第 1 章 事件与概率

目　录

1.1 随机现象与统计规律

1. 试验: 在这里试验可指各种各样的科学试验，也包括对事物特征的观察与检测等. 范围比较广泛.

2. 随机试验: 如果试验具有如下特点:

① 可重复性: 在相同条件下可重复地进行.

② 可观察性: 每次试验的结果不止一个, 但事先能明确试验的所有可能结果.

③ 不确定性: 进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现.

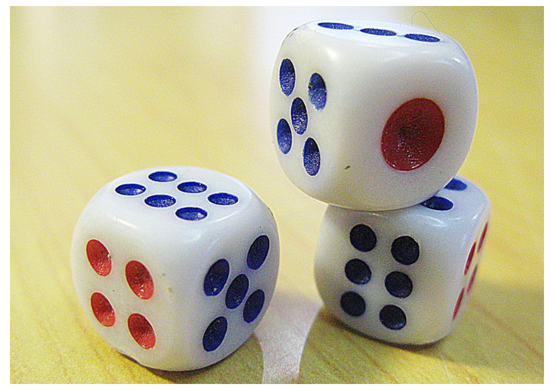
这种试验称为随机试验, 常用字母 E 表示.

(注: 我们以后提到的试验均指随机试验.)

- 我们通过随机试验来研究随机现象.

- 例：
  - E_1 — 抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

  - E_2 — 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.
  - E_3 — 将一枚硬币抛掷三次，观察反面出现的次数.



  - E_4 — 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.
  - E_5 — 记录某城市 120 急救电话一昼夜内接到的呼叫次数.

  - E_6 — 在一批灯泡中任意抽取一只测试其寿命.

  - E_7 — 对听课人数进行一次登记.

1.2 样本空间、随机事件

一、样本空间

1. 样本空间：随机试验 E 的所有可能结果组成的集合.

2. 样本点：样本空间的元素，即 E 的每个可能结果称为样本点.

- 例：写出上例中所列的试验 E_i 的样本空间.
  - E_1 — 抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况. $S_1 = \{H, T\}$
  - E_2 — 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

    $$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$
  - E_3 — 将一枚硬币抛掷三次，观察反面出现的次数.

    $$S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$$

  - E_4 — 抛掷一枚骰子，观察出现的点数. $S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

一、样本空间

1. 样本空间：随机试验 E 的所有可能结果组成的集合.

2. 样本点：样本空间的元素，即 E 的每个可能结果称为样本点.

- 例：写出上例中所列的试验 E_i 的样本空间.
  - E_5 — 记录某城市 120 急救电话一昼夜内接到的呼叫次数.

    $$S_5 = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

  - E_6 — 在一批灯泡中任意抽取一只测试其寿命. $S_6 = \{t \mid t \geq 0\}$
  - E_7 — 对听课人数进行一次登记. $S_7 = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$

【注】样本空间是相对于某个随机试验而言，其元素取决于试验的内容和目的.

二、随机事件

1. 随机事件：随机试验 E 的样本空间 S 的子集，简称事件．通常用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示.
2. 事件发生：在每次试验中，当且仅当事件 A 的一个样本点出现时，称事件 A 发生.
3. 基本事件：由一个样本点构成的单点集.
4. 必然事件：样本空间 S 称为必然事件．在每次试验中它总是发生的.
5. 不可能事件：空集 Φ 称为不可能事件. 在每次试验中它都不发生.

- 例：E_2 — 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.
  - A_1 — 第一次出现反面.　$A_1 = \{\text{THH, THT, TTH, TTT}\}$
  - A_2 — 三次出现同一面.　$A_2 = \{\text{TTT, HHH}\}$

二、随机事件

1. 随机事件：随机试验 E 的样本空间 S 的子集, 简称事件. 通常用大写字母 A, B, C, … 表示.
2. 事件发生：在每次试验中，当且仅当事件 A 的一个样本点出现时，称事件 A 发生.
3. 基本事件：由一个样本点构成的单点集.
4. 必然事件：样本空间 S 称为必然事件. 在每次试验中它总是发生的.
5. 不可能事件：空集 Φ 称为不可能事件. 在每次试验中它都不发生.

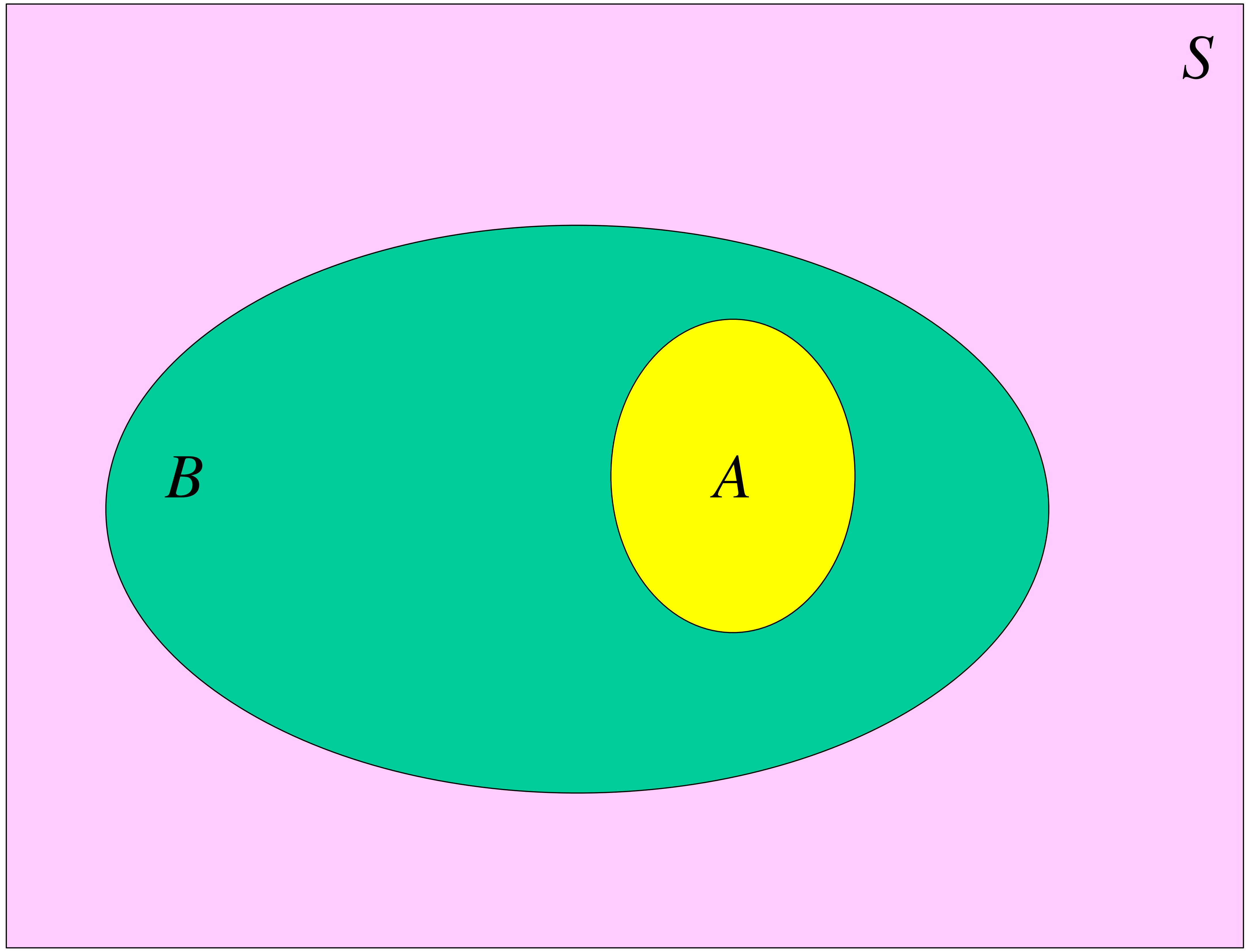
- 例：试验 E：从 4 件产品 (2 件正品、2件次品) 中任取 2 件，观察产品情况.
  - A — 2 件都是正品. $A = \{(\text{正品}, \text{正品})\}$
  - B — 至少有 1 件次品. $B = \{(\text{正品}, \text{次品}), (\text{次品}, \text{正品}), (\text{次品}, \text{次品})\}$

三、事件间的关系与事件的运算

1. 包含关系 $A \subset B$： 称事件 B 包含事件 A, 或 A 是 B 的子事件. 含义：事件 A 发生必导致 B 发生.

