3.3 第八周课后作业参考答案

1. 设二维随机变量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$g(x,\ y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求 ξ 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 ξ 的边际概率密度函数为

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\ y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^1 8xy\mathrm{d}y, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4x\left(1 - x^2\right) & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

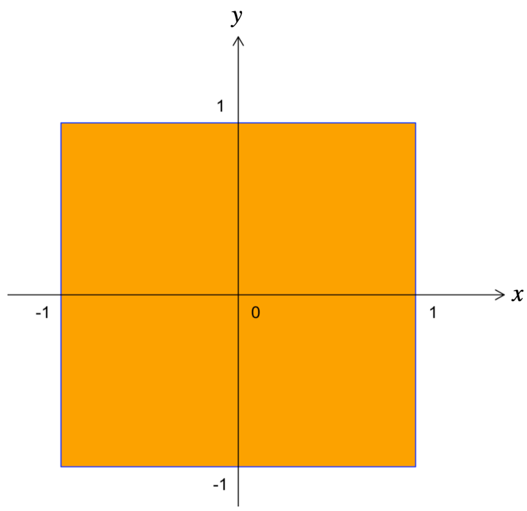
(b) 求 η 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 η 的边际概率密度函数为

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,\ y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^y 8xy\mathrm{d}x, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(c) 确定 ξ 与 η 的独立性. (2 分)

【解】 由上述边际分布密度的结果可见，$g(x,\ y) \neq p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不相互独立.



2. 设二维随机变量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$p(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|\le 1,\ |y|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 求 ξ 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 ξ 的边际概率密度函数为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\ y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}y, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(b) 求 η 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 η 的边际概率密度函数为

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,\ y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}x, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(c) 证明 ξ 与 η 不相互独立. (2 分)

【解】 由上述边际分布密度的结果可见，$p(x,\ y)\neq p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不相互独立.

(d) 求 ξ^2 的分布函数. (2 分)

【解】 ξ^2 的分布函数为

$$F_{\xi^2}(u)=P\left\{\xi^2<u\right\}=\begin{cases}0, & u<0\\ P\left\{-\sqrt{u}<\xi<\sqrt{u}\right\}, & 0\le u\le 1\\ 1, & u>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0\\ \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x, & 0\le u\le 1\\ 1, & u>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0\\ \sqrt{u}, & 0\le u\le 1\\ 1, & u>1\end{cases}$$

(e) 求 η^2 的分布函数. (2 分)

【解】 同理，η^2 的分布函数为

$$F_{\eta^2}(v)=P\left\{\eta^2<v\right\}=\begin{cases}0, & v<0\\ P\left\{-\sqrt{v}<\eta<\sqrt{v}\right\}, & 0\le v\le 1\\ 1, & v>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & v<0\\ \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y, & 0\le v\le 1\\ 1, & v>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & v<0\\ \sqrt{v}, & 0\le v\le 1\\ 1, & v>1\end{cases}$$

(f) 证明 ξ^2 与 η^2 相互独立. (2 分)

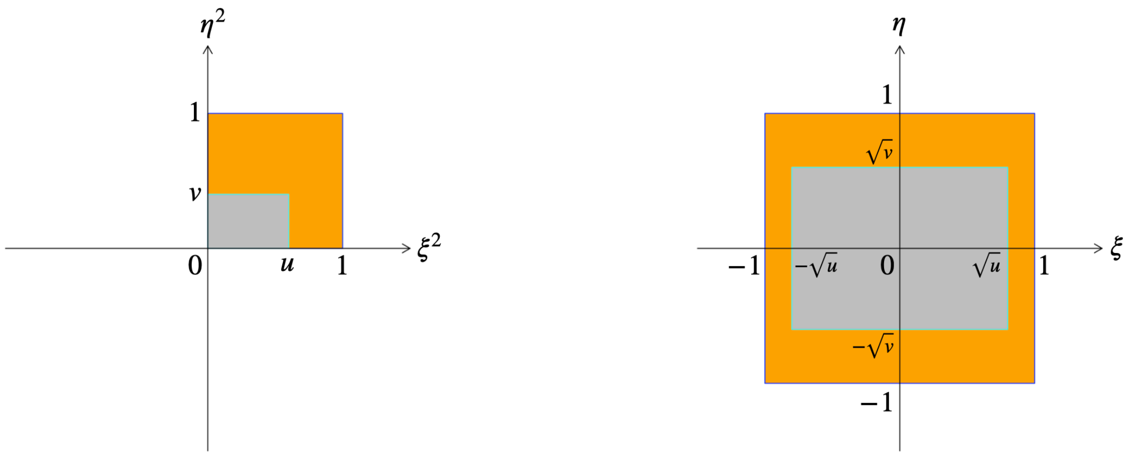
【解】 ξ^2 与 η^2 的联合分布函数为

$$F(u,\ v) = P\left\{\xi^2 < u,\ \eta^2 < v\right\}$$

当 $u < 0$ 或者 $v < 0$ 时，显然有 $F(u,\ v) = 0 = F_{\xi^2}(u) \cdot F_{\eta^2}(v)$.

