3.2 第七周课后作业参考答案

1. 设 $f_1(x)$，$f_2(y)$ 是概率密度函数，为使 $f(x,\ y)=f_1(x)f_2(y)+h(x,\ y)$ 成为二维概率密度函数，$h(x,\ y)$ 必须且只须满足什么条件？(2 分)

【解】 为使 $f(x,\ y)=f_1(x)f_2(y)+h(x,\ y)$ 成为二维概率密度函数，首先它应满足非负的条件，即

$$f(x,\ y)=f_1(x)f_2(y)+h(x,\ y)\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad h(x,\ y)\geq -f_1(x)f_2(y)$$

其次，还应满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)f_2(y)+h(x,\ y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

这等价于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

因为 $f_1(x)$，$f_2(y)$ 是概率密度函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\mathrm{d}y=1$$

故又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

2. 若 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率分布为

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且 $P\{\xi\eta\neq 0\}=0.4$，$P\{\eta\leq 0\,|\,\xi\leq 0\}=\dfrac{2}{3}$.

(a) 求 $a,\ b,\ c$ 的值. (2 分)

【解】 首先求得 $\xi,\ \eta$ 的边际分布律（见下表），利用分布律的性质我们有

η	ξ			$p_\eta(\cdot)$
	-1	0	1	
-1	a	0	0.2	$a+0.2$
0	0.1	b	0.1	$b+0.2$
1	0	0.2	c	$c+0.2$
$p_\xi(\cdot)$	$a+0.1$	$b+0.2$	$c+0.3$	1

$$a+0.2+b+0.2+c+0.2=1 \quad\Longrightarrow\quad a+b+c=0.4$$

再由

$$\begin{aligned}P\{\xi\eta\neq 0\}&=P\{\xi=-1,\ \eta=-1\}+P\{\xi=1,\ \eta=-1\}+P\{\xi=-1,\ \eta=1\}\\&\quad+P\{\xi=1,\ \eta=1\}\\&=a+0.2+0+c\\&=0.4\end{aligned}$$

由此可得 $a+c=0.2$，从而 $b=0.2$. 再利用

$$P\{\eta\le 0\,|\,\xi\le 0\}=\frac{P\{\xi\le 0,\ \eta\le 0\}}{P\{\xi\le 0\}}=\frac{2}{3}$$

因为

$$\begin{aligned}P\{\xi\le 0,\ \eta\le 0\}&=P\{\xi=-1,\ \eta=-1\}+P\{\xi=-1,\ \eta=0\}+P\{\xi=0,\ \eta=-1\}\\&\quad+P\{\xi=0,\ \eta=0\}\\&=a+0.1+b=a+0.3\end{aligned}$$

$$P\{\xi\le 0\}=P\{\xi=-1\}+P\{\xi=0\}=a+0.1+b+0.2=a+0.5$$

所以 $\dfrac{a+0.3}{a+0.5}=\dfrac{2}{3}$，由此可求得 $a=0.1$. 故 $c=0.1$

(b) 求 ξ、η 的边际概率分布. (2 分)

【解】 ξ 的边际概率分布如下

ξ	-1	0	1
$p_\xi(\cdot)$	0.2	0.4	0.4

η 的边际概率分布如下

η	-1	0	1
$p_\eta(\cdot)$	0.3	0.4	0.3

(c) 求 $\xi=1$ 时 η 的条件概率分布. (2 分)

【解】 因为 ξ、η 的联合概率分布律为

η	ξ			$p_\eta(\cdot)$
	-1	0	1	
-1	0.1	0	0.2	0.3
0	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0	0.2	0.1	0.3
$p_\xi(\cdot)$	0.2	0.4	0.4	1

所以，$(\eta\,|\xi=1)$ 的条件概率分布为

$\eta\,|\xi=1$	-1	0	1
$p_{\eta|\xi=1}(\cdot)$	0.5	0.25	0.25

(d) 求 $\eta=0$ 时 ξ 的条件概率分布. (2 分)

【解】 同理可得，$(\xi\,|\eta=0)$ 的条件概率分布为

$\xi\,|\eta=0$	-1	0	1
$p_{\xi|\eta=0}(\cdot)$	0.25	0.5	0.25

3. 若 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$p(x,\ y)=\begin{cases} A\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

