

概 率 论

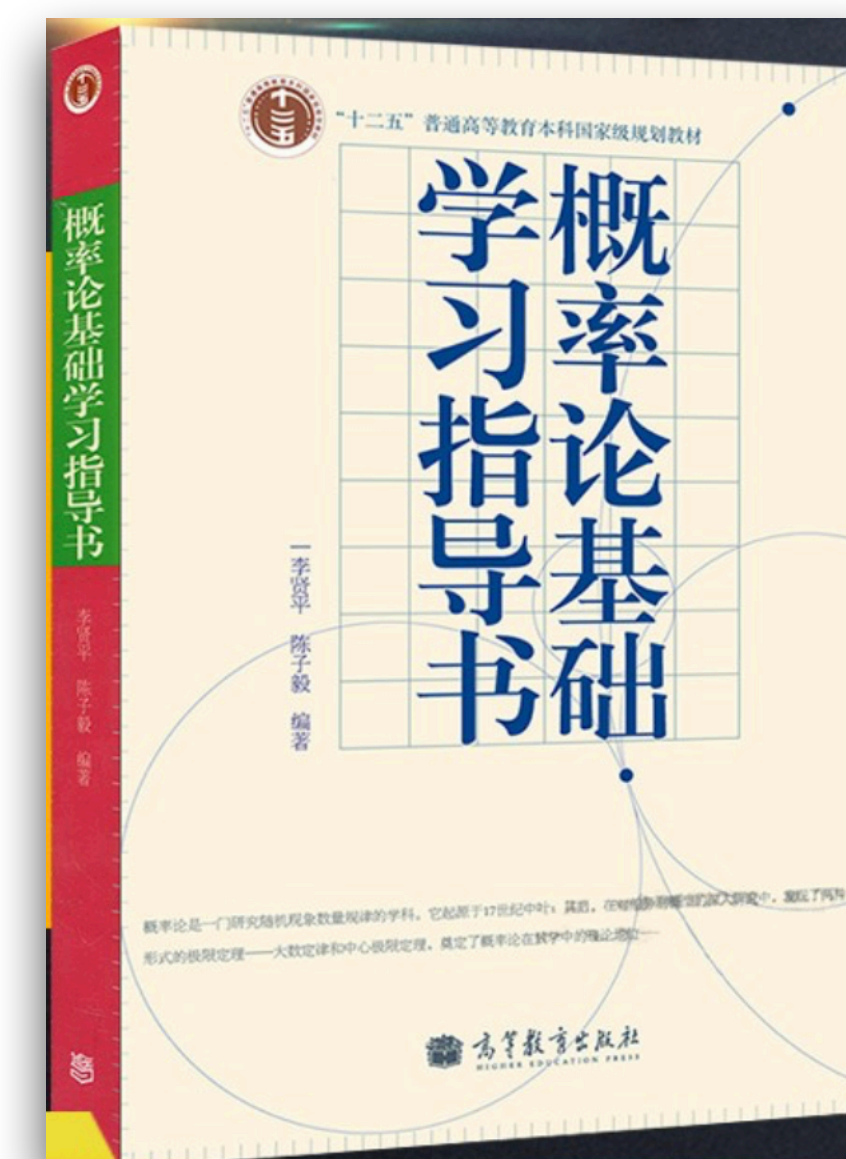
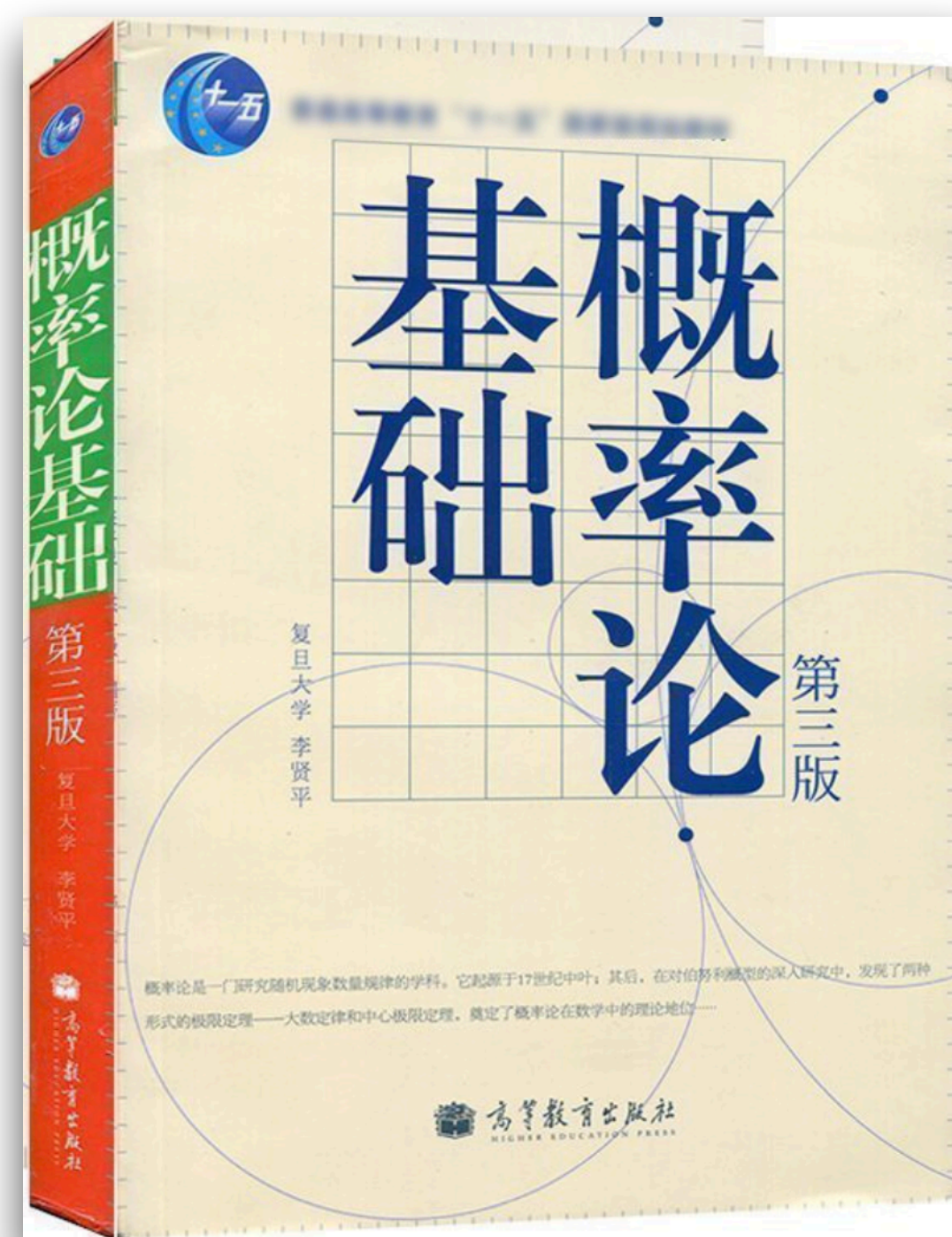