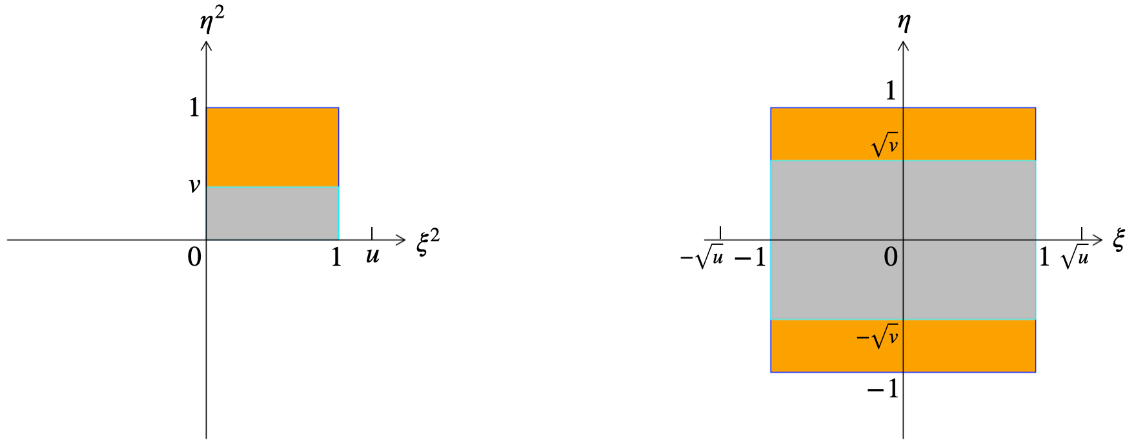
当 $u > 1$ 并且 $v > 1$ 时，显然有 $F(u,\ v) = 1 = F_{\xi^2}(u) \cdot F_{\eta^2}(v)$.

当 $0 \le u \le 1$ 并且 $0 \le v \le 1$ 时，ξ^2 与 η^2 的联合分布函数



$$\begin{aligned} F(u,\ v) = P\left\{\xi^2 < u,\ \eta^2 < v\right\} &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \left(\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1+xy}{4} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \sqrt{u} \cdot \sqrt{v} = F_{\xi^2}(u) \cdot F_{\eta^2}(v) \end{aligned}$$

当 $u > 1$ 并且 $0 \le v \le 1$ 时，ξ^2 与 η^2 的联合分布函数



$$
\begin{aligned}
F(u,\ v) = P\left\{\xi^2 < u,\ \eta^2 < v\right\} &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{1+xy}{4}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{v} = F_{\xi^2}(u)\cdot F_{\eta^2}(v)
\end{aligned}
$$

同理，当 $0 \le u \le 1$ 并且 $v > 1$ 时，亦有 $F(u,\ v) = \sqrt{u} = F_{\xi^2}(u)\cdot F_{\eta^2}(v)$.

综上所述，$\forall\ (u,\ v) \in \mathbb{R}^2$ 都有 $F(u,\ v) = F_{\xi^2}(u)\cdot F_{\eta^2}(v)$，由随机变量独立性的定义知 ξ^2 与 η^2 相互独立.

3. 若 ξ_1 与 ξ_2 是相互独立的随机变量，均服从 Poisson 分布，参数分别为 λ_1 与 λ_2.

(a) 证明 $\xi_1+\xi_2$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布. (2 分)

【解】 记 $\eta = \xi_1+\xi_2$，由离散型的卷积公式有

$$
\begin{aligned}
P\left\{\eta = k\right\} &= \sum_{i=0}^{k} P\left\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = k-i\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} P\left\{\xi_1 = i\right\} P\left\{\xi_2 = k-i\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2} \\
&= \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\ (k-i)!}\ \lambda_1^i\ \lambda_2^{k-i}\right)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \\
&= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\ , \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots
\end{aligned}
$$

这恰好是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布的分布律，所以 $\eta = \xi_1+\xi_2$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的 Poisson 分布.