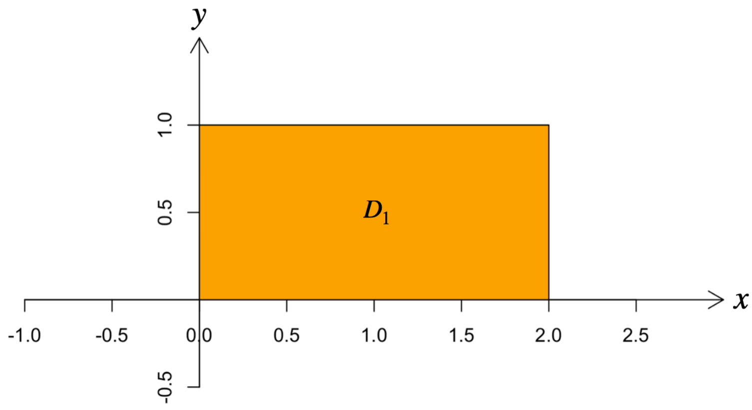
(a) 求常数 A 的值. (2 分)

【解】 由联合概率密度函数的性质，我们有

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} A\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A \end{aligned}$$

所以 $A=2$.

(b) 求概率 $P\{\xi<2,\ \eta<1\}$. (2 分)



【解】 记平面区域 $D_1=\{(x,\ y):0<x<2,\ 0<y<1\}$，则所求概率为

$$P\{\xi<2,\ \eta<1\}=\iint\limits_{D_1}p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)$$

(c) 求 ξ 的边际分布函数. (2 分)

【解】 ξ 的边际概率密度函数为

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,\ y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

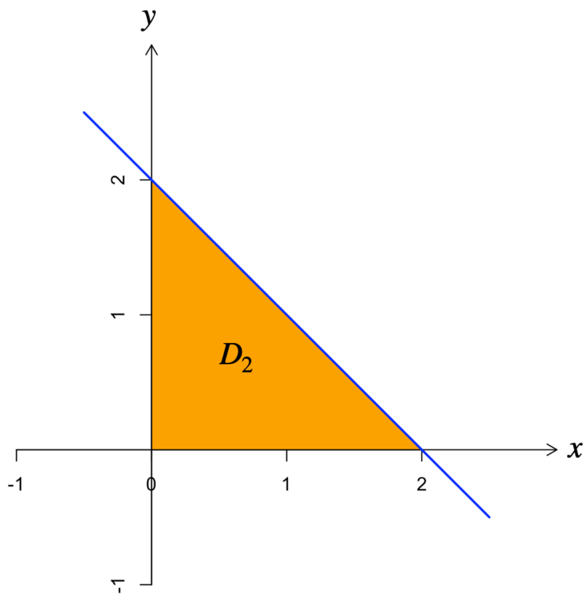
于是，ξ 的边际分布函数为

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t\,, & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}\,, & x>0\\ 0\,, & x\le 0\end{cases}$$

(d) 求概率 $P\{\xi+\eta<2\}$. (2 分)

【解】 记平面区域 $D_2=\{(x,\ y):x>0,\ y>0,\ x+y<2\}$，则所求概率为

$$\begin{aligned}P\{\xi+\eta<2\}&=\iint\limits_{x+y<2}p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^2 2\mathrm{e}^{-2x}\left(\int_0^{2-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)^2\end{aligned}$$



4. 若 $(\mu,\ \nu)$ 的联合分布律为

$$P\{\mu=m,\ \nu=n\}=\frac{(\lambda p)^m(\lambda-\lambda p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\ ,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

其中 $0<p<1$.

(a) 求 ν 的边际分布律 $P\{\nu=n\}$. (2 分)

【解】 ν 的边际分布律为

$$\begin{aligned}
P\{\nu=n\}&=\sum_{m=0}^{n}P\{\mu=m,\ \nu=n\}\\
&=\sum_{m=0}^{n}\frac{(\lambda p)^m(\lambda-\lambda p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\\
&=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\,p^m(1-p)^{n-m}\\
&=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}\\
&=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}$$

(b) 求 μ 的边际分布律 $P\{\mu=m\}$. (2 分)