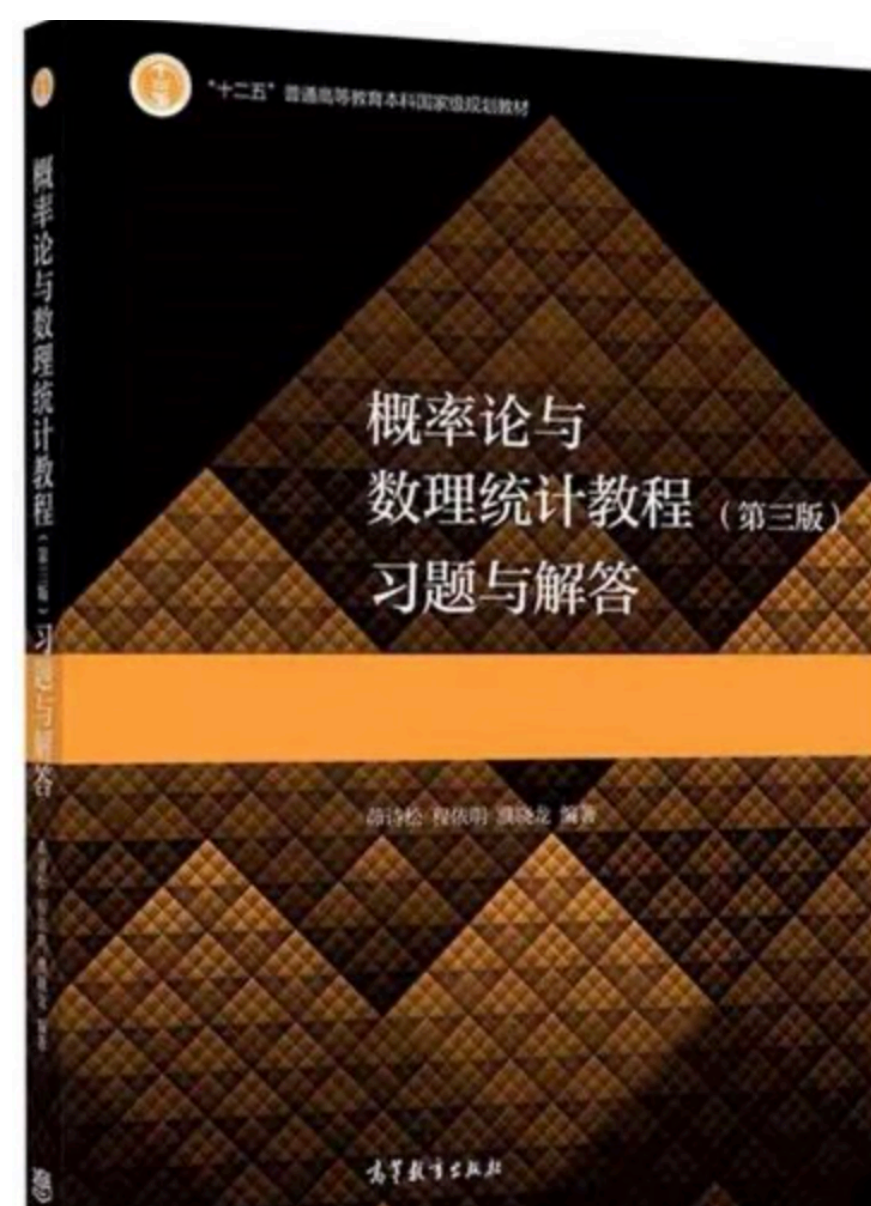
Probability