(b) 证明 $P\left\{\xi_1 = k \,|\, \xi_1+\xi_2 = n\right\} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$. (2 分)

【解】 由条件概率的定义知

$$
\begin{aligned}
P\left\{\xi_1 = k \,|\, \xi_1+\xi_2 = n\right\} &= \frac{P\left\{\xi_1 = k,\ \xi_1+\xi_2 = n\right\}}{P\left\{\xi_1+\xi_2 = n\right\}} \\
&= \frac{P\left\{\xi_1 = k,\ \xi_2 = n-k\right\}}{P\left\{\xi_1+\xi_2 = n\right\}} \\
&= \frac{P\left\{\xi_1 = k\right\}\cdot P\left\{\xi_2 = n-k\right\}}{P\left\{\xi_1+\xi_2 = n\right\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\lambda_1^k\,\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

4. 设随机变量 ξ 服从区间 $(0,\,1)$ 内的均匀分布，令 $\eta=-2\ln\xi$，求随机变量 η 的概率密度函数. (2 分)

【解】 已知 ξ 服从区间 $(0,\,1)$ 内的均匀分布，则其概率密度函数为

$$
f_\xi(x)=\begin{cases}1\,, & 0<x<1\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}
$$

于是，随机变量 $\eta=-2\ln\xi$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_\eta(x)&=P\left(\eta<x\right)=P\left(-2\ln\xi<x\right)=P\left(\ln\xi>-\frac{x}{2}\right)=P\left(\xi>\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\\
&=\begin{cases}\int_{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}^{1}\mathrm{d}t\,, & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}
=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,, & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}
\end{aligned}
$$

于是，随机变量 η 的概率密度函数为

$$
f_\eta(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_\eta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}
$$

5. 设随机向量 $(\xi,\,\eta)$ 的联合分布律见表 3.1.

(a) 求 $P\left\{\xi=2\,|\eta=2\right\}$，$P\left\{\eta=3\,|\xi=0\right\}$. (2 分)

表 3.1: 随机向量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合分布律

η	ξ						$p_\eta(\cdot)$
	0	1	2	3	4	5	
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
$p_\xi(\cdot)$	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1

【解】 首先计算出 ξ、η 的边际分布律 (结果分别见表 3.1 的最后一行、最后一列). 于是

$$P\{\xi=2\,|\eta=2\}=\frac{P\{\xi=2,\ \eta=2\}}{P\{\eta=2\}}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{5}$$

$$P\{\eta=3\,|\xi=0\}=\frac{P\{\xi=0,\ \eta=3\}}{P\{\xi=0\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3}$$

(b) 求 $X=\max\{\xi,\ \eta\}$ 的分布律. (2 分)

【解】 采用表上作业法:

η	ξ					
	0	1	2	3	4	5
0	0.00 0	0.01 1	0.03 2	0.05 3	0.07 4	0.09 5
1	0.01 1	0.02 1	0.04 2	0.05 3	0.06 4	0.08 5
2	0.01 2	0.03 2	0.05 2	0.05 3	0.05 4	0.06 5
3	0.01 3	0.02 3	0.04 3	0.06 3	0.06 4	0.05 5

于是得 $X=\max\{\xi,\ \eta\}$ 的分布律为

X	1	2	3	4	5
$p_X(\cdot)$	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(c) 求 $Y=\min\{\xi,\ \eta\}$ 的分布律. (2 分)

【解】 采用表上作业法:

η	ξ					
	0	1	2	3	4	5
0	0.00 0	0.01 0	0.03 0	0.05 0	0.07 0	0.09 0
1	0.01 0	0.02 1	0.04 1	0.05 1	0.06 1	0.08 1
2	0.01 0	0.03 1	0.05 2	0.05 2	0.05 2	0.06 2
3	0.01 0	0.02 1	0.04 2	0.06 3	0.06 3	0.05 3

于是得 $Y=\min\{\xi,\ \eta\}$ 的分布律为

Y	0	1	2	3
$p_Y(\cdot)$	0.28	0.30	0.25	0.17

(d) 求 $Z=\xi+\eta$ 的分布律. (2 分)

【解】 采用表上作业法:

η	ξ					
	0	1	2	3	4	5
0	0.00 0	0.01 1	0.03 2	0.05 3	0.07 4	0.09 5
1	0.01 1	0.02 2	0.04 3	0.05 4	0.06 5	0.08 6
2	0.01 2	0.03 3	0.05 4	0.05 5	0.05 6	0.06 7
3	0.01 3	0.02 4	0.04 5	0.06 6	0.06 7	0.05 8

于是得 $Z=\xi+\eta$ 的分布律为

Z	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_Z(\cdot)$	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05