显然，对于任何事件 A 都有 $\Phi \subset A \subset S$.

事件的相等 $A = B$：$A \subset B$ 且 $B \subset A$.



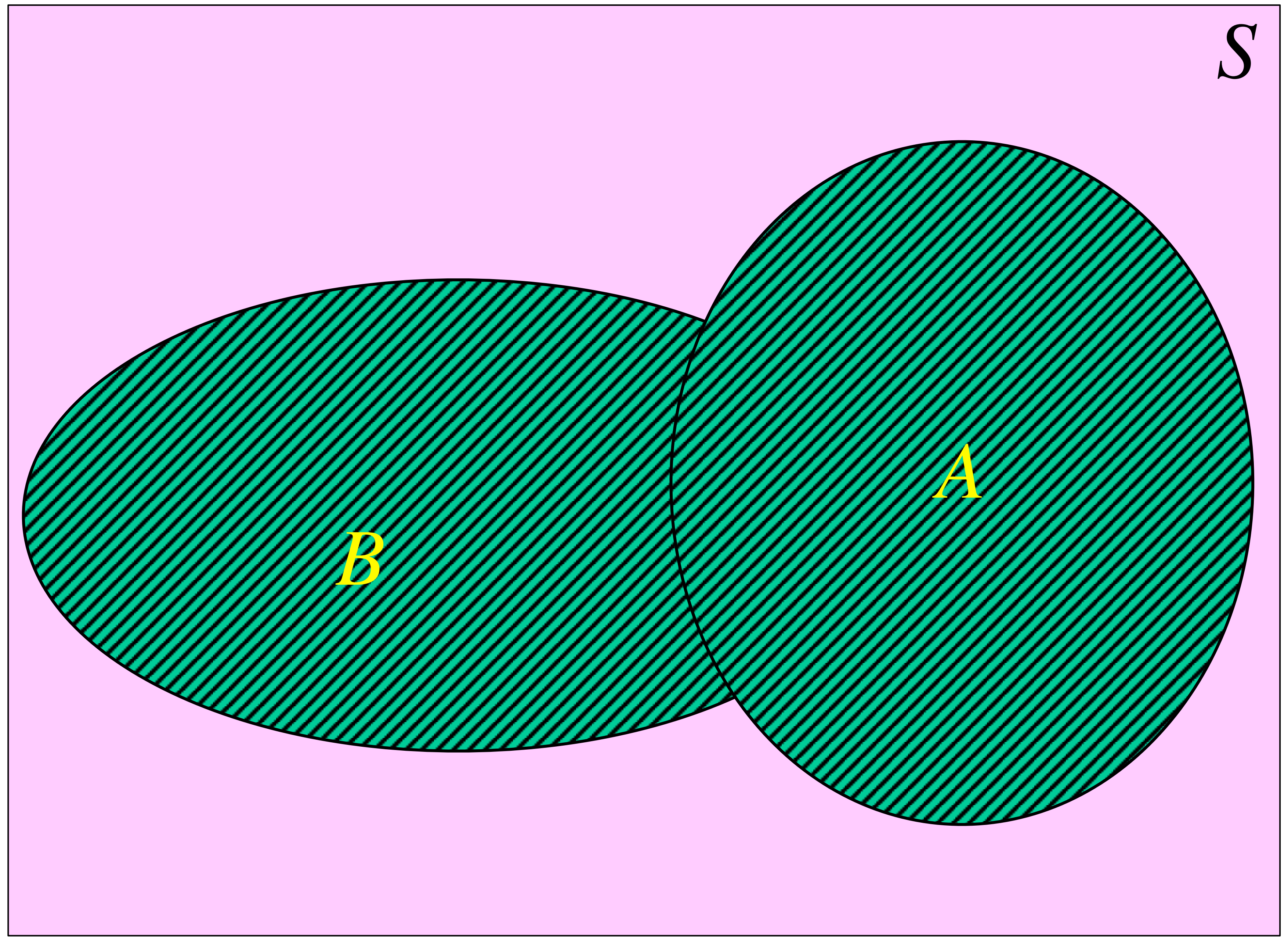
$A \subset B$

三、事件间的关系与事件的运算

2. 和事件 $A \cup B$：当且仅当事件 A, B 至少有一个事件发生时，事件 $A \cup B$ 发生.

① $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的和事件.

② $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 的和事件.



$A \bigcup B$

- 例：掷骰子试验. A 表示掷出奇数点，B 表示掷出的点数小于 5 点.

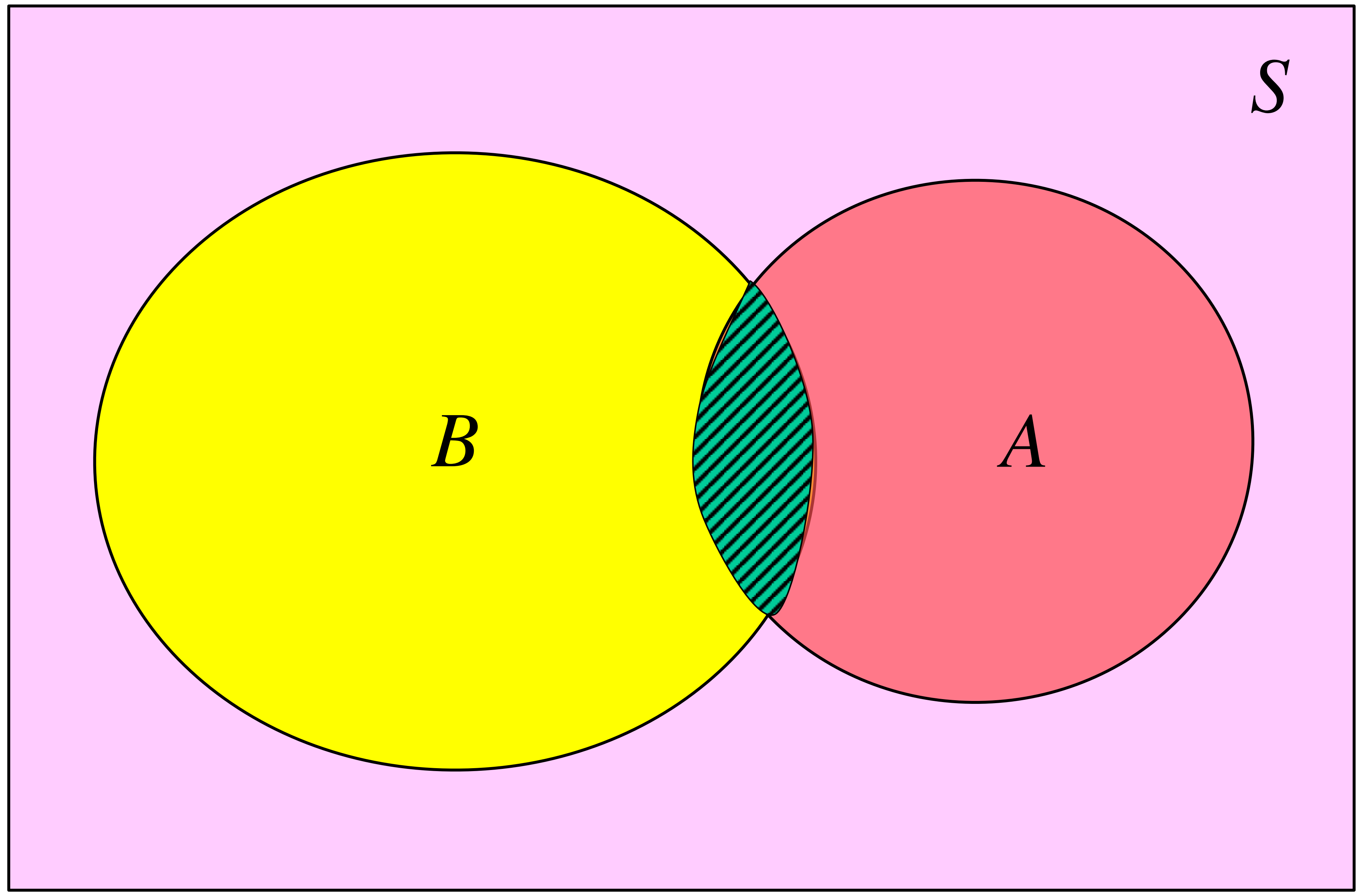
$$A = \{1, 3, 5\} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\} \Longrightarrow A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

三、事件间的关系与事件的运算

3. 积事件 $A\cap B$ 或 AB：当且仅当事件 A, B 同时发生时，事件 AB 发生.

