3.4 第九周课后作业 A 参考答案

1. 设二元正态随机向量 (ξ, η) 的概率密度函数

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2 + 2xy - 22x - 14y + 65\right)\right\}$$

(a) 将它化为如下的标准形式. (2 分)

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

【解】 标准形式可等价表示为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2\left(x-\mu_1\right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right) + \sigma_1^2\left(y-\mu_2\right)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}\right\}$$

将 $p(x, y)$ 与标准形式对比可知 $\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = 1$. 于是，标准形式可简化为

$$\frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\sigma_2^2\left(x-\mu_1\right)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right) + \sigma_1^2\left(y-\mu_2\right)^2}{2}\right\}$$

对比 x^2, y^2 的系数可得 $\sigma_2^2 = 2, \sigma_1^2 = 1$，所以 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sqrt{2}$.

对比交叉乘积项 xy 的系数可得 $-2\rho\sigma_1\sigma_2 = 2$，所以 $\rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对比一次项 x, y 的系数可得

$$-2\sigma_2^2\mu_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\mu_2 = -22\,, \qquad -2\sigma_1^2\mu_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\mu_1 = -14$$

即 $2\mu_1 + \mu_2 = 11, \mu_1 + \mu_2 = 7$，所以 $\mu_1 = 4, \mu_2 = 3$.

(b) 指出 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的值分别是多少. (2 分)

【解】 由上述结果可知

$$\mu_1 = 4\,, \quad \mu_2 = 3\,, \quad \sigma_1 = 1\,, \quad \sigma_2 = \sqrt{2}\,, \quad \rho = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) 确定 ξ 的边际概率密度函数 $p_\xi(x)$. (2 分)

【解】 利用二元正态分布的性质知 $\xi \sim N\left(\mu_1\,, \sigma_1^2\right) = N(4\,, 1)$，所以 ξ 的边际密度函数

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2}}$$

(d) 确定条件分布 $p_{\xi|\eta=y}(x\,|y)$. (2 分)

【解】 利用二元正态分布的性质知

$$(\xi\,|\eta=y)\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\,,\,\sigma_1^2\left(1-\rho^2\right)\right)=N\left(\frac{11-y}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$$

2. 设 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，均服从分布律如下的同一几何分布，

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p\,,\qquad x=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

令 $\zeta=\max(\xi,\,\eta)$.

(a) 求 $(\zeta,\,\xi)$ 的联合概率分布. (2 分)

【解】 因为 $\xi,\,\eta$ 服从同一几何分布，所以其分布律为

$$P\{\xi=k\}=(1-p)^{k-1}p\,,\quad P\{\eta=k\}=(1-p)^{k-1}p\,,\quad k=1,\,2,\,\ldots$$

由于 $\zeta=\max(\xi,\,\eta)$，所以当 $i<j$ 时，$(\zeta,\,\xi)$ 的联合概率分布 $P\{\zeta=i,\,\xi=j\}=0$.

当 $i=j$ 时，$(\zeta,\,\xi)$ 的联合概率分布

$$P\{\zeta=i,\,\xi=j\}=\sum_{k=1}^{i}P\{\xi=i,\,\eta=k\}$$

利用 ξ 与 η 相互独立，则有

$$\begin{aligned}
P\{\zeta=i,\,\xi=j\}&=\sum_{k=1}^{i}P\{\xi=i\}\cdot P\{\eta=k\}\\
&=\sum_{k=1}^{i}(1-p)^{i-1}p\cdot(1-p)^{k-1}p\\
&=(1-p)^{i-1}p^2\cdot\sum_{k=1}^{i}(1-p)^{k-1}\\
&=(1-p)^{i-1}p^2\cdot\frac{1-(1-p)^i}{1-(1-p)}\\
&=(1-p)^{i-1}p\left[1-(1-p)^i\right]
\end{aligned}$$

当 $i > j$ 时，$(\zeta,\ \xi)$ 的联合概率分布

$$\begin{aligned} P\{\zeta = i,\ \xi = j\} &= P\{\xi = j,\ \eta = i\} \\ &= P\{\xi = j\} \cdot P\{\eta = i\} \\ &= (1-p)^{j-1}p \cdot (1-p)^{i-1}p \\ &= (1-p)^{i+j-2}p^2 \end{aligned}$$

故 $(\zeta,\ \xi)$ 的联合概率分布为

$$P\{\zeta = i,\ \xi = j\} = \begin{cases} 0, & i < j \\ (1-p)^{i-1}p\left[1-(1-p)^i\right], & i = j \\ (1-p)^{i+j-2}p^2, & i > j \end{cases},\quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(b) 求 ζ 的概率分布. (2 分)

