Chapter 3

随机变量与分布函数

3.1 第六周课后作业参考答案

1. C 取何值方可使下列数列成为某个随机变量的概率分布：

   (a) $p_k = \dfrac{C}{N}$，$k = 1, 2, \ldots, N$. (2 分)

   【解】 利用概率分布的性质，应有

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{C}{N} = C = 1$$

   (b) $p_k = C\dfrac{\lambda^k}{k!}$，$k = 1, 2, 3, \ldots$，$\lambda > 0$. (2 分)

   【解】 利用概率分布的性质，应有

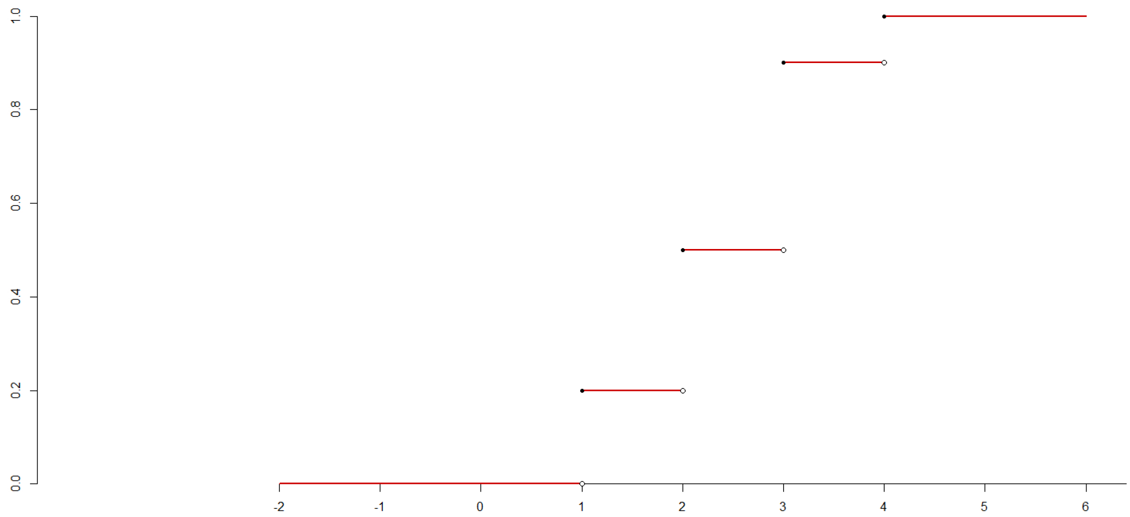
$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} C\frac{\lambda^k}{k!} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^0}{0!}\right) = C\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = 1$$

   所以 $C = \left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right)^{-1}$.

2. 已知随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \le x < 2 \\ 0.5, & 2 \le x < 3 \\ 0.9, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

   计算：



(a) $P(\xi=1)$. (2 分)

【解】 利用分布函数求分布律的公式我们有

$$P(\xi=1)=F(1)-F(1-0)=0.2-0=0.2$$

(b) $P(\xi=2)$. (2 分)

【解】 同理可得

$$P(\xi=2)=F(2)-F(2-0)=0.5-0.2=0.3$$

(c) $P(\xi=3)$. (2 分)

【解】 同理可得

$$P(\xi=3)=F(3)-F(3-0)=0.9-0.5=0.4$$

(d) $P(\xi=4)$. (2 分)

【解】 同理可得

$$P(\xi=4)=F(4)-F(4-0)=1-0.9=0.1$$

(e) 写出 ξ 的分布列. (2 分)

【解】 综上所述，ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
p_i	0.2	0.3	0.4	0.1