① $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有限个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的积事件.

② $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 可列个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 的积事件.



$A\bigcap B$

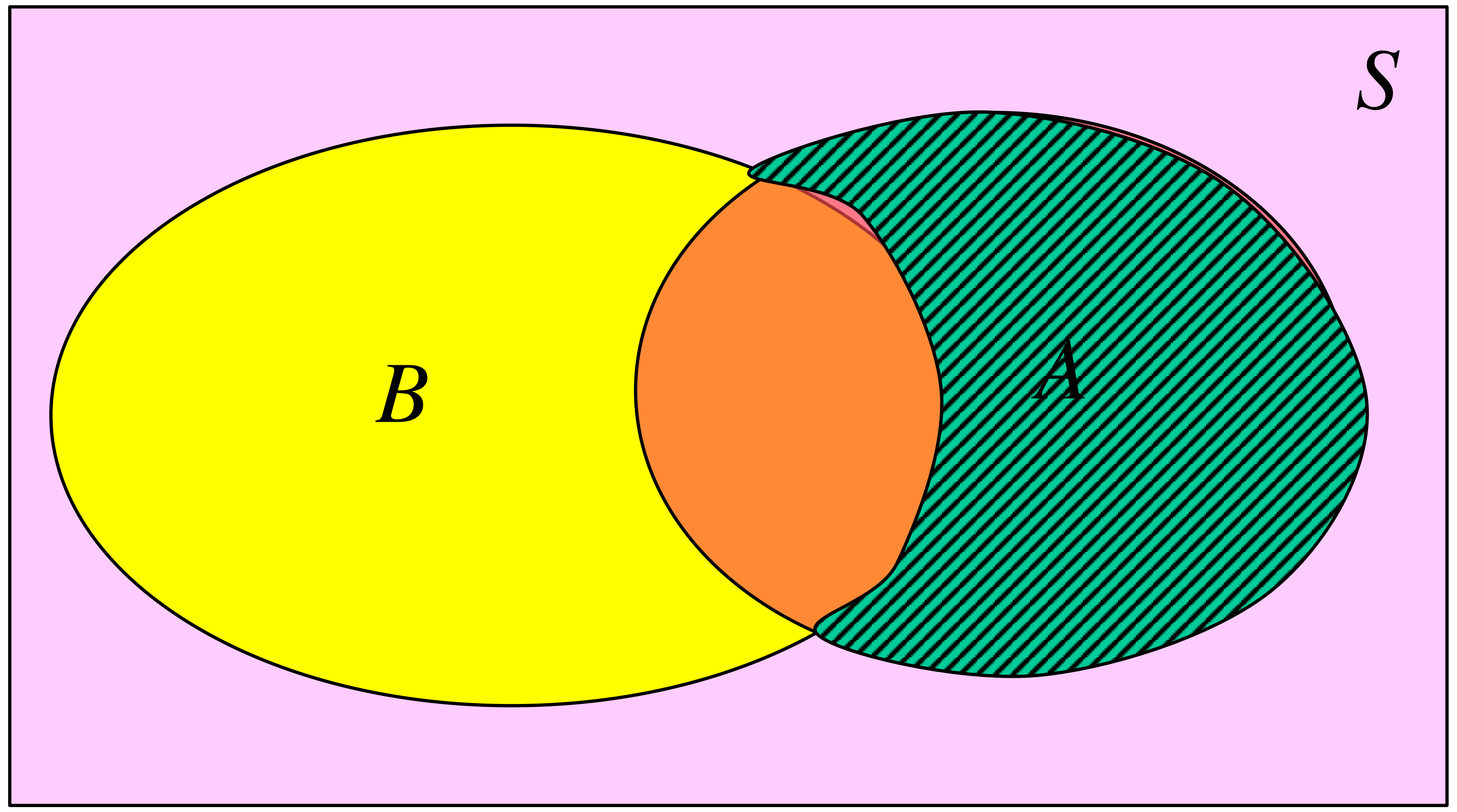
三、事件间的关系与事件的运算

4. 差事件 $A-B$：当且仅当事件 A 发生、B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

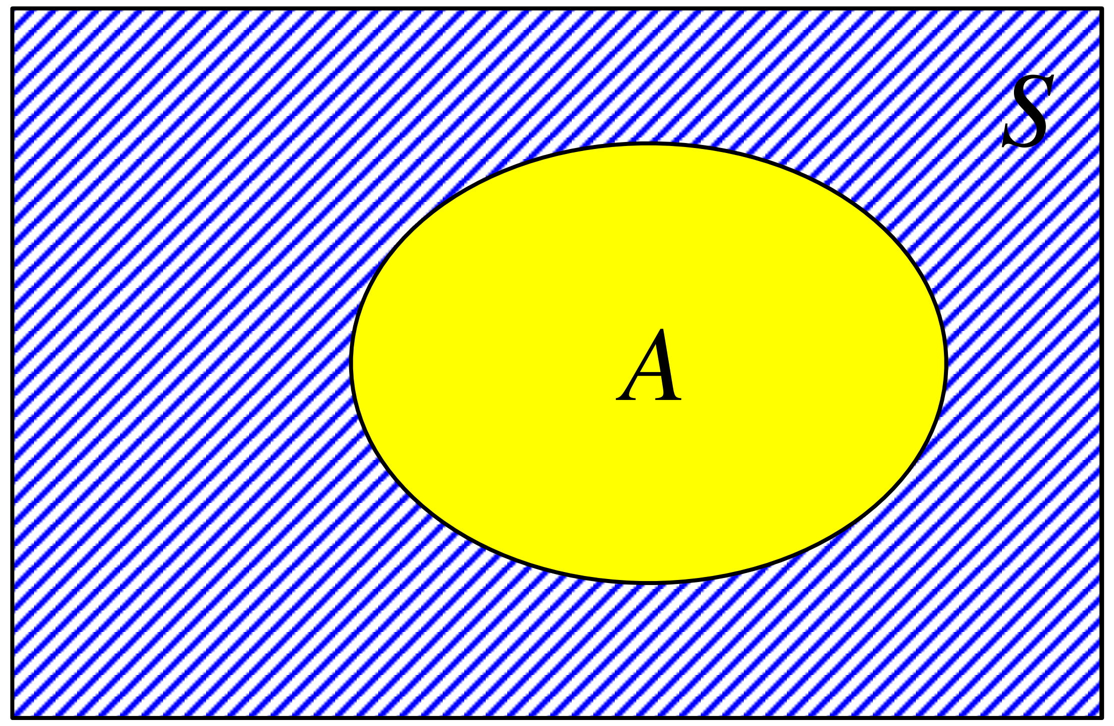
5. 互不相容事件：当且仅当 $A\cap B=\Phi$.

A, B 为互不相容事件，指事件 A 与 B 不能同时发生.