【解】 μ 的边际分布律为

$$
\begin{aligned}
P\{\mu=m\} &= \sum_{n=m}^{\infty} P\{\mu=m,\ \nu=n\} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda p)^m(\lambda-\lambda p)^{n-m}}{m!(n-m)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \longleftarrow \ \text{令 } k=n-m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^m(\lambda-\lambda p)^{k}}{m!\ k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda-\lambda p)^{k}}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda p} \qquad \longleftarrow \ \text{令 } \gamma=\lambda-\lambda p \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\gamma} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p}
\end{aligned}
$$

(c) 求条件分布 $P\{\mu=m \mid \nu=n\}$. (2 分)

【解】 所求条件分布为

$$
\begin{aligned}
P\{\mu=m \mid \nu=n\} &= \frac{P\{\mu=m,\ \nu=n\}}{P\{\nu=n\}} \\
&= \frac{(\lambda p)^m(\lambda-\lambda p)^{n-m}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{n!}{\lambda^n\,\mathrm{e}^{-\lambda}} \\
&= \binom{n}{m} p^m(1-p)^{n-m}\,, \qquad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n
\end{aligned}
$$

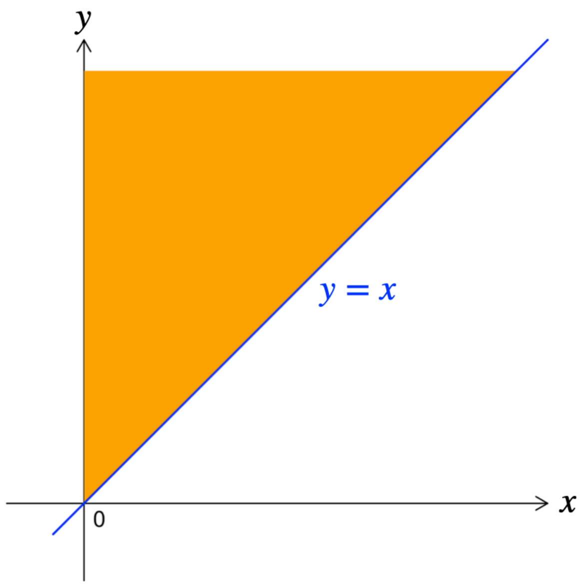
5. 设二维随机变量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$
p(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\,\Gamma(k_2)}\,x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\mathrm{e}^{-y}\,, \quad k_1>0,\ k_2>0,\ 0<x\le y<\infty
$$

(a) 求 ξ 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 利用连续型随机变量边际分布密度函数的计算公式，我们有

$$
p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}y
$$



当 $x \le 0$ 时，由 $p(x,\ y) = 0$ 可知 $p_\xi(x) = 0$，当 $x > 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
p_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_x^{+\infty} x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \qquad \longleftarrow \text{令 } t = y - x \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} x^{k_1-1} \int_0^{+\infty} t^{k_2-1}\mathrm{e}^{-t-x}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} x^{k_1-1}\mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} t^{k_2-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)} x^{k_1-1}\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

即

$$
p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1)} x^{k_1-1}\mathrm{e}^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}
$$

(b) 求 η 的边际概率密度函数. (2 分)

【解】 利用连续型随机变量边际分布密度函数的计算公式，我们有

$$
p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}x
$$

当 $y \leq 0$ 时，由 $p(x,\ y)=0$ 可知 $p_\eta(y)=0$，当 $y>0$ 时，

$$
\begin{aligned}
p_\eta(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^y x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}\mathrm{d}x \qquad \longleftarrow \text{ 令 } t=\frac{y-x}{y} \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\ \mathrm{e}^{-y} \int_1^0 (y-yt)^{k_1-1}(yt)^{k_2-1}(-y\mathrm{d}t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\ \mathrm{e}^{-y} \int_0^1 y^{k_1-1}(1-t)^{k_1-1}y^{k_2-1}t^{k_2-1}y\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\ y^{k_1+k_2-1}\mathrm{e}^{-y} \int_0^1 t^{k_2-1}(1-t)^{k_1-1}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

再利用 Γ 函数的性质：

$$
\frac{\Gamma(r)\ \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}\mathrm{d}u
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
p_\eta(y) &= \frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}\ y^{k_1+k_2-1}\mathrm{e}^{-y}\cdot\frac{\Gamma(k_1)\ \Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(k_1+k_2)}\ y^{k_1+k_2-1}\mathrm{e}^{-y}
\end{aligned}
$$

即

$$
p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(k_1+k_2)}\ y^{k_1+k_2-1}\mathrm{e}^{-y}, & y>0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}
$$