【解】 ζ 的概率分布为

$$\begin{aligned} P\{\zeta = i\} &= \sum_{j=1}^{\infty} P\{\zeta = i,\ \xi = j\} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} P\{\zeta = i,\ \xi = j\} + P\{\zeta = i,\ \xi = i\} + \sum_{j=i+1}^{\infty} P\{\zeta = i,\ \xi = j\} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1}(1-p)^{i+j-2}p^2 + (1-p)^{i-1}p\left[1-(1-p)^i\right] \\ &= (1-p)^{i-1}p^2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1}(1-p)^{j-1} + (1-p)^{i-1}p\left[1-(1-p)^i\right] \\ &= (1-p)^{i-1}p^2 \cdot \frac{1-(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} + (1-p)^{i-1}p\left[1-(1-p)^i\right] \\ &= (1-p)^{i-1}p\left[2-(1-p)^{i-1}-(1-p)^i\right],\quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{aligned}$$

(c) 求 ξ 关于 ζ 的条件概率分布. (2 分)

【解】 ξ 关于 ζ 的条件概率分布为

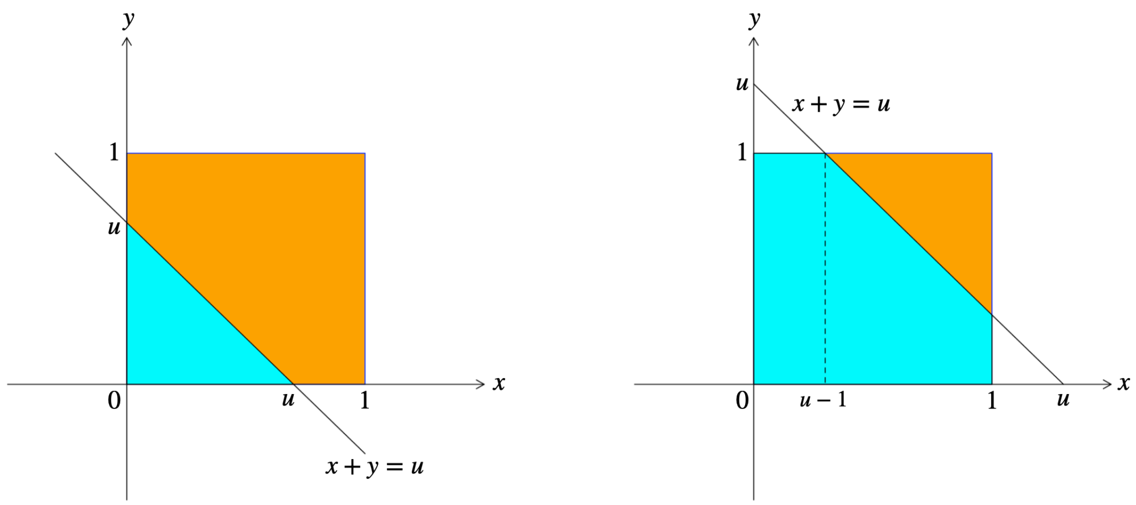
$$P\{\xi=j\,|\zeta=i\}=\frac{P\{\zeta=i,\ \xi=j\}}{P\{\zeta=i\}}$$

$$=\begin{cases}0, & i<j\\ \dfrac{1-(1-p)^i}{2-(1-p)^{i-1}-(1-p)^i}, & i=j\\ \dfrac{p(1-p)^j}{2-(1-p)^{i-1}-(1-p)^i}, & i>j\end{cases}$$

3. 若 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，均服从 $[0,\ 1]$ 上的均匀分布，求 $\zeta=\xi+\eta$ 的概率密度函数.
(2 分)

【方法一】 由 $\xi\sim U[0,\ 1]$、$\eta\sim U[0,\ 1]$ 可知其概率密度函数分别为

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases},\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$



再由 ξ 与 η 相互独立，得其联合概率密度函数为

$$p(x,\ y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

于是，$\zeta=\xi+\eta$ 的分布函数

$$F_\zeta(u)=P\{\zeta<u\}=P\{\xi+\eta<u\}=\begin{cases}0, & u<0\\ \int_0^u\left(\int_0^{u-x}1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, & 0\le u\le 1\\ u-1+\int_{u-1}^1\left(\int_0^{u-x}1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, & 1<u\le 2\\ 1, & u>2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0\\ \dfrac{u^2}{2}, & 0\le u\le 1\\ 2u-\dfrac{u^2}{2}-1, & 1<u\le 2\\ 1, & u>2\end{cases}$$

所以，$\zeta=\xi+\eta$ 的概率密度函数为

$$f_\zeta(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}F_\zeta(u)=\begin{cases}u, & 0\le u\le 1\\ 2-u, & 1<u\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

【方法二】 利用卷积公式求解

$$f_\zeta(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(u-x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^u 1\mathrm{d}x, & 0\le u\le 1\\ \int_{u-1}^1 1\mathrm{d}x, & 1<u\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}u, & 0\le u\le 1\\ 2-u, & 1<u\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