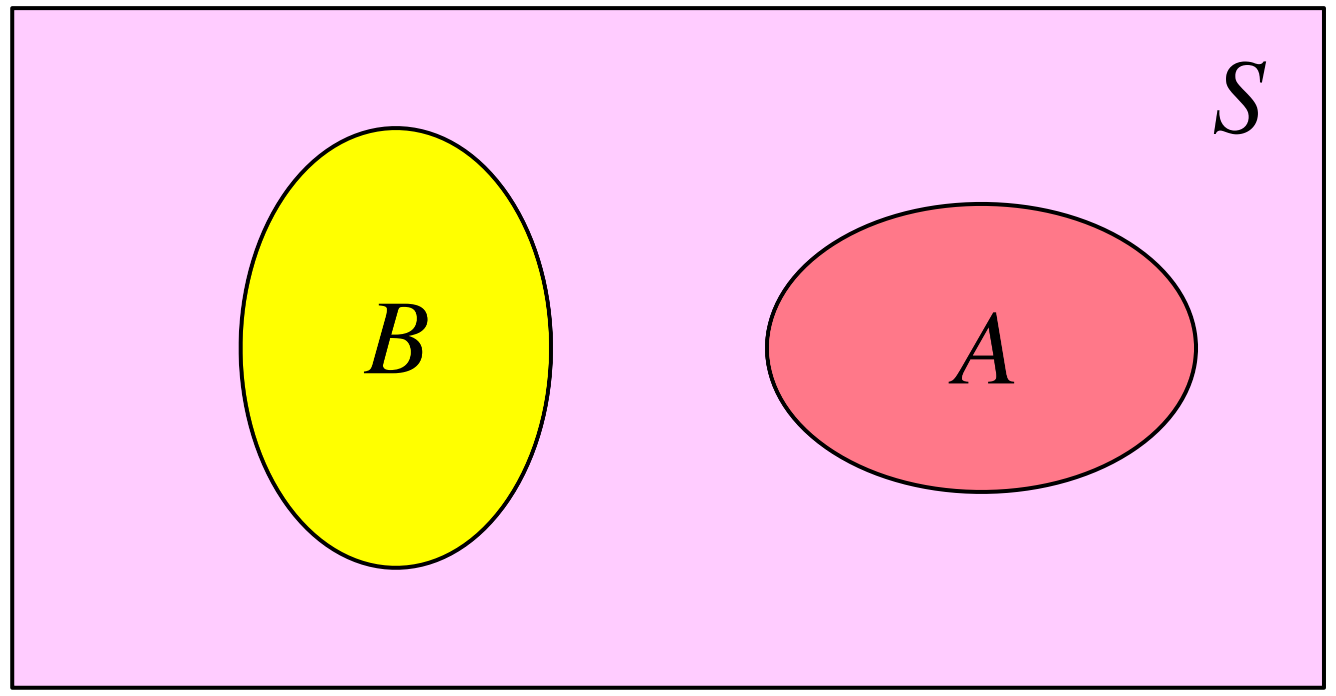
6. 对立 (互逆) 事件：当且仅当 $A\cap B=\Phi$ 且 $A\cup B=S$.



$A-B$



$\overline{A}=S-A$



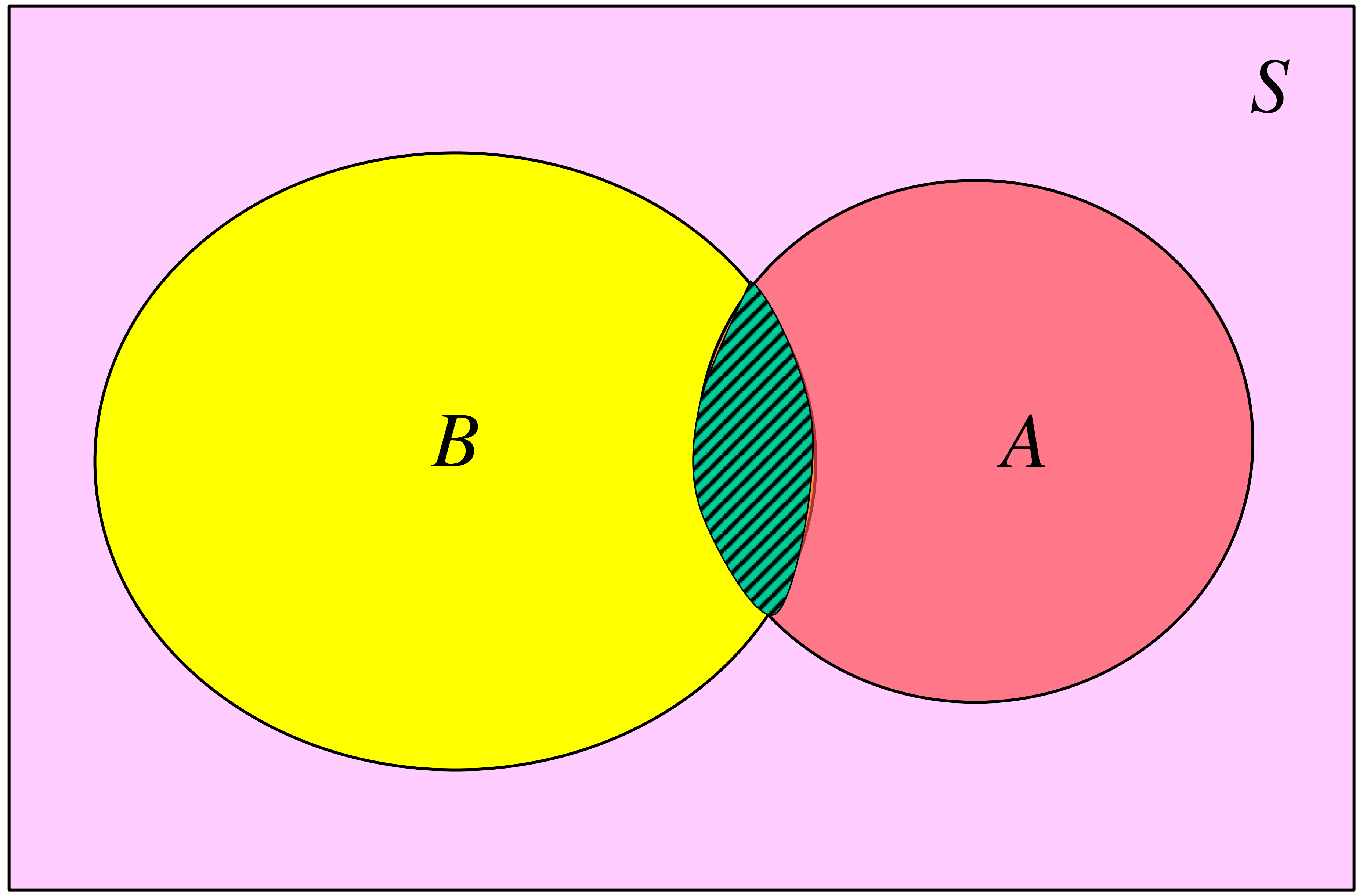
$A\cap B=\Phi$

三、事件间的关系与事件的运算

7. 文氏图.

- A 为任意事件.

$$\begin{cases} A\overline{A} = \Phi \\ A \cup \overline{A} = S \\ \overline{A} = S - A \\ \overline{\overline{A}} = A \end{cases}$$



$A \cap B$

- 基本事件都是互不相容的. 事件 A 与 $B-A$ 也互不相容.

