

第 1 章 事件与概率

已学知识点

- 随机现象与统计规律

- ▶ 随机试验：可重复性，可观察性，不确定性.

- 样本空间、随机事件

- ▶ 样本空间与样本点

- ▶ 随机事件与事件的发生：基本事件，必然事件，不可能事件

- ▶ 事件的关系与运算： \subset ， $=$ ， \cup ， \cap ， $-$ ， $AB = \Phi$ ， \bar{A} ，交换律、结合律、分配律、对偶律

符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
\bar{A}	余集	A 不发生

已学知识点

● 古典概型

- ▶ 频率的定义: $F_n(A) = \frac{n_A}{n}$, 随机波动, 稳定性(统计规律)
- ▶ 频率的性质: 非负有界性, 规范性, 有限可加性
- ▶ 概率的描述性定义: 频率的极限, 优点 — 直观、易于理解, 缺点 — 用现象定义本质
- ▶ 古典概型 (等可能概率模型): (1) 样本空间样本点有限; (2) 每个样本点等可能出现.
- ▶ 古典概型概率的计算公式: $P(A) = \frac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含的样本点总数}}$.

已学知识点

- 组合数学相关知识

- ▶ **加法原理**: 做一件事情有 A 或 B 两类不同方式, A 有 n 种不同方法, B 有 m 种不同方法, 则完成这件事情共有 $n + m$ 种不同的方法.
- ▶ **乘法原理**: 做一件事情必须经过 A 与 B 两个不同步骤, A 有 n 种不同方法, B 有 m 种不同方法, 则完成这件事情一共有 $n \times m$ 种不同方法.

已学知识点

- 组合数学相关知识

- ▶ 基本排列组合公式:

- 不可重复的排列: $A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$

- 全排列: $P_n = A_n^n = n!$

- 可以重复的排列: n^r

- 二项式组合: $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (r \leq n).$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

- 多项式组合: $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}.$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

已学知识点

- 组合数学相关知识

- ▶ 基本排列组合公式:

- 可重复组合: 从 n 个不同元素中可放回任取 r 个, 不同组合方法有 $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$.
- 关于二项系数的一些公式: 设 n, r 为自然数, a, b, x 为任意实数. 规定 $0! = 1$.

$$A_x^r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$$

$$C_x^r = \binom{x}{r} = \frac{A_x^r}{r!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{-x}{r} = (-1)^r \binom{x+r-1}{r}, \quad \text{或} \quad \binom{x}{r} = (-1)^r \binom{-x+r-1}{r}$$

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{a}{i} \binom{b}{n-i}, \quad \text{特别} \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$$

1.3 古典概型

- ▶ 古典概型 (等可能概率模型): (1) 样本空间样本点有限; (2) 每个样本点等可能出现.
- ▶ 古典概型概率的计算公式:
$$P(A) = \frac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含的样本点总数}} .$$

四、古典概率的例子

- 古典概率的计算一般是先计算样本空间里的样本点总数，再从中挑选出随机事件包含的样本点个数，即有利场合数.
- 古典模型的基本特征：样本点总数有限，每个样本点等可能发生.
- 古典概型中的几个经典问题：
 - ① 生日问题
 - ② 抽签问题
 - ③ 产品抽样

四、古典概率的例子

- 生日问题 (亦称分房问题)

- 例：投球入格. 设有 n 个球，每个球都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个格子 ($N \geq n$) 的每一个格子中.

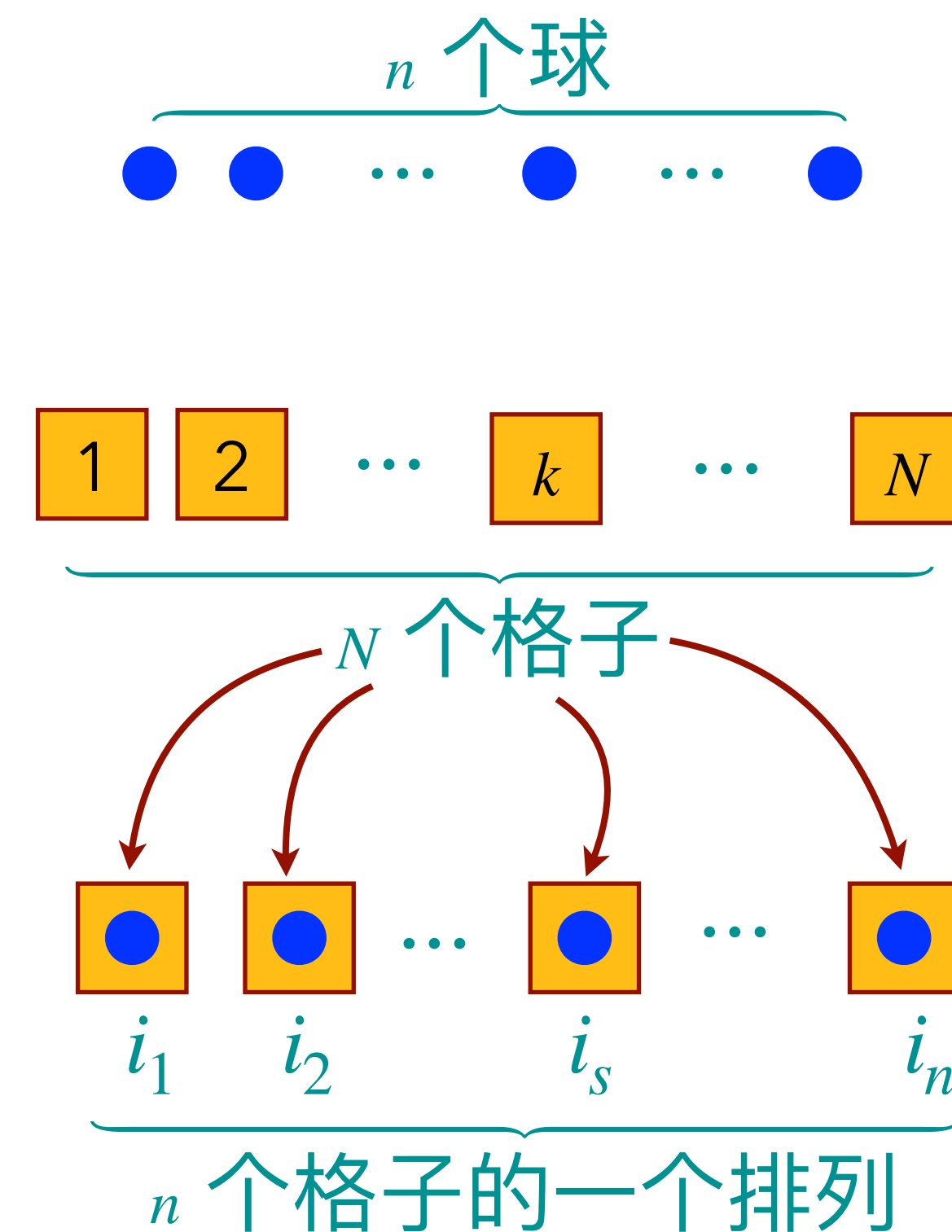
- ① 求某指定的 n 个格子中各有一个球的概率.

