Chapter 4

数字特征与特征函数

4.1 第九周课后作业 B 参考答案

1. 证明：如果取非负整数值的随机变量 ξ 的数学期望存在，则 (2 分)

$$E(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\}$$

【证明】 因为随机变量 ξ 取非负整数值，所以 ξ 是离散型随机变量，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \geq k\} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} P\{\xi=i\}\right) \\
&= P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+\cdots+P\{\xi=k\}+\cdots \\
&\qquad +P\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}+\cdots+P\{\xi=k\}+\cdots \\
&\qquad\qquad +P\{\xi=3\}+\cdots+P\{\xi=k\}+\cdots \\
&\qquad\qquad\qquad +\cdots\cdots \\
&= 1\cdot P\{\xi=1\}+2\cdot P\{\xi=2\}+3\cdot P\{\xi=3\}+\cdots+k\cdot P\{\xi=k\}+\cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot P\{\xi=k\} \\
&= E(\xi)
\end{aligned}$$

2. 随机变量 ξ 服从 Laplace 分布，其概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}, \quad -\infty<x<\infty, \quad \lambda>0$$

求随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$. (2 分)

【解】 这是连续型随机变量数学期望的计算问题，计算过程如下：

$$
\begin{aligned}
E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\lambda}}\mathrm{d}x + \frac{1}{2\lambda}\int_{\mu}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\mu} x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}\int_{\mu}^{\infty} x\,\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x\,\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\lambda}}\right)\Big|_{-\infty}^{\mu} - \int_{-\infty}^{\mu}\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\lambda}}\mathrm{d}x\right] + \frac{1}{2}\left[\left(-x\,\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}\right)\Big|_{\mu}^{\infty} + \int_{\mu}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}(\mu-\lambda) + \frac{1}{2}(\mu+\lambda) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

表 4.1: 随机向量 (ξ, η) 的联合分布律

η	ξ			p_η
	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
p_ξ	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

3. 设随机向量 (ξ, η) 的联合分布律如表 4.1 所示.

(a) 求随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$. (2 分)

【解】 首先计算 ξ 的边际分布律 (如表 4.1 所示)，于是

$$E(\xi) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

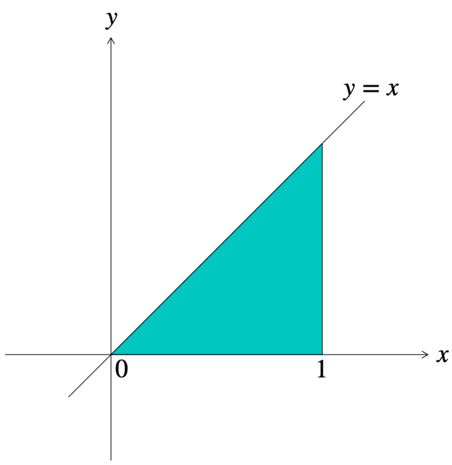
(b) 求随机变量 η 的数学期望 $E(\eta)$. (2 分)

【解】 首先计算 η 的边际分布律 (如表 4.1 所示)，于是

$$E(\eta) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$$

4. 设随机向量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x,\ y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



(a) 求随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$. (2 分)

【解】 联合概率密度函数的非零区域如上图所示，于是

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \left(\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

(b) 求随机变量 η 的数学期望 $E(\eta)$. (2 分)

【解】 联合概率密度函数的非零区域如上图所示，于是

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 y \cdot \left(\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}$$

5. 企业生产的某种设备的寿命 ξ (单位：年) 服从指数分布，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

企业承诺：出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若企业售出一台设备盈利 100 元，调换一台设备需要花费 300 元，求企业出售一台设备净盈利的数学期望. (2 分)

【解】 用 η 表示出售一台设备的盈利，则有

$$\eta=\begin{cases}100, & \xi>1\\ 100-300=-200, & \xi\leq 1\end{cases}$$

于是，企业出售一台设备净盈利的数学期望为

$$\begin{aligned}E(\eta)&=100\cdot P\{\xi>1\}+(-200)\cdot P\{\xi\leq 1\}\\&=100\int_1^{\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x-200\int_0^1\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x\\&=300\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-200\\&=33.64\end{aligned}$$