讲师：任明辰

课件作者：肖磊教授

统计学专业2024级概率论课程课件

教材与参考书



课程教材：《概率论基础》，第三版，李贤平编，高等教育出版社

参考教材：《概率论与数理统计》，第三版，茆诗松、程依明、濮晓龙编著，高等教育出版社

课程信息

- 答疑时间：教学周内每周四 16:00-18:00，周五 11:30-13:30，亦可通过 QQ 答疑.
- 答疑地点：C5 楼 II-226 数学系教师办公室.
- Email: 3498608935@qq.com

课程目录

- 第 0 章：前言

- ✓ 概率论研究什么
- ✓ 怎样学习这门课
- ✓ 如何表示学好了这门课
- ✓ 概率论与数理统计的发展历史

课程目录

- 第 0 章：前言
- 第 1 章：事件与概率
 - ✓ 随机现象与统计规律
 - ✓ 样本空间与事件
 - ✓ 古典概型
 - ✓ 几何概型
 - ✓ 概率空间

课程目录

- 第 0 章：前言
- 第 1 章：事件与概率
- 第 2 章：条件概率与统计独立性
 - ✓ 条件概率，全概率公式与贝叶斯 (Bayes) 公式
 - ✓ 事件独立性
 - ✓ 伯努利 (Bernoulli) 试验与直线上的随机游动
 - ✓ 二项分布与泊松 (Poisson) 分布

课程目录

- 第 0 章：前言
- 第 1 章：事件与概率
- 第 2 章：条件概率与统计独立性
- 第 3 章：随机变量与分布函数
 - ✓ 随机变量及其分布
 - ✓ 随机向量，随机变量的独立性
 - ✓ 随机变量的函数及其分布