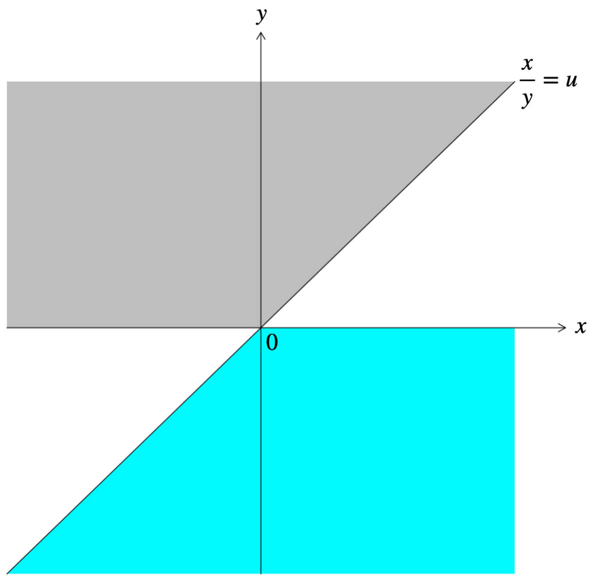
4. 若 ξ 与 η 是相互独立、均服从标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的随机变量，求 $\psi=\dfrac{\xi}{\eta}$ 的概率密度函数.
(2 分)

【方法一】 由 $\xi \sim N(0,\ 1)$、$\eta \sim N(0,\ 1)$ 可得其概率密度函数分别为

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < x,\ y < +\infty$$

再由 ξ 与 η 相互独立可得其联合概率密度函数为

$$p(x,\ y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad -\infty < x,\ y < +\infty$$



于是，$\psi = \dfrac{\xi}{\eta}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_\psi(u) &= P\{\psi < u\} = P\left\{\frac{\xi}{\eta} < u\right\} = \iint\limits_{\frac{\xi}{\eta}<u} p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{uy} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{uy}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

从而 $\psi = \dfrac{\xi}{\eta}$ 的概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_{\psi}(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} F_{\psi}(u) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_{-\infty}^{uy} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_{uy}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} y \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2\pi\left(1+u^2\right)} \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi\left(1+u^2\right)} \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \bigg|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\pi\left(1+u^2\right)}, \qquad -\infty < u < +\infty
\end{aligned}
$$

【方法二】 利用两个随机变量商的密度函数公式求解

$$
\begin{aligned}
f_{\psi}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot p(uy,\ y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left(-\frac{u^2 y^2 + y^2}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} y \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2\pi\left(1+u^2\right)} \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi\left(1+u^2\right)} \cdot \exp\left(-\frac{1+u^2}{2} y^2 \right) \bigg|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\pi\left(1+u^2\right)}, \qquad -\infty < u < +\infty
\end{aligned}
$$

5. 若 ξ 与 η 是相互独立、均服从标准正态分布 $N(0,\ 1)$ 的随机变量.

(a) 求 $U = \xi^2 + \eta^2$ 与 $V = \dfrac{\xi}{\eta}$ 的联合概率密度函数. (2 分)

【解】 由 $\xi \sim N(0,\ 1)$、$\eta \sim N(0,\ 1)$ 知其概率密度函数为

$$
p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad p_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < x,\ y < +\infty
$$

再由 ξ 与 η 相互独立可得其联合概率密度函数为

$$
p(x,\ y) = p_{\xi}(x) \cdot p_{\eta}(y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad -\infty < x,\ y < +\infty
$$

利用

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm v\sqrt{\dfrac{u}{1+v^2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{u}{1+v^2}} \end{cases}$$

该变换的 Jacobian 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pm\dfrac{v}{2\sqrt{u\,(1+v^2)}} & \pm\sqrt{\dfrac{u}{(1+v^2)^3}} \\ \pm\dfrac{1}{2\sqrt{u\,(1+v^2)}} & \mp\dfrac{v\sqrt{u}}{(1+v^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \mp\dfrac{1}{2\,(1+v^2)}$$

于是，$(U,\ V)$ 的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(u,\ v) &= p(x,\ y)\cdot\left|J\right| = p\left(\pm v\sqrt{\frac{u}{1+v^2}},\ \pm\sqrt{\frac{u}{1+v^2}}\right)\cdot\left|\mp\frac{1}{2\,(1+v^2)}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{uv^2}{1+v^2}+\frac{u}{1+v^2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2\,(1+v^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi\,(1+v^2)}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\ , \quad u>0\ ,\ -\infty<v<\infty \end{aligned}$$

(b) 证明 U 与 V 相互独立. (2 分)

【证明】 由 $(U,\ V)$ 的联合概率密度函数 $f(u,\ v)$ 易得 U、V 的边际概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\ , \quad u>0 \\ f_V(v) &= \frac{1}{2\pi\,(1+v^2)}\ , \quad -\infty<v<\infty \end{aligned}$$

因为 $f(u,\ v) = f_U(u)\cdot f_V(v)$，所以 U 与 V 相互独立.