- ② 求任意 n 个格子中各有一个球的概率.

古典概型问题：先确定样本点总数 = N^n

- ① 指定的 n 个格子中各有一个球，有利场合数 = $n!$

$$P_1 = \frac{n!}{N^n}$$



四、古典概率的例子

- 生日问题 (亦称分房问题)

- 例：投球入格. 设有 n 个球，每个球都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个格子 ($N \geq n$) 的每一个格子中.

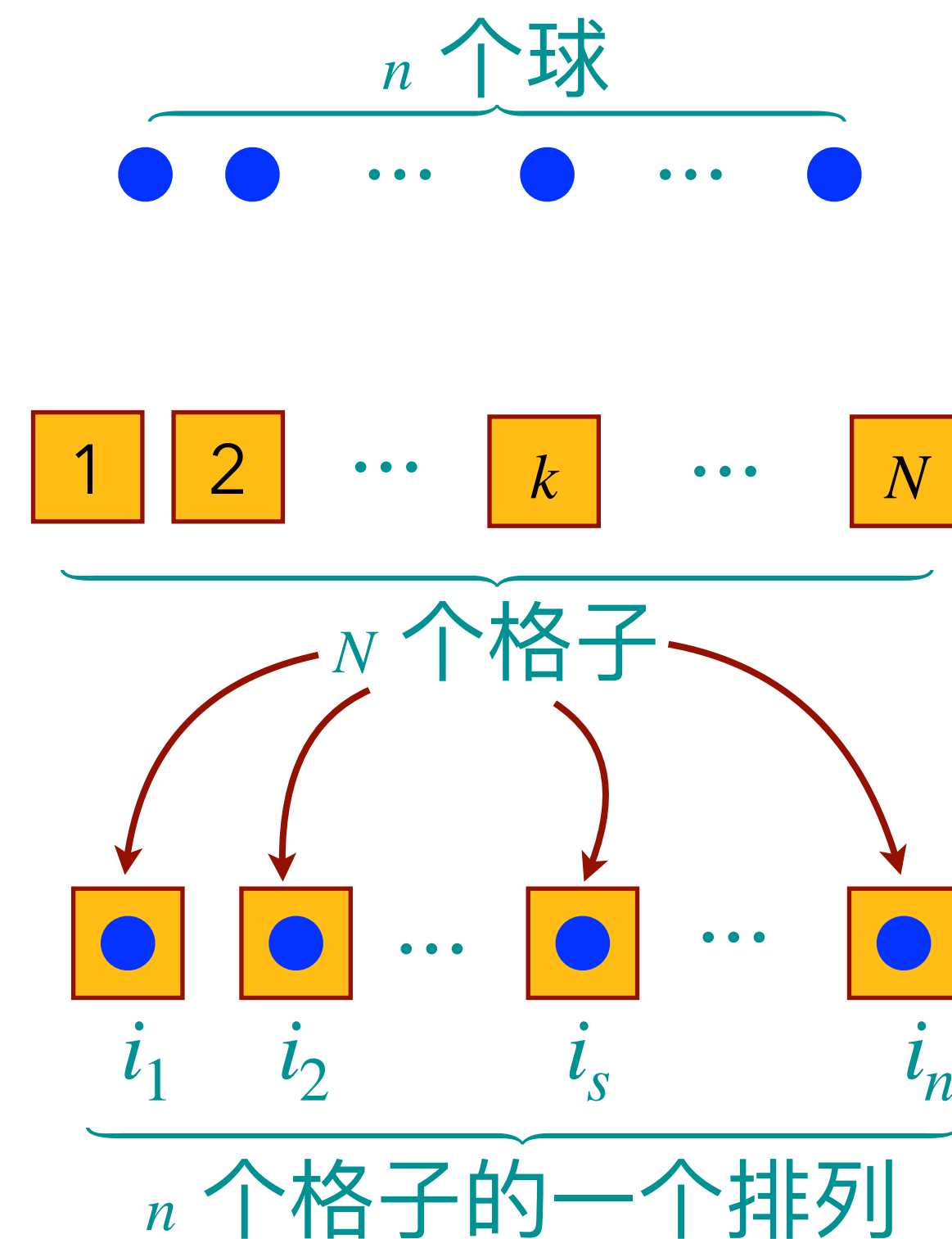
- ① 求某指定的 n 个格子中各有一个球的概率.

- ② 求任意 n 个格子中各有一个球的概率.