- 一些基本表达式.

$$\begin{cases} B - A = B\overline{A} = B - AB \\ A \cup B = A \cup (B - A) = (A - B) \cup AB \cup (B - A) \end{cases}$$

三、事件间的关系与事件的运算

8. 事件的运算法则：

- 交换律：$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$
- 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配律：$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$
- 对偶律 (De Morgan's Law)：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\ ,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

- 对必然事件的运算法则：$A \cup S = S,\ A \cap S = A$
- 对不可能事件的运算法则：$A \cup \Phi = A,\ A \cap \Phi = \Phi$

三、事件间的关系与事件的运算

- 例：从大批产品中取产品检验，设事件 A_k 表示第 k 次取到合格产品 $(k=1, 2, 3)$，用 A_k 表示下列各事件：

① A 表示三次都取到合格产品. $A=A_1\cap A_2\cap A_3=A_1A_2A_3$

② B 表示三次中至少有一次取到合格产品. $B=A_1\cup A_2\cup A_3$

③ C 表示三次中恰有两次取到合格产品. $C=\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$

④ D 表示三次中最多有一次取到合格产品. $D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

$$=\overline{A}_1\overline{A}_2\cup \overline{A}_1\overline{A}_3\cup \overline{A}_2\overline{A}_3$$

三、事件间的关系与事件的运算

- 例：考察某同学在一次考试中的成绩，记

$$\begin{cases} A: & \text{优秀}, [90, 100] \text{分} \\ B: & \text{良好}, [80, 90) \text{分} \\ C: & \text{中等}, [70, 80) \text{分} \\ D: & \text{一般}, [60, 70) \text{分} \\ F: & \text{不及格}, [0, 60) \text{分} \\ P: & \text{及格}, [60, 100] \text{分} \end{cases}$$

① 事件 A, B, C, D, F 为两两互不相容事件.

② 事件 $A \cup B \cup C \cup D \cup F = S$.

③ 事件 P, F 为对立事件，$P = \overline{F}$.

④ 事件 $P = A \cup B \cup C \cup D$.

三、事件间的关系与事件的运算

- 例：化简下列事件.

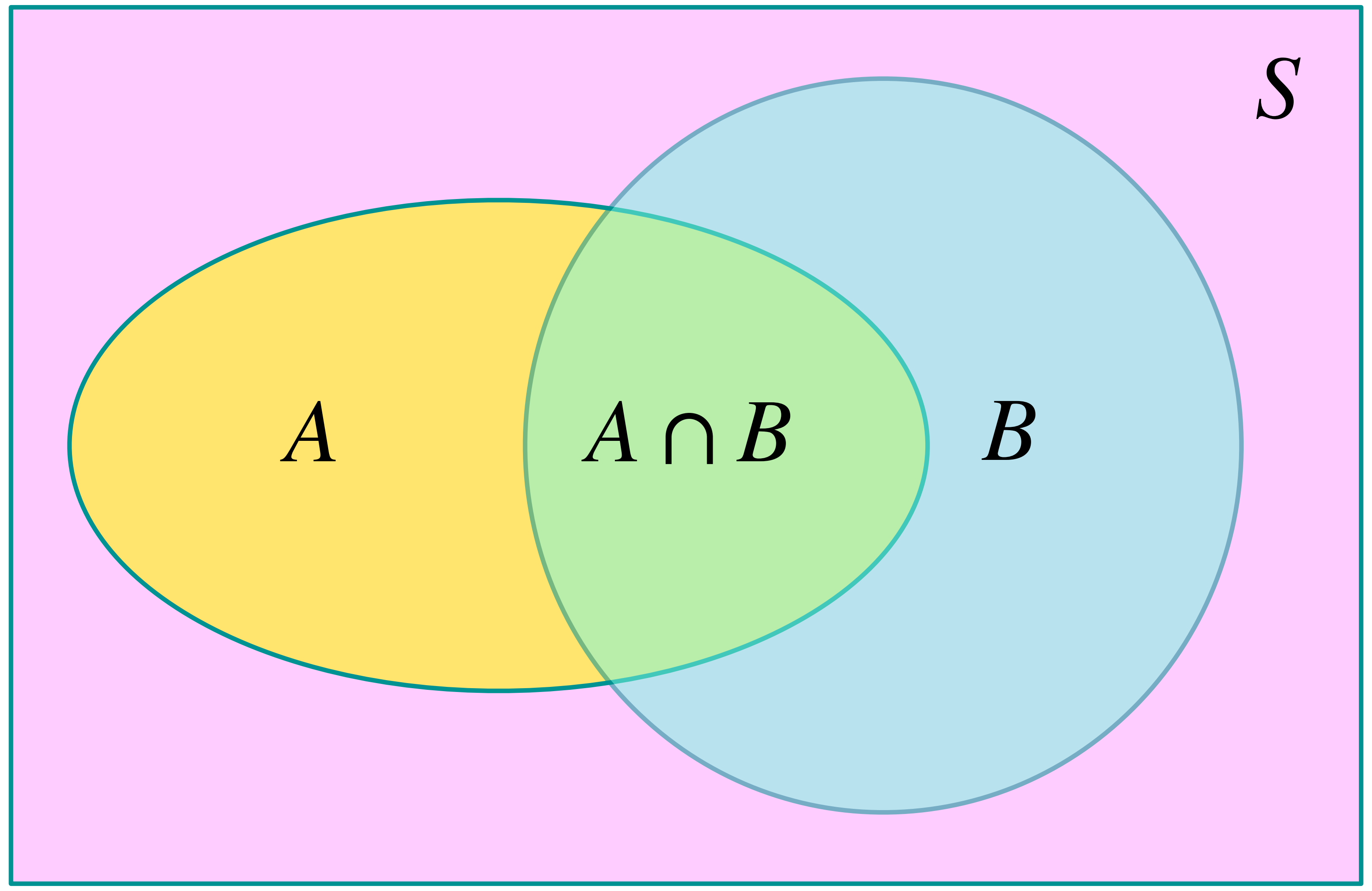
① $$(\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=\left((\bar{A}\cup\bar{B})\bar{A}\right)\bigcup\left((\bar{A}\cup\bar{B})B\right)$$

$$=(\bar{A}\bar{A}\cup\bar{B}\bar{A})\bigcup(\bar{A}B\cup\bar{B}B)$$

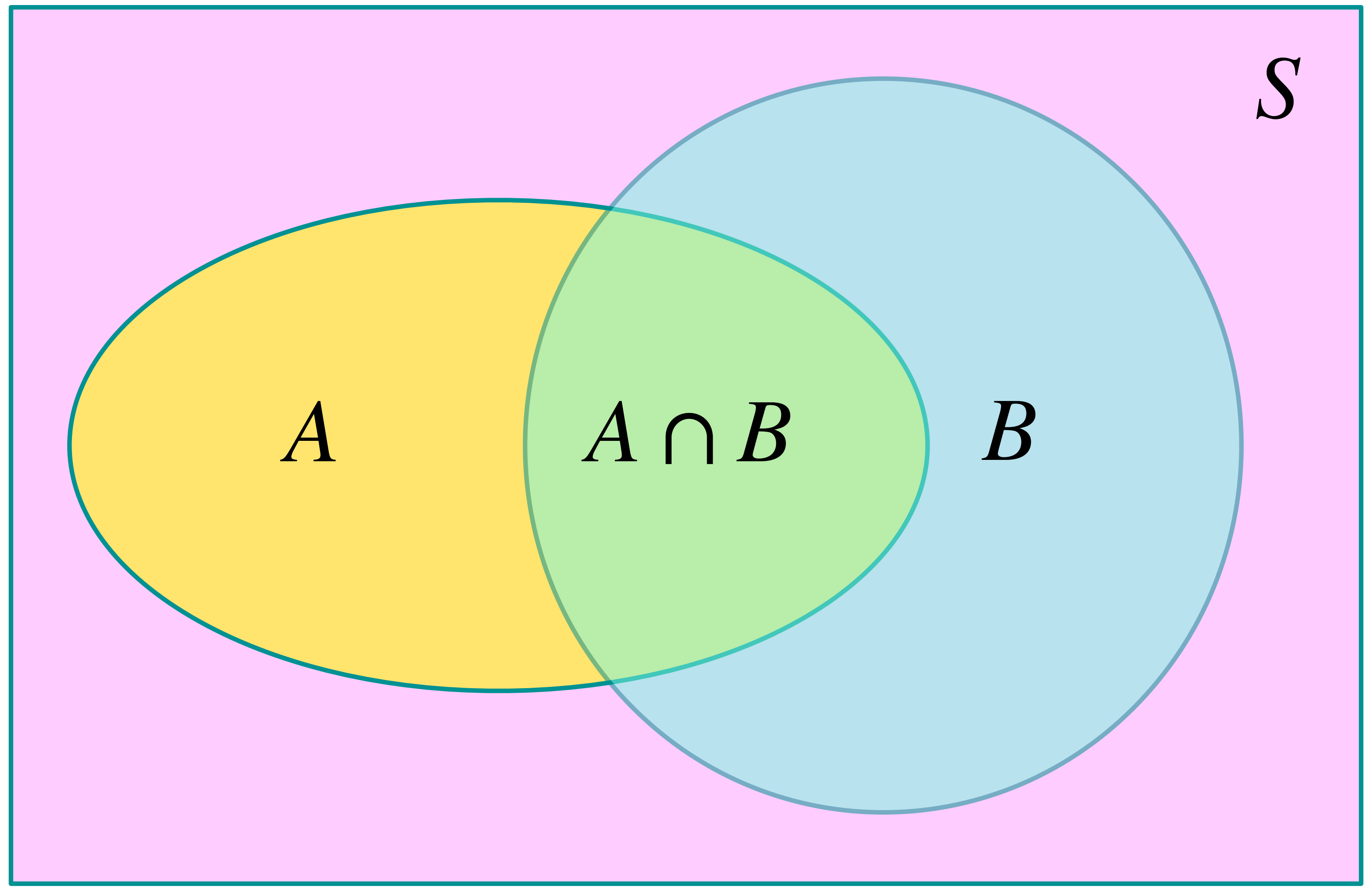
$$=(\bar{A}\cup\overline{A\cup B})\bigcup(\bar{A}B\cup\Phi)$$