课程目录

- 第 0 章：前言
- 第 1 章：事件与概率
- 第 2 章：条件概率与统计独立性
- 第 3 章：随机变量与分布函数
- 第 4 章：数字特征与特征函数
 - ✓ 数学期望
 - ✓ 方差，相关系数，矩
 - ✓ 熵与信息
 - ✓ 母函数
 - ✓ 特征函数
 - ✓ 多元正态分布

课程目录

- 第 0 章：前言
- 第 1 章：事件与概率
- 第 2 章：条件概率与统计独立性
- 第 3 章：随机变量与分布函数
- 第 4 章：数字特征与分布函数
- 第 5 章：极限定理
 - ✓ 伯努利 (Bernoulli) 试验场合的极限定理
 - ✓ 收敛性
 - ✓ 独立同分布场合的极限定理
 - ✓ 强大数定律
 - ✓ 中心极限定理

第 0 章 前言

概率论与数理统计是研究什么的?

例：向空中抛一物体必然落向地面
水加热到 100°C 必然沸腾
异性电荷相吸引
放射性元素发生蜕变 ……

在一定条

研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科

现象

例：抛一枚硬币，结果可能正(反)面朝上
向同一目标射击，各次弹着点都不相同
某地区的日平均气温
掷一颗骰子，可能出现的点数 ……

在试验或观察前无法预知出现什么结果 — 随机现象

概率论与数理统计是研究什么的?

- 概率论与数理统计是两个学科
 - 概率论：数学的一个分支，研究如何定量描述随机现象及其规律.
 - 数理统计：以数据为唯一研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据现象的某些规律以进行预测或决策. 大数据时代的来临，更为统计的发展带来了极大的机遇和挑战.

学思想： 概率论特殊的研究对象包含了许多独特的思维方式和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律性，是其它学科中没有的。**例：** 通过比较各种事件出现的可能性的进行决策的思想。

学方法： 定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。

学应用： 尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学习课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。

学软件： 数据处理的结果需要通过计算机实现。应熟练掌握使用统计软件 (本课程用 R) 进行结果分析。

多做题： 概率论作为一门数学学科，通过做题加深理解是必须要有的过程。

注意：

1. 概率论需要高中阶段复杂的排列组合的计算吗？
2. 概率论与数学分析和高等代数的联系是什么？

检验《概率论与数理统计》这门课程学好与否，除了掌握教材内容，会做作业，考试成绩优良外，以下两条可以作为自测的标准：

- 是否对**随机**有足够的认识
- 是否对**数据**有兴趣、有感觉

能随时随地用**随机**的观点去观察、看待、处理周围的事物。如：探索物理、化学或生物学中随机现象的规律性。

要善于发现、善于利用、善于处理周围的数据。如：从网购数据、超市零售数据、银行客户资料发现有价值的关联。

16 世纪以前:



姓名: Al-Kindi (肯迪)
生卒: 796 ~ 873 AD
国籍: 伊拉克
成就: 数学家、物理学家、音乐家等



The first page of al-Kindi's manuscript
"On Deciphering Cryptographic Messages"

16 世纪以前:



姓名: Al-Kindi
生卒: 801 ~ 873 AD
国籍: 伊拉克
成就: 数学家、物理学家、音乐家等

- 如果我们知道加密消息的语言, 解决加密消息的一种方法是找到一个相同语言的不同明文, 长度足以填满一张纸左右, 然后我们计算每个字母的出现次数。
its language is to find a different plaintext of the same language long enough to fill one sheet or so, and then we count the occurrences of each letter.
- 我们将出现频率最高的字母称为“第一个”, 将出现频率第二高的字母称之为“第二个”, 然后将出现频率第三高的字母命名为“第三个”, 以此类推, 直至我们考虑到明文样本中的所有不同字母。
the next most occurring letter the "second", the following most occurring letter the "third", and so on, until we account for all the different letters in the plaintext sample.
- 然后, 我们查看要解决的密文, 并对其符号进行分类。
we also classify its symbols.

16 世纪以前:



姓名: Al-Kindi

生卒: 801 ~ 873 AD

国籍: 伊拉克

成就: 数学家、物理学家、音乐家等

- 我们找到出现次数最多的符号, 将其改为明文样本 to the form of the "first" letter of the plaintext sample, the 的第一个字母, 将下一个出现次数最多的符号改为 "第二" 个字母, 再将下一个出现次数最多的符号改为第三 the "second" letter, and the following most common 个字母, 以此类推, 直到计算出所有要求解的密码 symbol is changed to the form of the "third" letter, and so on, until we account for all symbols of the cryptogram we want to solve.