古典概型问题：先确定样本点总数 = N^n

- ② 任意 n 个格子中各有一个球，有利场合数 = $\binom{N}{n} n!$

$$P_2 = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} \cdot \frac{n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n \cdot (N-n)!}$$



四、古典概率的例子

n	20	21	22	23	30	40	50	60	70	80	90	100
$P(B)$	0.4114	0.4437	0.4757	0.5073	0.7063	0.8912	0.9704	0.9941	0.9992	0.9999	0.9999938	0.9999997

● 生日问题 (亦称分房问题)

○ 例：生日问题. 设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的, 即都等于 $\frac{1}{365}$, 现随机选取 $n (\leq 365)$ 个人.

- ① 问他们生日各不相同的概率为多少?
- ② n 个人中至少有两个人生日相同的概率为多少?

古典概型问题：先确定样本点总数 = 365^n

① 设 A 表示 n 个人生日各不相同.
$$P(A) = \frac{C_{365}^n \cdot n!}{365^n} = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

② 设 B 表示 n 个人中至少有两个人生日相同.

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

四、古典概率的例子

● 抽签问题

○ **例：**口袋中有 a 只黑球、 b 只白球，它们除颜色不同外，其它没有任何差别，现在把球随机地一只只摸出来，求第 k 次摸出的一只球是黑球的概率 ($1 \leq k \leq a + b$).

① **方法一：**将小球编号，按 $(a + b)$ 次摸球情况构造样本空间，则样本点总数为 $(a + b)!$. 第 k 次摸到黑球，有 a 种，其余的顺序可以任意排列，因此

$$P_k = \frac{a \cdot (a + b - 1)!}{(a + b)!} = \frac{a}{a + b}$$

② **方法二：**将小球编号，按前 k 次摸球情况构造样本空间

$$P_k = \frac{a \cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k} = \frac{a \cdot \frac{(a + b - 1)!}{(a + b - 1 - (k - 1))!}}{\frac{(a + b)!}{(a + b - k)!}} = \frac{a}{a + b}$$

四、古典概率的例子

- 产品抽样 (二项分布与超几何分布)

- 例：如果某批产品中有 a 件次品、 b 件合格品，我们采用有放回和不放回抽样方式从中抽取 n 件产品，问恰好有 k 件是次品的概率分别是多少。

① 有放回抽样：把 $a + b$ 件产品进行编号，有放回的抽 n 次，把可能的重复排列全体作为样本空间。样本空间的样本点总数为 $(a + b)^n$

取出的 n 件产品中哪 k 个是次品： C_n^k

从 a 件次品中有放回取 k 个次品： a^k

从 b 件合格品中有放回取 $n - k$ 件： b^{n-k}

} 有利场合数： $C_n^k a^k b^{n-k} = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$p_k = \frac{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}}{(a + b)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a + b}\right)^k \left(\frac{b}{a + b}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a + b}\right)^k \left(1 - \frac{a}{a + b}\right)^{n-k}$$

四、古典概率的例子

注意：当产品总数很大而抽样数不大时，采用有放回抽样与采用不放回抽样，差别不大。

- 产品抽样 (二项分布与超几何分布)

- 例：如果某批产品中有 a 件次品、 b 件合格品，我们采用有放回和不放回抽样方式从中抽取 n 件产品，问恰好有 k 件是次品的概率分别是多少。

② **不放回抽样**：从 $a + b$ 件产品中取出 n 件产品的可能组合全体作为样本空间，则样本点的总数为： $\binom{a+b}{n}$

取出的 n 件产品中有 k 个是次品： $\binom{a}{k}$

取出的 n 件产品中有 $n - k$ 个是合格品： $\binom{b}{n-k}$

} 有利场合数： $\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$

$$P_k = \frac{\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

五、古典概率的性质

① **非负性**: 对任一事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.

② **规范性**: 对必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$.

③ **有限可加性**: 若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则 $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

○ **推论**: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

六、对立事件的概率

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 例：(De Mere 问题) 一枚骰子掷 4 次至少得到一次六点，与两枚骰子掷 24 次至少得到一次双六点，这两个事件哪一件有更多的机会遇到？

更有机会遇到

以 A 表示一颗骰子掷 4 次至少得到一次六点这一事件，则 \bar{A} 表示掷一枚骰子 4 次没有出现六点的事件，于是

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177469$$

同理，若以 B 表示两颗骰子掷 24 次至少得到一次双六点这一事件，则

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914039$$

- 该问题在概率论发展史上颇有名气，因为它是 De Mere 向 Pascal 提出的问题之一，正是这些问题导致了 Pascal 的研究和他与 Fermat 的著名通信，他们的研究标志着概率论的诞生。

1.4 几何概型

- 有时，试验的可能结果是某区域中的一个点，这个区域可以是一维的，也可以是二维的，还可以是 n 维的，这时不管是可能结果全体，还是我们感兴趣的事件，所含样本点都是无限的.
- 此时，等可能性可以通过下列方式来赋予意义：落在某区域 g 的概率与区域的几何度量 $m(g)$ (长度、面积、体积等) 成正比，并且与其位置和形状无关. 这种区域的度量统称为勒贝格 (Lebesgue) 测度 (measure).
- 若以 A_g 表示在区域 Ω 中随机取一点，该点落在区域 g 中这一事件，则其概率定义为：

