足 $P(\Omega) = 1$ 的非负集合函数, 则它具有**可列可加性**的充要条件为:

- **推论 1**: 概率是下连续的.

- **推论 2**: 概率是上连续的.

- **推论 3**:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

四、概率空间的实际例子

- 在 Kolmogorov 的公理化结构中，称三元组 (Ω, \mathcal{F}, P) 为概率空间，以此为出发点讨论种种问题. 至于实际问题中，如何选定 Ω 、怎么构造 \mathcal{F} 、怎样给定 P ，要视具体情况而定.

- **例：**Bernoulli 概率空间

设 A 为 Ω 的非空子集，取 $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ ，再任取两个正数 p, q 且 $p + q = 1$ ，令

$$P(\emptyset) = 0, P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p, P(\Omega) = 1$$

易证， P 是一个概率测度，从而 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间，它是描述 Bernoulli 试验的概率空间.

四、概率空间的实际例子

- 例：有限概率空间

样本空间为有限集 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ，事件域 \mathcal{F} 为 Ω 的一切子集 (共 2^n 个) 的集类.

取 n 个非负实数 p_1, p_2, \dots, p_n 且 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

对每一个样本点 ω_i ，令 $P(\{\omega_i\}) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

对 Ω 的每一个子集 A ，令 $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

易证，上述定义的 P 是一个概率测度，从而 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间.

特别，取 $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ ，就是古典概型空间.

四、概率空间的实际例子

- 例：离散概率空间

样本空间为可列集 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ ，事件域 \mathcal{F} 仍取为 Ω 的一切子集组成的集类。

取非负实数序列 $p_i \geq 0$ ， $i = 1, 2, \dots$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ 。

对每一个样本点 ω_i ，令 $P(\{\omega_i\}) = p_i$ ， $i = 1, 2, \dots$

对 Ω 的每一个子集 A ，令 $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ 。

则 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间。

四、概率空间的实际例子

- 例：一维几何概率空间

样本空间 Ω 为 $(-\infty, +\infty)$ 中的 Borel 点集，具有正的有限的勒贝格测度 $m(\cdot)$. 事件域 \mathcal{F} 取作 Ω 中的 Borel 集类.

对每个事件 A ，取 $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ ，则 P 为一概率测度.

则 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间，即几何概型的概率空间.

四、概率空间的实际例子

- 从上面的例子可以看到下面两点：