16 世纪以前:

- 1663 年出版的 Liber de ludo aleae (赌博论, 或机会游戏手册) 的小册子, 该书被认为是第一本概率论著作。他尝试计算掷 2 ~ 3 颗骰子游戏中, 某些点数出现的概率.

$$\frac{\text{某些点数出现的次数}}{\text{总的次数}}$$



姓名: Gerolamo Cardano (吉罗拉莫·卡尔达诺)

生卒: 1501- 1576

国籍: 意大利

成就: 数学家、物理学家、化学、天文等

17 世纪：1654 年



姓名：Pierre de Fermat
(皮埃尔·德·费马特)
生卒：1607–1665
国籍：法国
成就：数学家、物理学家

- 17 世纪中叶，法国贵族 De Mere 与人进行赌博，二人赌技相当，各出赌注 50 法郎，约定无平局，谁先赢 3 局则获全部赌注。当甲赢了 2 局、乙赢了 1 局时，有急事中止了赌博。问如何分赌资才算公平？
- 均分，对甲不公平。全部归甲，对乙不公平！
- De Mere 遂向 Pascal 写信求教，Pascal 与 Fermat 通信讨论了这个问题，诞生了概率理论中的第一个重要概念：**期望** (Expectation)。



姓名：Blaise Pascal
(布莱士·帕斯卡)
生卒：1623–1662
国籍：法国
成就：数学家、物理学家、哲学家等

17 世纪：1654 年



姓名：Pierre de Fermat
生卒：1607–1665
国籍：法国
成就：数学家、物理学家

- 按已赌局数和再赌下去的期望分：因为最多再赌两局必分胜负，共有三种情况
 - ① 第三局甲赢： $\frac{1}{2}$
 - ② 第三局乙赢，第四局甲赢： $\frac{1}{4}$
 - ③ 第三局乙赢，第四局乙赢： $\frac{1}{4}$
- 由于赌技相同，所以甲赢得 100 法郎的可能性为 $\frac{3}{4}$ ，乙赢得 100 法郎的可能性为 $\frac{1}{4}$.
- 所以给甲分 $\frac{3}{4} \times 100 = 75$ 法郎，给乙分 $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ 法郎.
- 既考虑了已赌局数，又包含了再赌下去的期望，因此更为合理一些.



姓名：Blaise Pascal
生卒：1623–1662
国籍：法国
成就：数学家、物理学家、哲学家等

17 世纪：1657 年



姓名：Christiaan Huygens

(克里斯蒂安·惠更斯)

生卒：1629–1695

国籍：荷兰

成就：数学家、物理学家、天文学等

- 基于分赌资问题，在 Pascal 的鼓励下，在期望基础上继续研究，出版了《机会游戏的推理》(On Reasoning in Games of Chance)一书，较为系统阐述了概率论的基本观点。