$$P(A_g) = \frac{m(g)}{m(\Omega)}$$

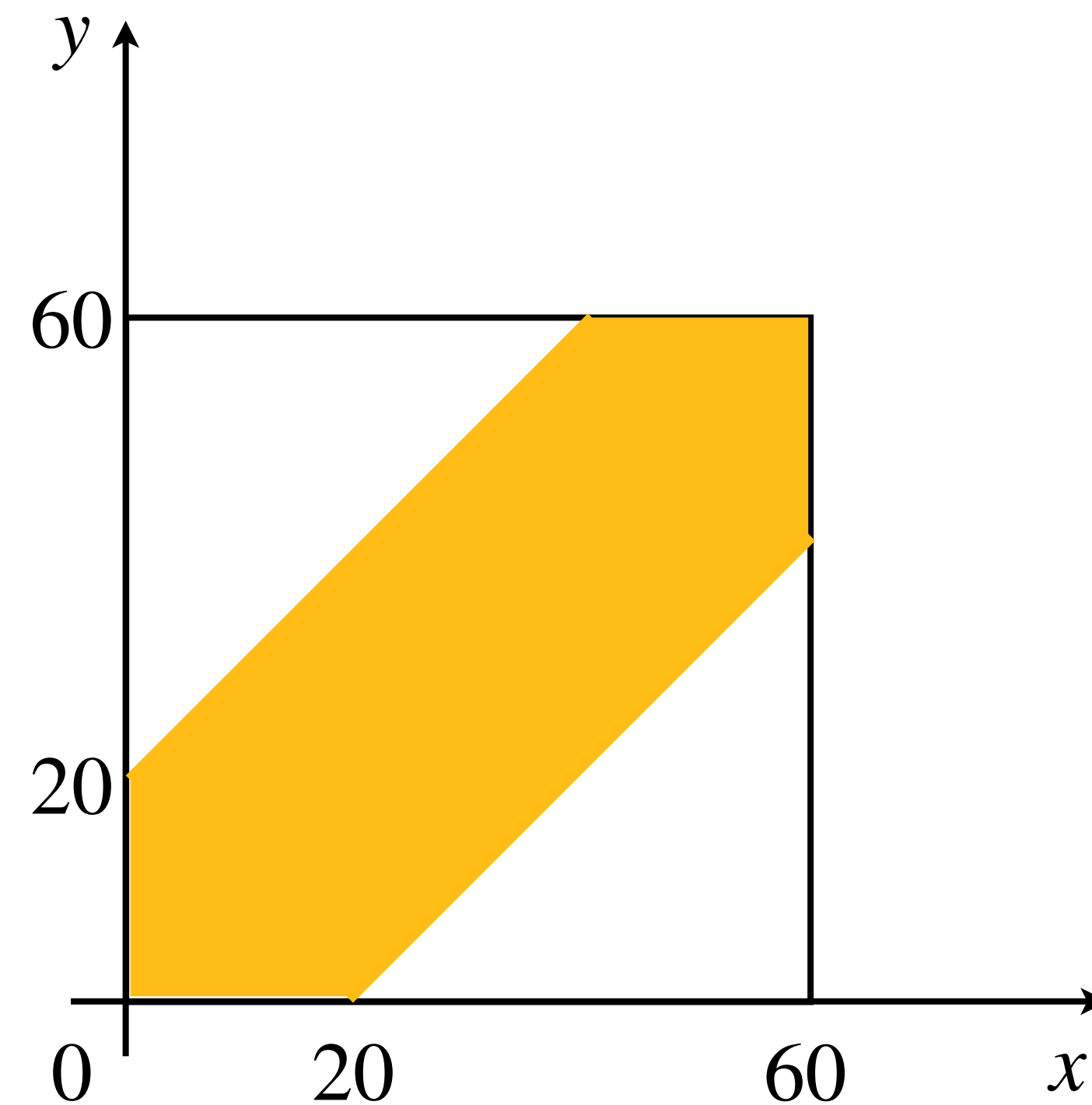
- 例：(会面问题) 两人相约 8 点到 9 点在某地会面，先到者最多等候另一人 20 分钟，问这两人此次约会成功的概率是多少.

以 x, y 分别表示两人到达的时刻，则约会成功的充分必要条件为

$$|x - y| \leq 20$$

可能的结果全体是边长为 60 的正方形当中的点，约会成功的点的区域用阴影标出，故所求的概率为

$$p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9} \approx 0.5555556$$



实际上，我们假定了两人到达的时间在 8 点到 9 点之间的机会均等且互不影响.

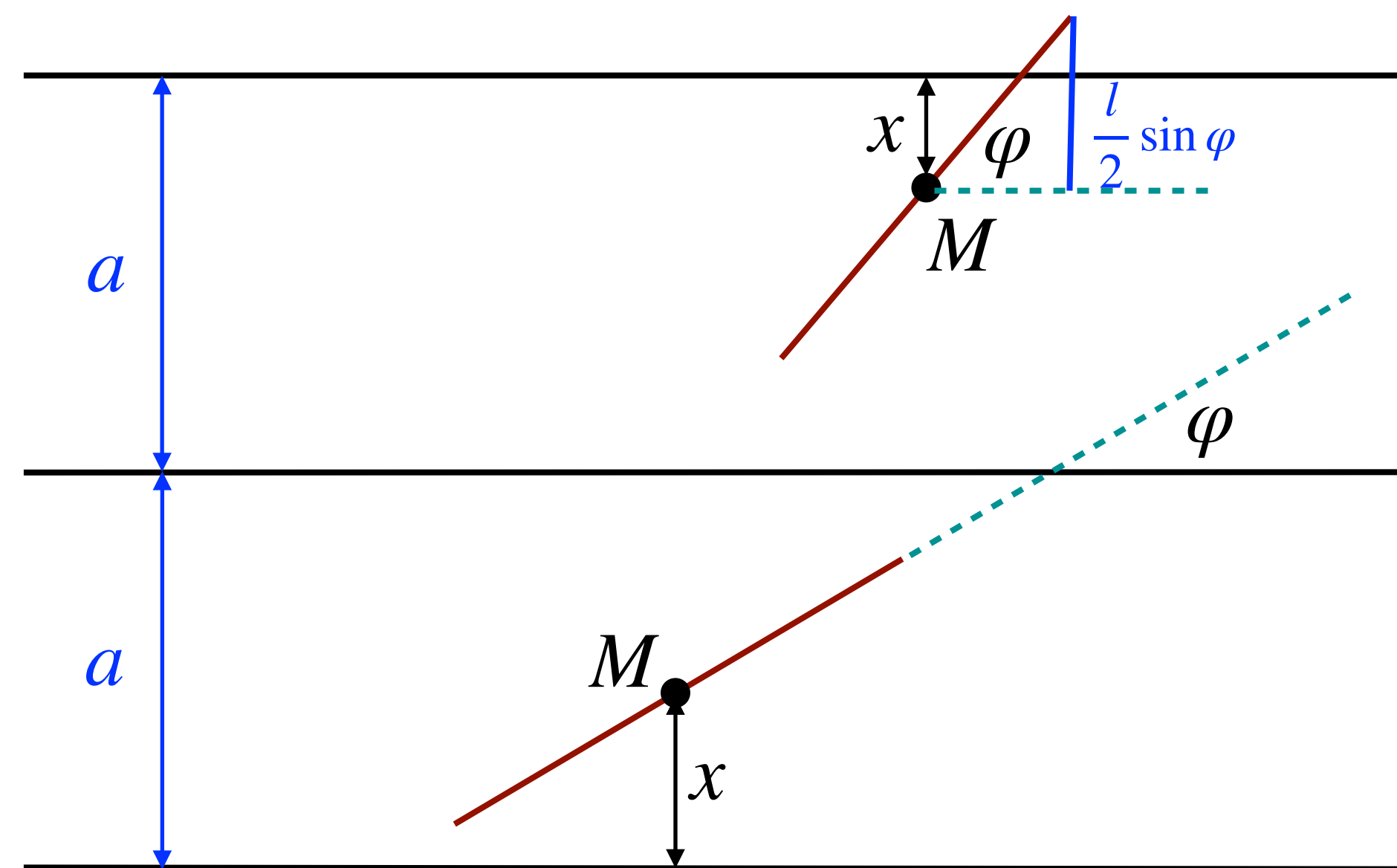
- 例: (Buffon 投针问题) 平面上有一族平行线. 其中任何相邻的两线距离都是 a ($a > 0$). 向平面任意投一根长为 l ($l \leq a$) 的针, 试求针与某一条平行线相交的概率.