$$=\bar{A}\bigcup(\bar{A}B)$$

$$=\bar{A}$$



三、事件间的关系与事件的运算



- 例：化简下列事件.

② $A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}$

$$
\begin{aligned}
A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B} &= A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B} \\
&= \left(A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}\right) \bigcup \left(\overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}\right) \\
&= \left(\left(A \cup \overline{A}\right)\overline{B}\right) \bigcup \left(\overline{A}\left(B \cup \overline{B}\right)\right) \\
&= \left(S\overline{B}\right) \bigcup \left(\overline{A}S\right) \\
&= \overline{B} \bigcup \overline{A} \\
&= \overline{AB}
\end{aligned}
$$

四、事件与集合的关系

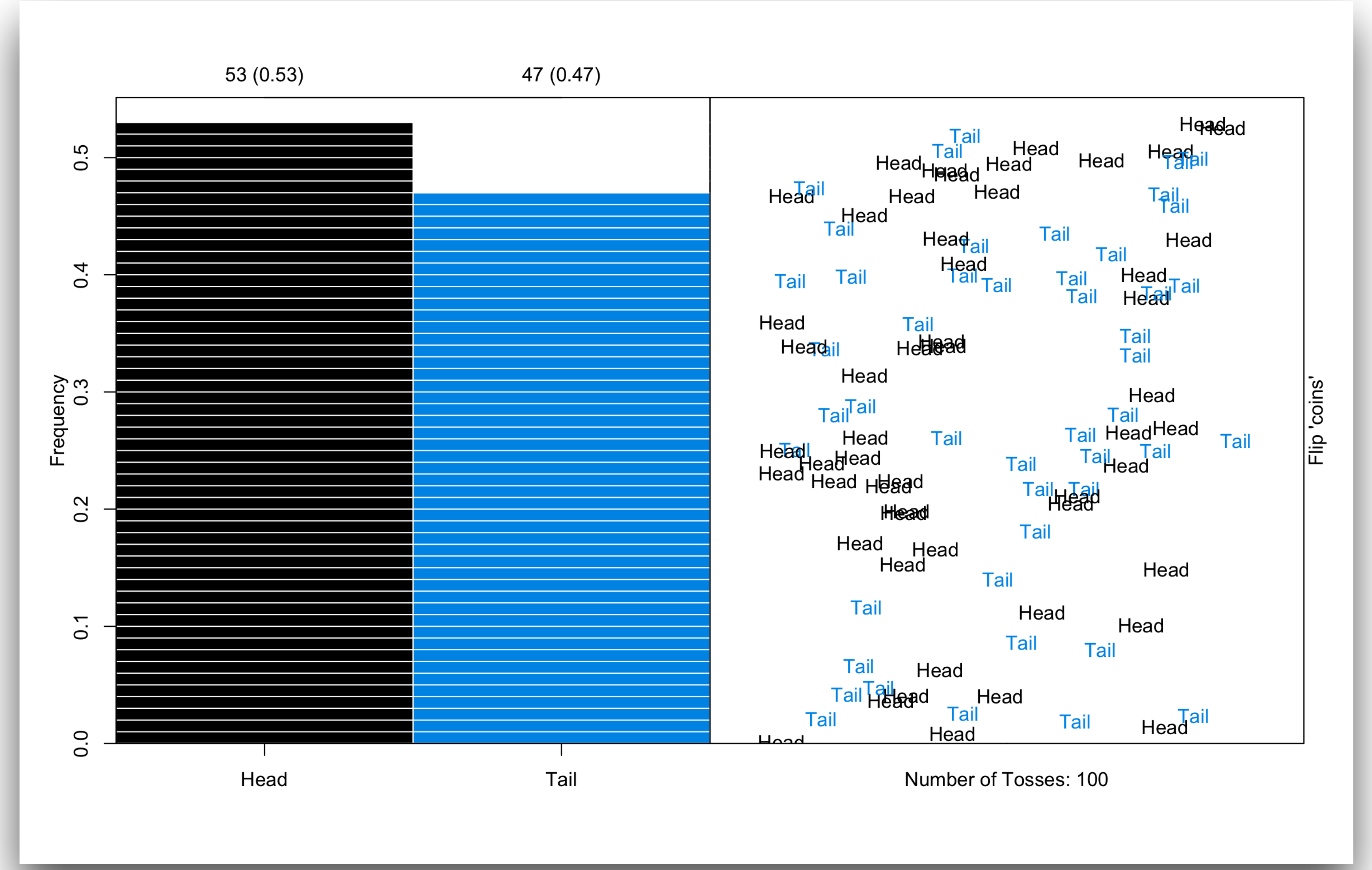
符号	集合论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
Φ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	子集	随机事件
$\omega \in A$	ω 是 A 的元素	事件 A 包含样本点 ω
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 发生则 B 发生
$AB = \Phi$	A, B 不相交	A, B 不可能同时发生
$A \cup B$	并集	A, B 至少有一个发生
$A \cap B$	交集	A, B 同时发生
$A - B$	差集	A 发生而 B 不发生
$\bar{A}$	余集	A 不发生

1.3 古典概型

一、频率

- 对于一个随机事件 A，在一次随机试验中，它是否会发生，事先不能确定. 但我们会问，在一次试验中事件 A 发生的可能性有多大？并希望找到一个合适的 数 (概率) 来表示事件 A 在一次试验中发生的 可能性大小.

```
## 模拟掷一枚均匀硬币 100 次
library(animation)
ani.options(interval = 0.2, nmax = 100)
flip.coin(faces = c("Head", "Tail"), type = "n", prob = c(0.5, 0.5), col = c(1, 4))
```



一、频率

- 频率的定义：在相同的条件下进行了 n 次重复试验，记 n_A 是随机事件 A 发生的次数 (称为频数)，定义随机事件 A 发生的频率为

$$F_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

频率描述了一个随机事件发生的频繁程度.

- 频率的表现：大量的随机试验表明

① 频率具有随机波动性，即对于同一个随机事件来说，在相同的试验次数下，得到的频率不一定会相同.

② 频率还具有稳定性，总是在某一个具体数值附近波动，随着试验次数的不断增加，频率的波动会越来越小，逐渐稳定在这个数值.

③ 频率的稳定性表明随机现象也具有规律性，是在大量重复试验下体现出来的规律，称为统计规律.

一、频率

- 例：历史上著名的投掷硬币试验.

Experimenter	n	n_A	$\frac{n_A}{n}$
De Morgan	2048	1061	0.5180
Puffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

- 例：英文字母的使用频率.