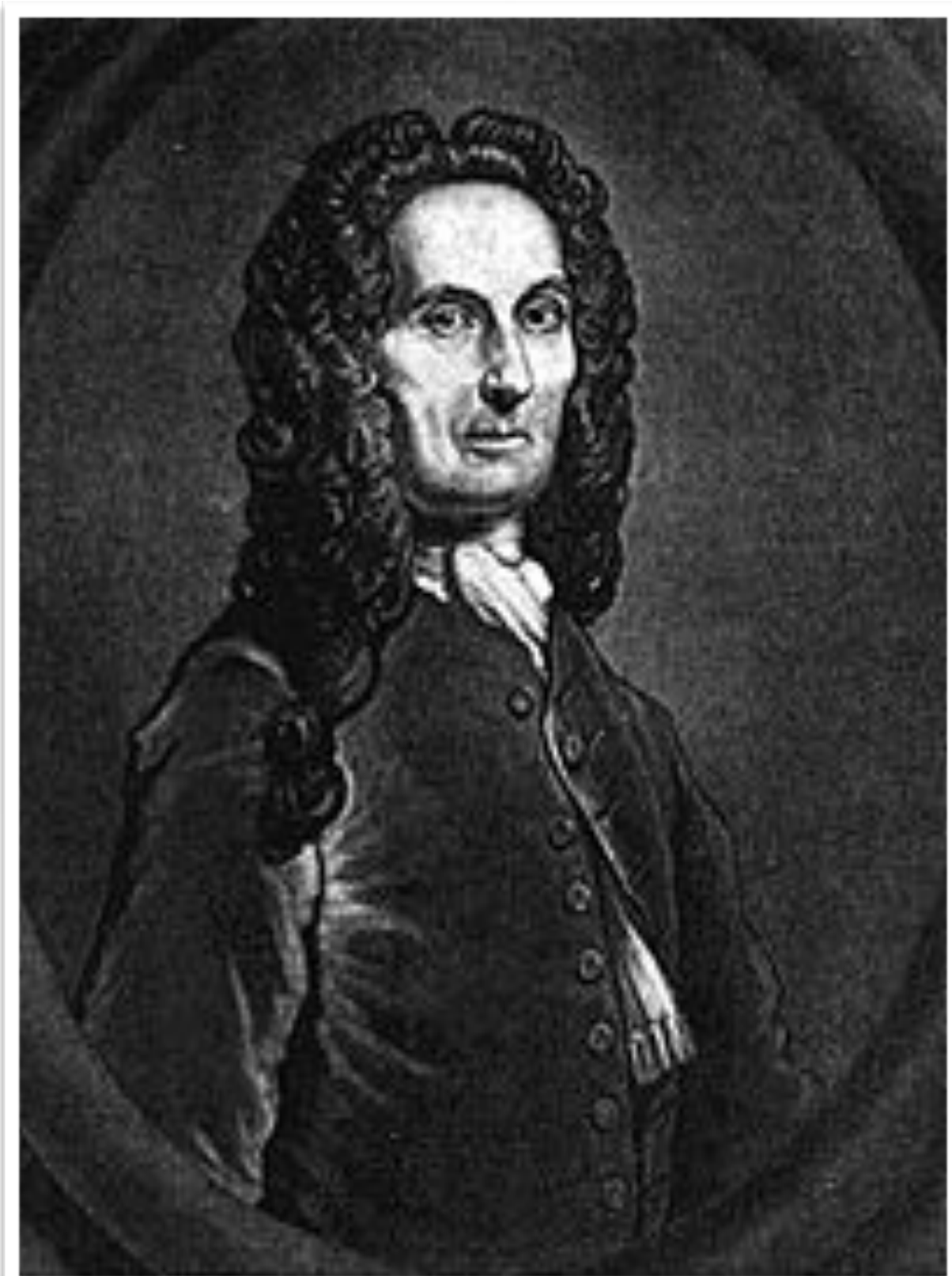
17 世纪末 — 18 世纪初：大数定理！



姓名：Jacob Bernoulli
(贾科布·伯努利)
生卒：1654–1705
国籍：瑞士
成就：数学家、物理学家

- 人口统计学的发展为大数定理的产生提供了思想基础.
- 伯努利逝后，他侄子于 1713 年整理出版了《推理的艺术》，提出了在大量重复实验中，事件的频率与概率的偏差出现较大的可能性很小.

18 世纪 — 19 世纪初



姓名: Abraham de Moivre

(亚伯拉罕·棣·美弗)

生卒: 1667–1754

国籍: 法国, 住英国

成就: 数学家

- 1718 年的《机会论》(The Doctrine of Chances) 是概率论较早的专著之一, 首次定义了独立事件 (independent event) 的乘法定理, 给出了二项分布 (binomial distribution) 的公式, 讨论了掷骰子和其他赌博的许多问题.
- 1730 年出版的另一专著《分析杂论》中最早使用概率积分, 将概率论用于保险事业.