设 x 是针的中点 M 到最近的一条平行线的距离, φ 是针与此平行线的交角, 投针问题就相当于向平面区域 Ω 取点的几何概型.

$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$$

设 A 表示针与某一条平行线相交, 则

$$A = \left\{ (\varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi \right\}$$



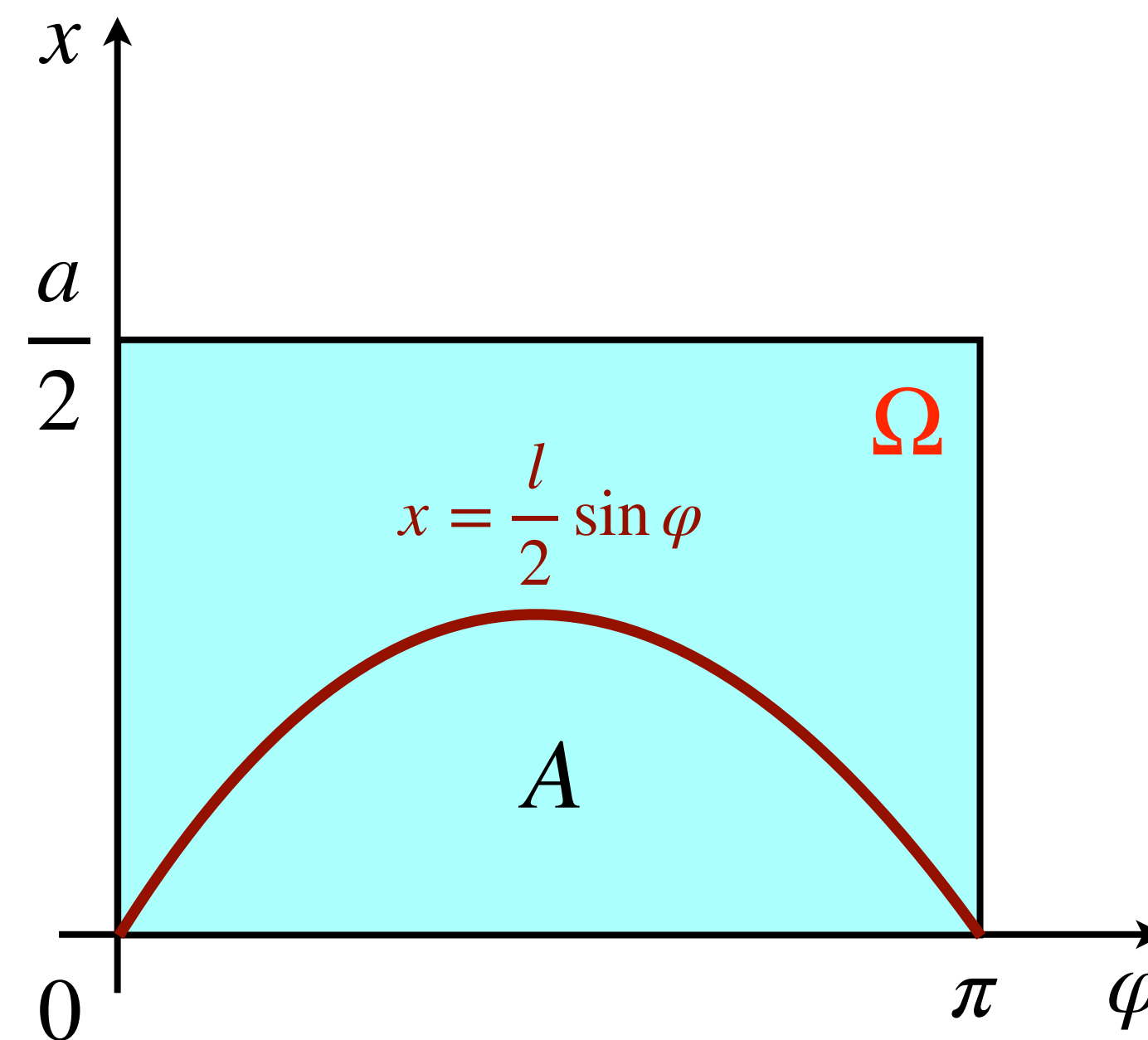
- 例: (Buffon 投针问题) 平面上有一族平行线. 其中任何相邻的两线距离都是 a ($a > 0$). 向平面任意投一根长为 l ($l \leq a$) 的针, 试求针与某一条平行线相交的概率.