Letter	Frequency	Letter	Frequency	Letter	Frequency
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

HVOCZHVODXDVIN VMZ GDFZ AMZIXCHZI;
RCVOZQZM TJP NVT OCZH,
OCZT OMVINGVOZ DIOJ OCZDM JRI GVIBPVBZ
VIY AJMOCRDOC DO DN NJHZOCDIB ZIODMZGT YDAAZMZIO.
BJZOCZ

一、频率

- 概率的描述性定义
  - 频率的稳定性说明：随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的、不随人们意志改变的一种客观属性，因此可以对它进行度量.
  - 随机事件 A 发生的可能性大小的度量，称为 A 发生的 概率 (probability)，记作 $P(A)$.
  - 自然地，可以采用一个随机事件的频率的稳定值去描述它在一次试验中发生的可能性大小，即用频率的极限来作为概率的定义，称为概率的统计定义.
- 统计概率的特性

① 直观、易于理解，生活中比比皆是.

② 大量重复试验的局限性，只能得到近似值.

③ 用现象定义本质，未抓住概率本质.

一、频率

- **频率的性质**

① 非负有界性：$0 \le F_n(A) \le 1.$

② 规范性：$F_n(S) = 1.$

③ 有限可加性：如果 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 两两互不相容，则

$$F_n\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m\right) = F_n\left(A_1\right) + F_n\left(A_2\right) + \cdots + F_n\left(A_m\right).$$

二、古典概率模型与计算公式

- 古典概型 (等可能概率模型)：试验 E 满足

① 样本空间只含有限多个样本点，即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

② 每个样本点发生的可能性相同，即 $P\left(\{\omega_i\}\right) = \dfrac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

- 古典概型概率的计算公式：$P(A) = \dfrac{\text{随机事件 } A \text{ 包含的样本点个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 包含的样本点总数}}$.

- 注意：古典概型问题中构造样本空间时，必须保证每个样本点等可能发生.

- 例：抛一枚均匀硬币 3 次, 计算恰好出现一次正面向上 (事件 A) 的概率.

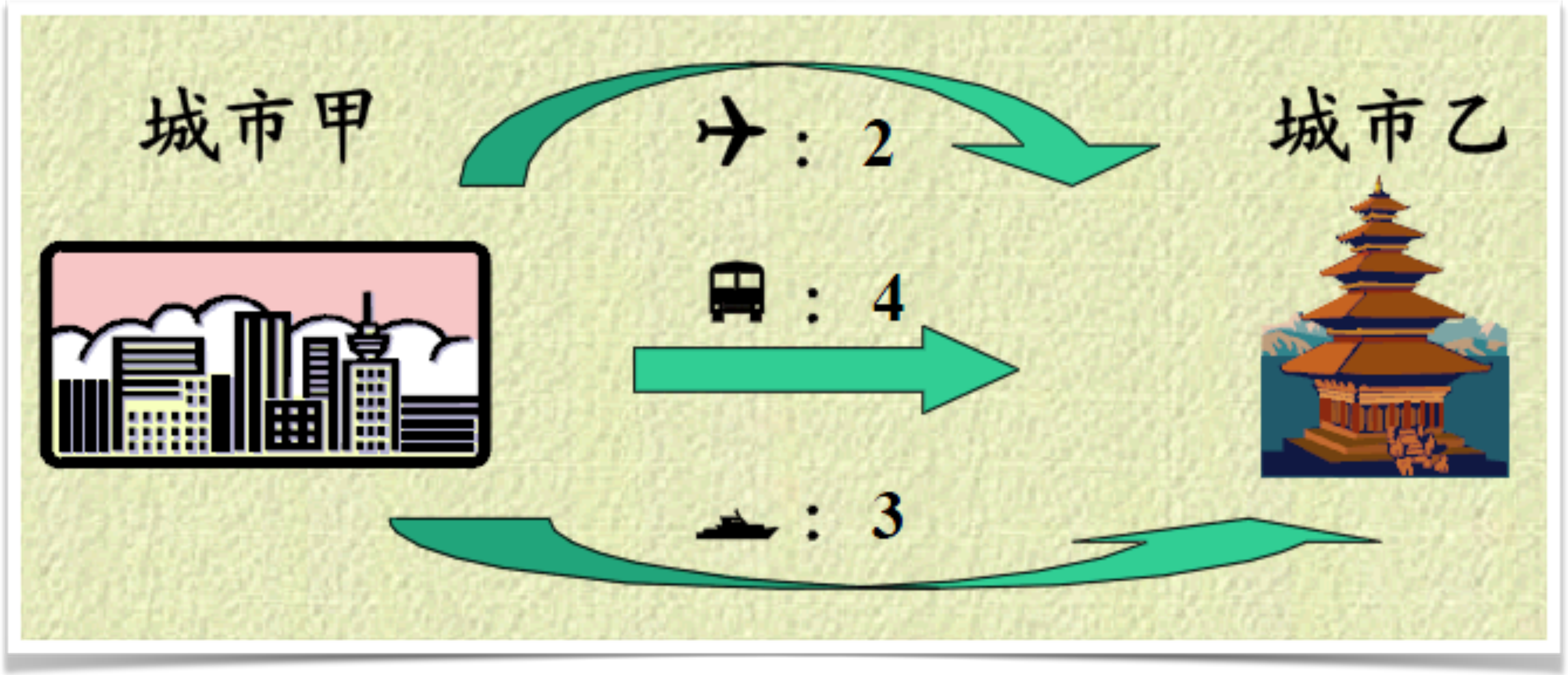
$$\Omega_1 = \{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\} \Longrightarrow P(A) = \frac{3}{8}.$$

$$\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3\} \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{4}.$$

三、组合数学相关知识

加法原理与乘法原理

- 加法原理：假设做一件事情可采用 A 或 B 两类不同方式，A 方式有 n 种不同的方法可以完成这件事，B 方式有 m 种不同的方法可以完成这件事. 则完成这件事情一共有 $n+m$ 种不同的方法.
- 类似地，如果有若干类方式, 就把所有方式的各种方法全部相加.