18 世纪 — 19 世纪初

- 1763 年由 Richard Price 整理发表了 Bayes 的成果《An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances》，对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用。
- 首先将归纳推理法用于概率论基础理论，并创立了 Bayes 统计理论，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献。
- Bayes 公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经成为概率统计中的一个冠以 Bayes 名字的学派，在自然科学及国民经济的许多领域中有着广泛应用。



姓名：Thomas Bayes
(托马斯·贝叶斯)

生卒：1701–1761

国籍：英国

成就：数学家，统计学

18 世纪 — 19 世纪初



姓名: Carl Friedrich Gauss
(卡尔·弗里德里希·高斯)

生卒: 1777–1855

国籍: 德国

成就: 数学家、物理学家

- 17岁的 Gauss 发现了质数分布定理和最小二乘法.
- 通过对足够多的测量数据的处理后, 可以得到一个新的、概率性质的测量结果. 在此基础上, Gauss 随后专注于曲面与曲线的计算, 并成功得到 Gauss 钟形曲线 (正态分布曲线), 其函数被命名为标准正态分布 (或 Gauss 分布), 并在概率计算中大量使用.
- Gauss 总结了复数的应用, 并且严格证明了每一个 n 阶的代数方程必有 n 个实数或者复数解.

18 世纪 — 19 世纪初

- Laplace 最有代表性的专著有《天体力学》、《宇宙体系论》和《概率分析理论》。
- Laplace 写过一篇关于概率的哲学论文，他计算出明天太阳会升起的概率为 $\frac{d+1}{d+2}$ ，其中 d 是过去太阳升起的天数，并指出这个概率对他而言是太大了，于当下看不到有什么力量能阻挡明天的日出。
- 1812 年出版的《概率分析理论》，实现了由组合技巧向分析方法的过渡。



姓名：Pierre-Simon Laplace
(皮埃尔·西蒙·拉普拉斯)

生卒：1749–1827

国籍：法国

成就：数学家，统计学

18 世纪 — 19 世纪初



姓名: Simeon-Denis Poisson
(西莫恩·德尼·泊松)