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi}{\frac{a}{2} \cdot \pi} = \frac{2l}{\pi a}$$

$$\Omega = \left\{ (\varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$$

设 A 表示针与某一条平行线相交, 则

$$A = \left\{ (\varphi, x) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi \right\}$$



- **例:** (Buffon 投针问题) 平面上有一族平行线. 其中任何相邻的两线距离都是 a ($a > 0$). 向平面任意投一根长为 l ($l \leq a$) 的针, 试求针与某一条平行线相交的概率.

由于最后的答案与 π 有关, 因此 Buffon 设想利用它来计算 π 的值, 其方法是投针 N 次, 计算针与

直线相交的次数 n , 再以频率值 $\frac{n}{N}$ 作为概率 $p = \frac{2l}{\pi a}$ 的近似值, 代入就有 $\pi = \frac{2l \cdot N}{a \cdot n}$.

试验者	时间	针长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860	1.0	600	382	3.137
Fox	1884	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925	0.5419	2520	859	3.1795

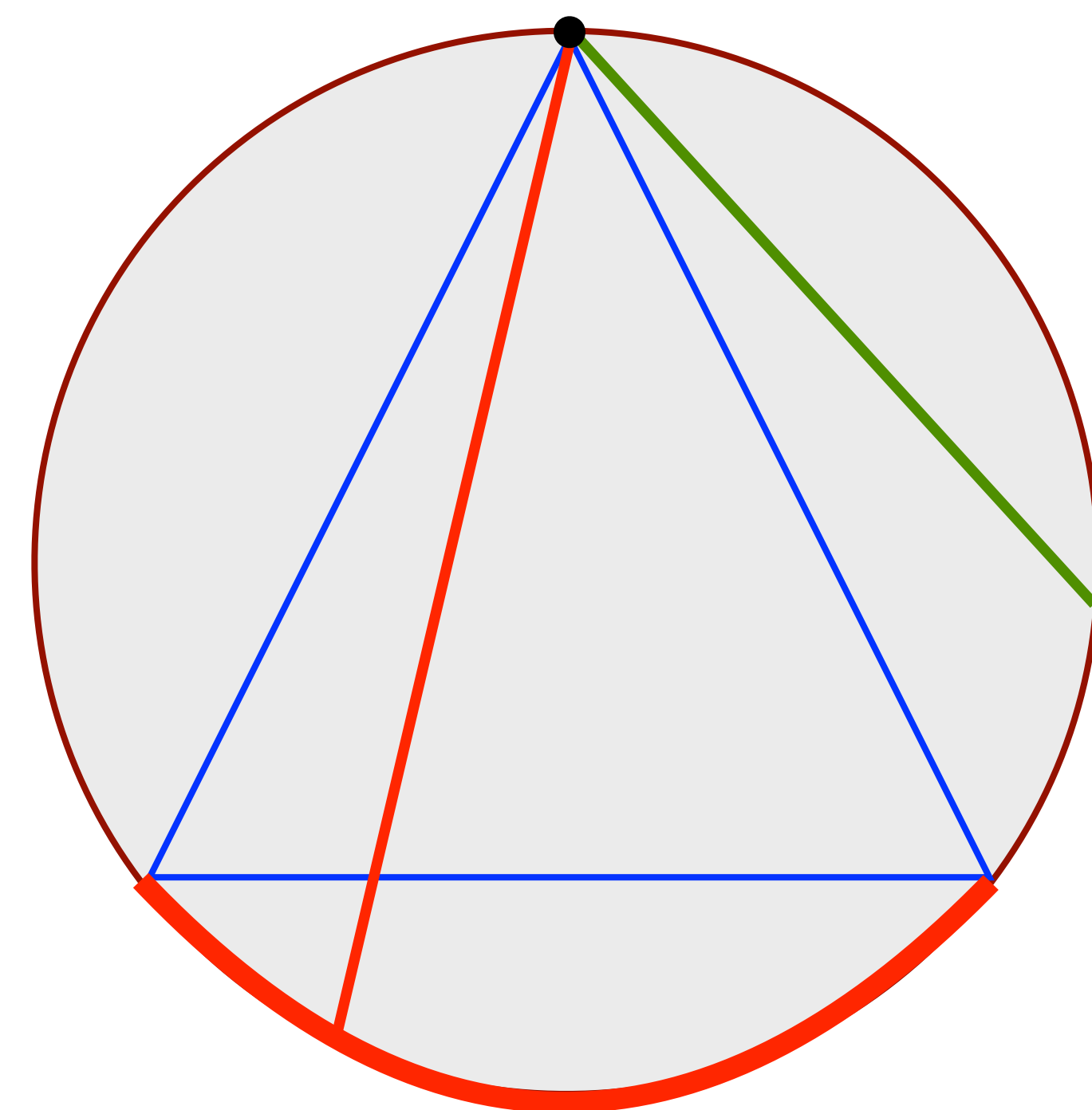
- 几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19 世纪时, 不少人相信, 只要找到适当的等可能性描述, 就可以给概率问题以唯一的解答. 然而有人却构造出了这样一个例子, 它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案.

- **例:** (Bertrand 悖论) 在半径为 1 的圆内随机地取一根弦, 求其长度超过该圆内接等边三角形的边长的概率.