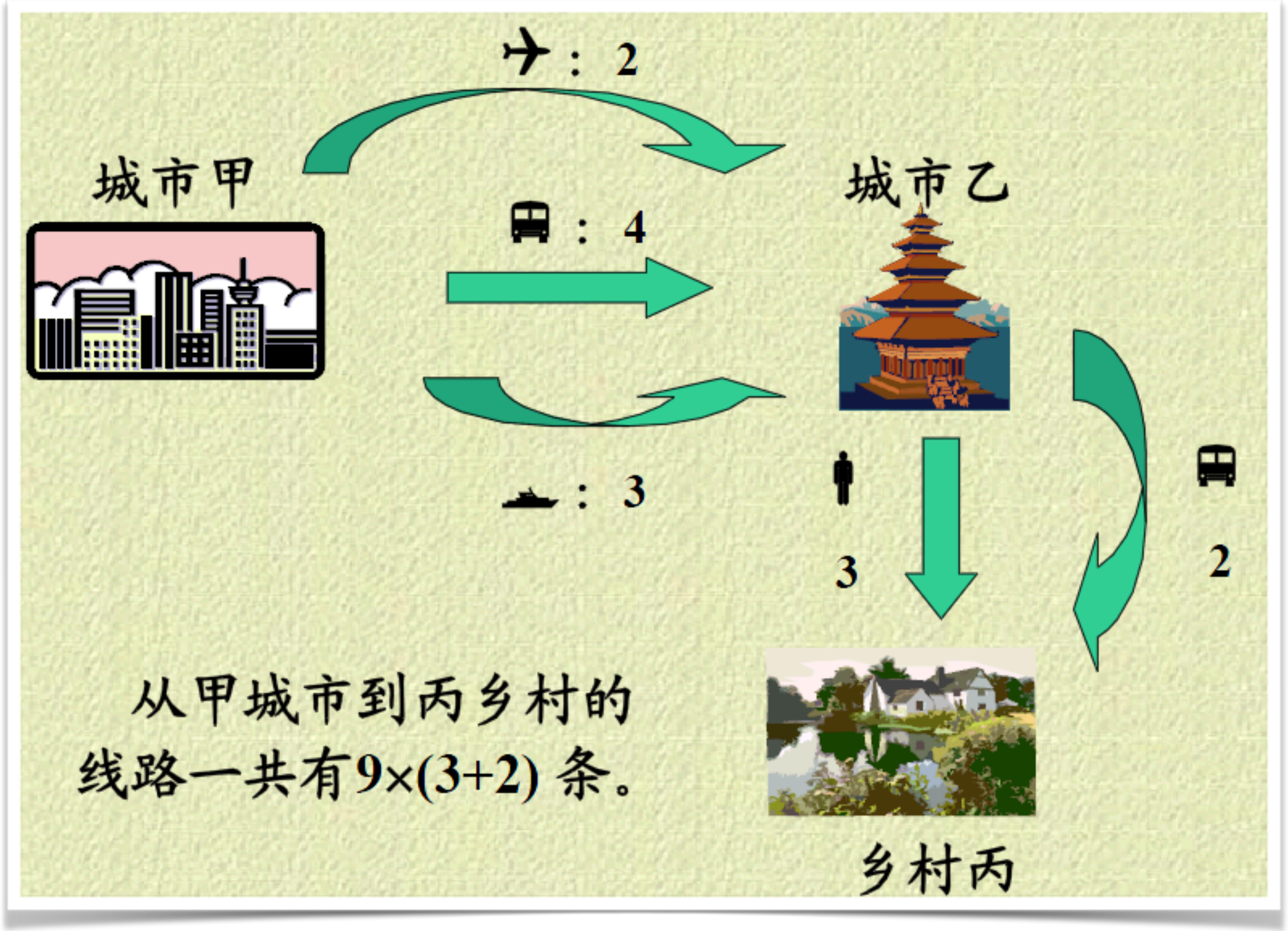


从甲城市到乙城市共有 $2+4+3=9$ 条线路.

三、组合数学相关知识

- 加法原理与乘法原理

  - 乘法原理：假设做一件事情必须经过 A 与 B 两个不同步骤，步骤 A 包含了 n 种不同的方法，步骤 B 包含 m 种不同的方法，则完成这件事情一共有 $n \times m$ 种不同方法.
  - 类似地，如果有若干个步骤，就把所有步骤的各种方法全部相乘.



从甲城市到丙乡村共有

$9 \times (3+2) = 45$ 条线路.

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 不可重复的排列：从 n 个不同的元素中无放回地任意取出 r 个 $(1 \le r \le n)$ 排成有顺序的一列（或者从n个不同的元素中不放回地一个个取出元素，共取出了r个元素），称为 n 取 r 的不可重复排列 (又称为选排列) , 其不同的排列方法共有

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  - 特别当 $r = n$ 时，上述选排列称全排列. 全排列数为

$$P_n = A_n^n = n!$$

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 可以重复的排列：从 n 个不同元素中允许放回地任意取出 r 个 $(1 \leq r \leq n)$ 出来排成有顺序的一列 (即取出的这些元素可以相同). 所有不同的排列方式共有

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{r} = n^r$$

  - 例：如果一个城市的电话号码是 8 位数字，那么理论上这个城市可以容纳 10^8，即一亿部电话.

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 二项式组合：从 n 个不同元素中不允许放回任意取 $r(r \leq n)$ 个构成一个集合，称为 n 取 r 的组合. 构成这个集合的不同组合方法共有

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (r \leq n)$$

  - 称 $\binom{n}{r}$ 为二项系数，它是二项式 $(a+b)^n$ 展开的系数

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 多项式组合：把 n 个不同元素分成 k 个部分，各个部分包含的元素个数分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 个；则全部不同的分配方式共有

$$\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k} = \frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots\ r_k!}$$

  - 称 $\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k}$ 为多项系数，它是多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ 展开的系数

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} \binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

  - 例：桥牌比赛中，把 52 张扑克牌平均分给 4 个人，每人 13 张，则不同的分配方案有

$$\binom{52}{13,\ 13,\ 13,\ 13} = \frac{52!}{13! \times 13! \times 13! \times 13!} \approx 5.364474 \times 10^{28}$$

三、组合数学相关知识

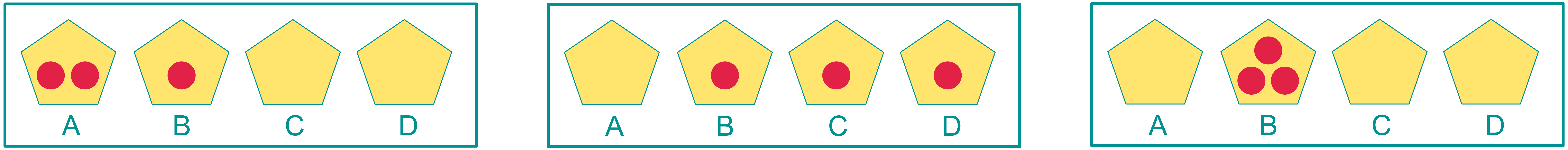
● 基本排列组合公式

○ 可重复组合：从 n 个不同元素中允许放回任意取 r 个构成一个集合（不计顺序），称为 n 取 r 的可重复组合. 不同的组合方法共有

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

○ 例：设 $n = 4,\ r = 3$，考虑 4 只有序的匣子共装有 3 个不可分辨的球.

一个可重复组合对应于 3 个球在 4 个匣子中的一种分配情况，例如



○ 注：考虑方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ 非负整数解的个数.

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式
  - 关于二项系数的一些公式
    - 设 n, r 为自然数，x 为任意实数. 将排列组合公式中的自然数 n 推广至可以取成任意实数 x，则有定义:

$$A_x^r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$$

$$C_x^r = \binom{x}{r} = \frac{A_x^r}{r!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$$

    - 规定 $0! = 1$，则 $\binom{x}{0} = 1$.

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 关于二项系数的一些公式

    - 设 n, r 为自然数，a, b, x 为任意实数，则下列公式成立

(1). $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^r b^{n-r}$$

$$\xRightarrow{a=b=1}\quad 2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式
  - 关于二项系数的一些公式
    - 设 n, r 为自然数，a, b, x 为任意实数，则下列公式成立

(2). $\binom{-x}{r} = (-1)^r \binom{x+r-1}{r}$ ， 或 $\binom{x}{r} = (-1)^r \binom{-x+r-1}{r}$

$$\binom{-x}{r} = \frac{-x(-x-1)\cdots(-x-r+1)}{r!}$$

$$= (-1)^r \frac{x(x+1)\cdots(x+r-1)}{r!}$$

$$= (-1)^r \binom{x+r-1}{r}$$

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 关于二项系数的一些公式

    - 设 n, r 为自然数，a, b, x 为任意实数，则下列公式成立

$$(3).\quad \binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{a}{i}\binom{b}{n-i}, \quad \text{特别} \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

Taylor 展开：

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k, \quad (1+x)^b = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{b}{l} x^l$$

$$(1+x)^{a+b} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+b}{n} x^n} = (1+x)^a \cdot (1+x)^b = \boxed{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k\right] \cdot \left[\sum_{l=0}^{\infty} \binom{b}{l} x^l\right]}$$

x^n 的系数相等

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式
  - 关于二项系数的一些公式
    - 设 n, r 为自然数，a, b, x 为任意实数，则下列公式成立

$$(3).\quad \binom{a+b}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i},\quad \text{特别}\quad \binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

$$\binom{a+b}{n} = \binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\cdots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}$$

$$(1+x)^{a+b}=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n}=(1+x)^a\cdot(1+x)^b=\boxed{\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k\right]\cdot\left[\sum_{l=0}^{\infty}\binom{b}{l}x^l\right]}$$

x^n 的系数相等

三、组合数学相关知识

- 基本排列组合公式

  - 关于二项系数的一些公式

    - 设 n, r 为自然数，a, b, x 为任意实数，则下列公式成立

$$(3).\quad \binom{a+b}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}，\quad \text{特别}\quad \binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

$$a=b=n \quad\Longrightarrow\quad \binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}$$

$$\Longrightarrow\quad \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$