生卒: 1781–1840

国籍: 法国

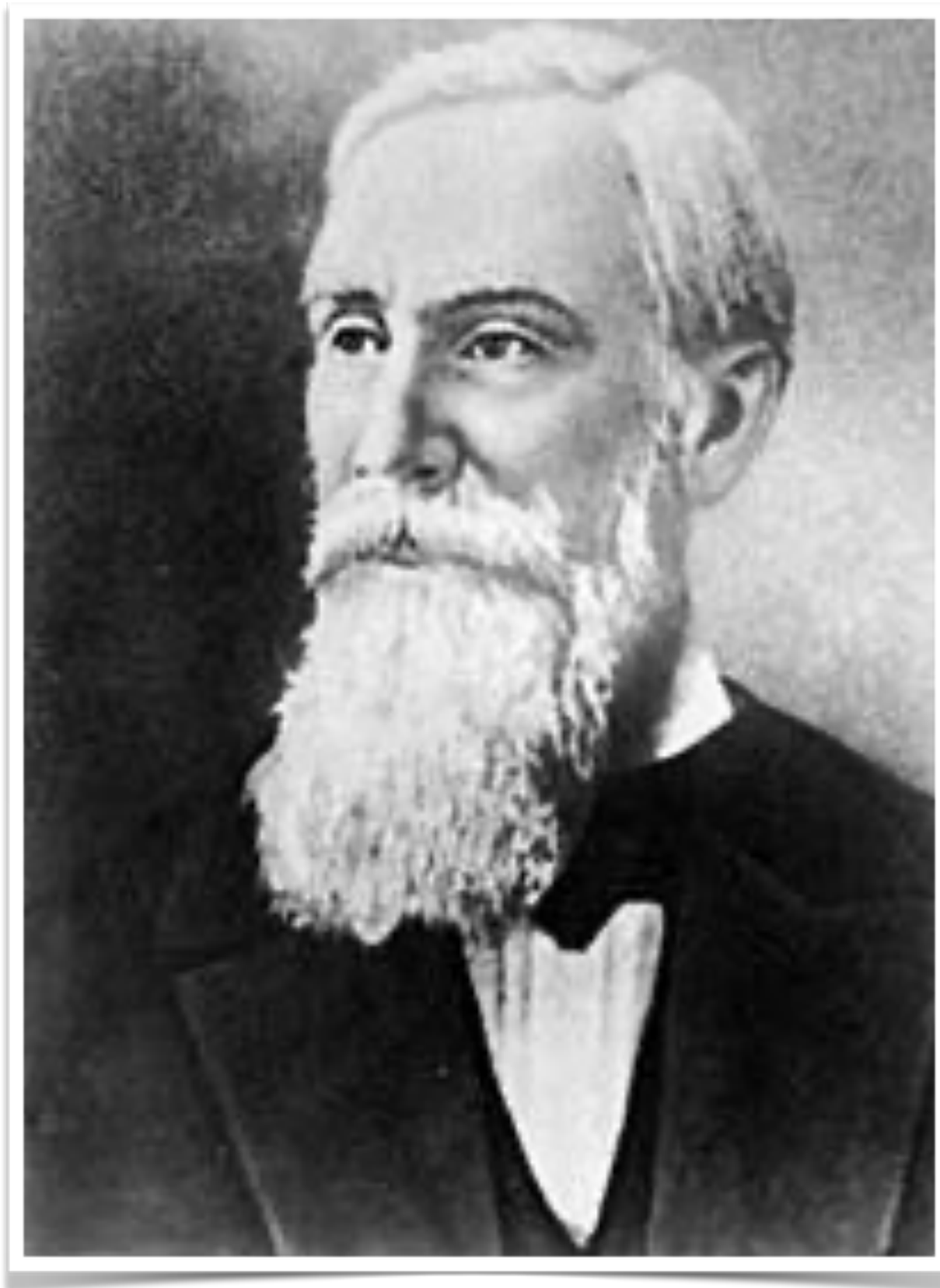
成就: 数学家, 几何学家, 物理学家

- 1837 年在《关于判断的概率之研究》一文中提出描述随机现象的一种常用分布 Poisson 分布

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

- Poisson 推广了大数定律, 并导出了在概率论与数理方程中有重要应用的 Poisson 积分.

18 世纪 — 19 世纪初



姓名: Пафну́тий Льво́вич Чебышёв

生卒: 1821–1894

国籍: 俄罗斯

成就: 数学家, 力学家

- Chebyshev 在概率论、数学分析等领域有重要贡献.

- Chebyshev 不等式:

$$P\left(|X - E(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

- Chebyshev 大数定律:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

- 圣彼得堡数学学派: Chebyshev, Markov, Liapunov — 大数定律和中心极限定理的发展.

20 世纪公理化阶段及发展



姓名: David Hilbert

(戴维·希尔伯特)

生卒: 1862–1943

国籍: 德国

成就: 数学家

- Hilbert 是对二十世纪数学有着深刻影响的数学家之一.
- 在不变量理论、代数数域理论、几何基础、积分方程、物理学、一般数学基础等领域, 以及 Dirichlet 原理和变分法、华林问题、特征值问题、Hilbert 空间等方面, 做出了重大或开创性的贡献.
- 1900 年巴黎国际数学家代表大会上, Hilbert 发表了题为《数学问题》的著名讲演, 提出了 23 个最重要的数学问题, 统称为 Hilbert 问题, 成为许多数学家力图攻克的难题, 对现代数学的研究和发展产生了深刻的影响.

20 世纪公理化阶段及发展

- Kolmogorov 是现代概率论的开拓者之一，把实变函数的方法应用于概率论.
- 1933 年，Kolmogorov 的专著《概率论的基础》出版，第一次在测度论基础上建立了概率论的严密公理体系.
- Kolmogorov 是随机过程论的奠基人之一.
- 20 世纪 60 年代，Kolmogorov 将概率论用于研究语言学并取得了颇赋启迪性的成果：做诗的概率方法和用概率实验法确定俄语语音的熵，他还开创了预报理论.



姓名：Andrey Kolmogorov

（安德雷·科尔莫哥洛夫）

生卒：1903–1987

国籍：前苏联

成就：数学家

蓬勃发展

- 自 1933 年以来，在公理化的基础上，现代概率论不仅在理论上取得了一系列突破，在应用上也取得了巨大的成就，其应用几乎遍及所有的科学领域.
- 理论研究：极限理论，独立增量过程，Markov 过程，平稳过程和时间序列，鞅和随机微分方程等.
- 应用领域：天气预报、地震预报、产品的抽样调查、经济最优决策、金融保险、通讯工程、服务系统、生物医学等.