- ① **方法一:** 任何弦交圆周两点, 不失一般性, 先固定其中一点于圆周上, 以此点为顶点作等边三角形, 显然只有落入此三角形内的弦才满足要求, 这种弦的弧长为整个圆周的 $\frac{1}{3}$, 故所求的

概率为

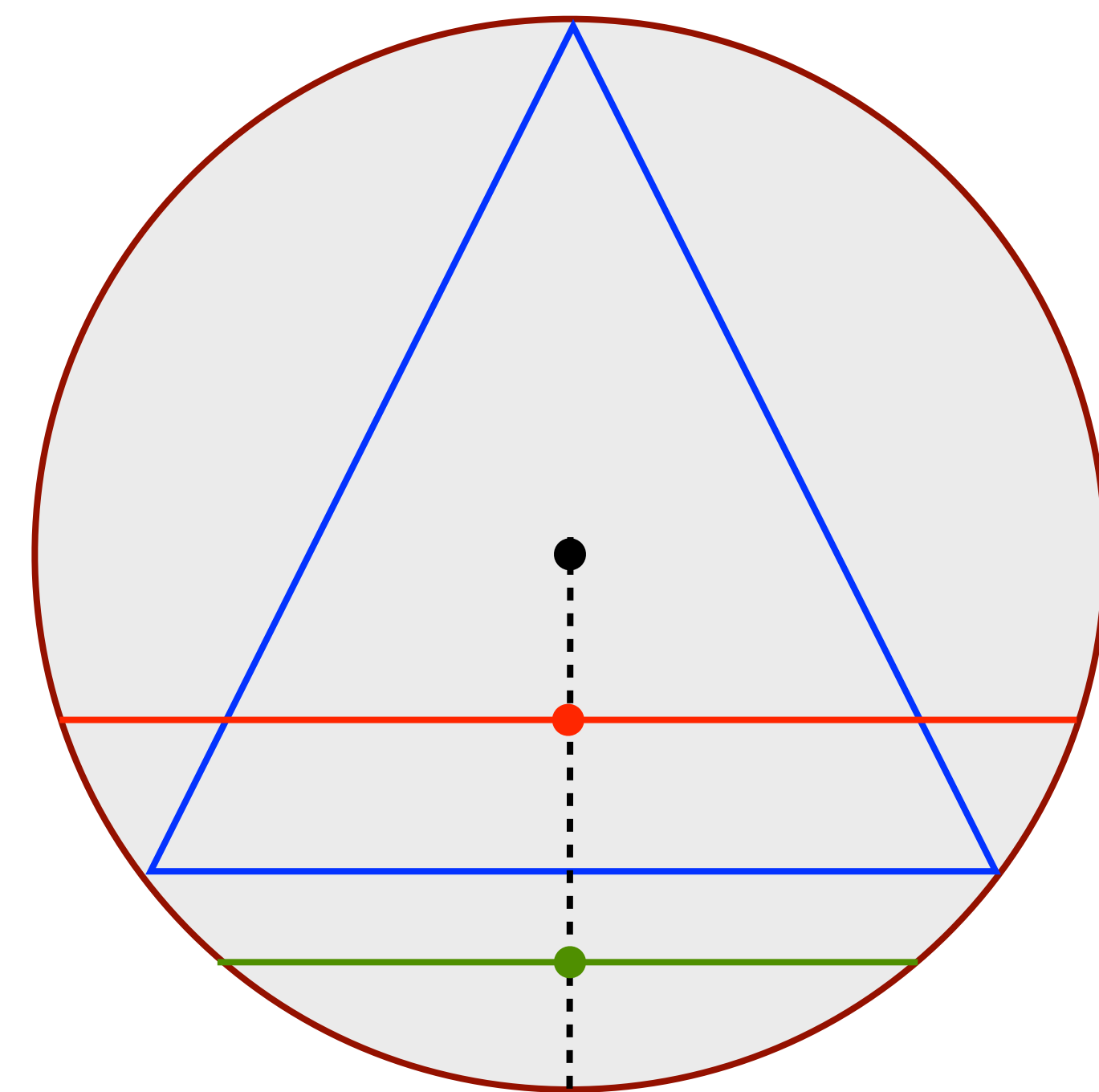
$$p_1 = \frac{1}{3}$$



- 几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19 世纪时, 不少人相信, 只要找到适当的等可能性描述, 就可以给概率问题以唯一的解答. 然而有人却构造出了这样一个例子, 它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案.
- **例: (Bertrand 悖论)** 在半径为 1 的圆内随机地取一根弦, 求其长度超过该圆内接等边三角形的边长的概率.

② **方法二:** 弦长只跟它与圆心的距离有关, 而与方向无关, 因此可以假定它垂直于某一直径, 当且仅当它与圆心的距离小于 $\frac{1}{2}$ 时, 其长才大于内接等边三角形的边长, 因此所求的概率为

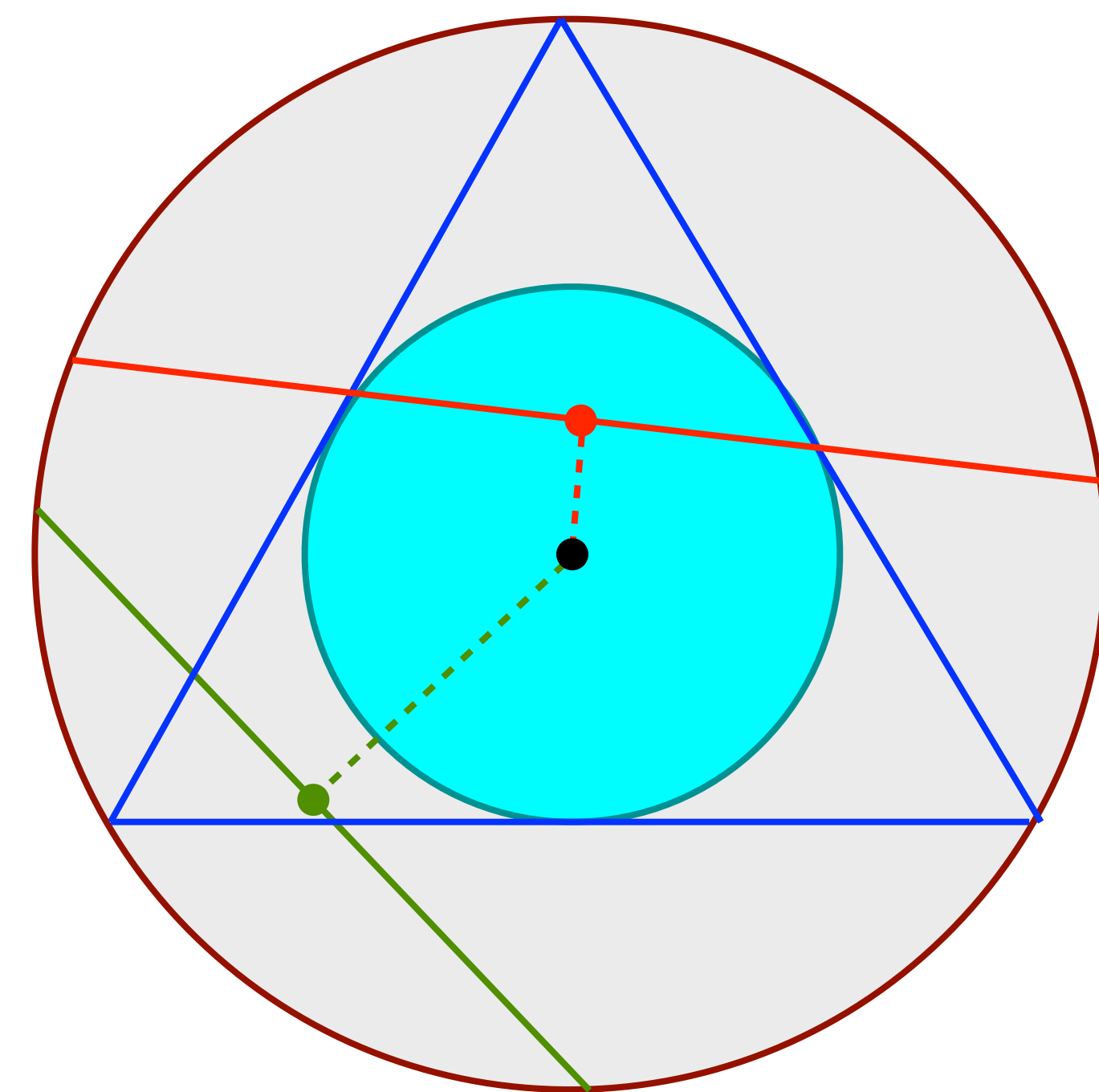
$$p_2 = \frac{1}{2}$$



- 几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19 世纪时, 不少人相信, 只要找到适当的等可能性描述, 就可以给概率问题以唯一的解答. 然而有人却构造出了这样一个例子, 它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案.
- **例: (Bertrand 悖论)** 在半径为 1 的圆内随机地取一根弦, 求其长度超过该圆内接等边三角形的边长的概率.

③ **方法三:** 弦被其中点唯一确定, 当且仅当弦的中点位于半径为 $\frac{1}{2}$ 的同心圆时, 弦长才大于内接等边三角形的边长, 此小圆面积为大圆面积的 $\frac{1}{4}$, 故所求的概率为

$$p_3 = \frac{1}{4}$$



- 几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19 世纪时, 不少人相信, 只要找到适当的等可能性描述, 就可以给概率问题以唯一的解答. 然而有人却构造出了这样一个例子, 它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案.
- **例: (Bertrand 悖论)** 在半径为 1 的圆内随机地取一根弦, 求其长度超过该圆内接等边三角形的边长的概率.
- 同一问题有三种不同的答案, 细究其原因, 发现是在取弦时采用了**不同的等可能性假定**. 在第一种方法中, 假定了端点在圆周上均匀分布. 在第二种方法中, 假定了弦的中点在直径上均匀分布, 而在第三种方法中, 又假定了弦的中点在圆内均匀分布. 这三种答案针对三种不同的随机试验, **对于各自的随机试验而言, 它们都是正确的**.
- 因此在使用**随机、等可能、均匀分布**等术语时, 应明确指明其含义, 这又因试验而异.

1.5 概率空间

- 采用等可能性来定义概率，其适用范围有限. 对一般随机现象该如何明确定义概率等基本概念？
- 前苏联数学家 Kolmogorov 于1933年在**概率论基础**一书中，用公理化的方法与集合论的观点成功地解决了这一问题，他在定义概率这一基本概念时，仅指明概率应具有的基本性质，而把具体概率的给定放在一边，这样做的好处是能针对不同的随机试验给定适当的概率.
- Kolmogorov 提出的公理为数很少且极为简单，但在此基础上却建立起了概率论的宏伟大厦.



一、事件域

- **随机试验**: 一个试验 (或观察), 若它的结果预先无法确定, 则称之为随机试验, 简称**试验**.
- **样本空间**: 一个试验的所有可能结果组成的集合, 称为样本空间, 记作 Ω .
- **样本点**: Ω 中的元素称为样本点, 用 ω 表示.
- **事件**: 事件 A 定义为 Ω 的一个子集, 它包含若干样本点. 事件 A 发生当且仅当 A 所包含的样本点中有一个发生. 事件常用大写字母 A, B, C, \dots 等表示.
- **集类**: 由 Ω 中的若干子集构成的集合称为集类, 集类一般用花写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \dots$ 等表示.

一、事件域

- **问题:** 针对哪些事件给出概率?

① 记 \mathcal{F} 为我们所研究的所有事件的全体.

② 但 \mathcal{F} 一般不包括所有的事件, 即样本空间 Ω 的一切子集, 因为这将给确定概率带来困难.

③ \mathcal{F} 必须把我们感兴趣的事件都包含进来.

④ 因为事件的积、和、对立等也应为事件, 也应有相应的概率, 所以需要将它们亦包括进来.

⑤ 当然, Ω 和 Φ 必不可少.