3. 已知随机变量 ξ 的分布列为

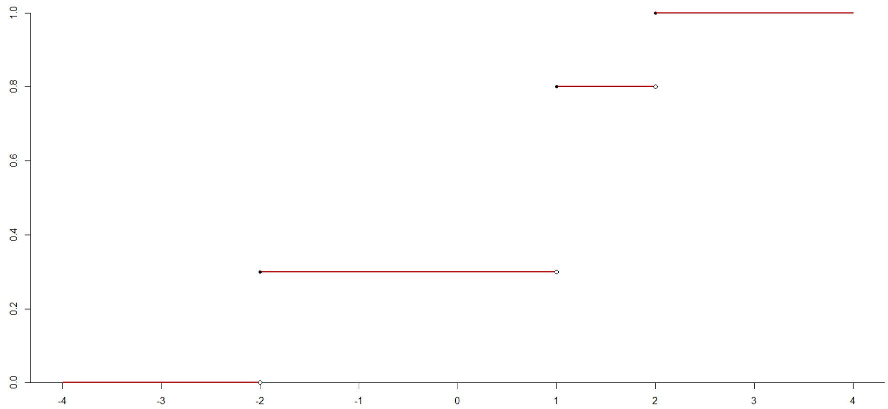
ξ	-2	1	2
p_i	0.3	0.5	0.2

求 ξ 的分布函数. (2 分)

【解】 利用分布函数的定义，我们有

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.3, & -2 \le x < 1 \\ 0.8, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

其图形如下：

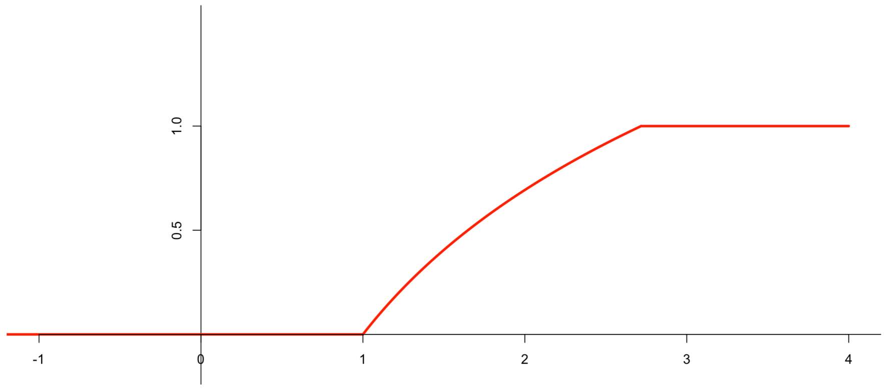


4. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \le x < \mathrm{e} \\ 1, & x \ge \mathrm{e} \end{cases}$$

(a) 计算概率 $P\{X \le 2\}$. (2 分)

【解】 该分布函数的图形如下所示：



所以，所求概率为

$$P\{X \le 2\} = F(2) = \ln 2 = 0.6931472$$

(b) 计算概率 $P\{0 < X \leq 3\}$. (2 分)

【解】 所求概率为

$$P\{0 < X \leq 3\} = F(3) - F(1) = 1$$

(c) 计算概率 $P\left\{2 < X < \frac{5}{2}\right\}$. (2 分)

【解】 所求概率为

$$P\left\{2 < X < \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F(2) = \ln\frac{5}{2} - \ln 2 = 0.2231436$$

(d) 求 X 的概率密度函数 $p_X(x)$. (2 分)

【解】 由随机变量分布函数与密度函数的关系，我们得 X 的概率密度函数为

$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq \mathrm{e} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

5. 设随机变量 $\xi \sim N(0,1)$.

(a) 计算概率 $P\{\xi \geq 1.645\}$. (2 分)

【解】 可查表计算，也可以利用 R 软件进行计算

$$P\{\xi \geq 1.645\} = 1 - \Phi(1.645) = 1 - 0.9500151 = 0.0499849$$

```
> pnorm(1.645, 0, 1, lower.tail = FALSE)
[1] 0.04998491
```

(b) 确定常数 a 使得 $P\{|\xi| < a\} = 0.95$. (2 分)

【解】 可查表计算，也可以利用 R 进行计算. 因为

$$P\{|\xi| < a\} = P\{-a < \xi < a\} = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1 = 0.95 \implies \Phi(a) = 0.975$$

所以 $a = 1.959964$.

(c) 确定常数 b 使得 $P\{|\xi - b| > b\} = 0.51$. (2 分)

```
> qnorm(0.975, 0, 1, lower.tail = TRUE)
[1] 1.959964
```

【解】 可查表计算，也可以利用 R 软件进行计算. 因为

$$
\begin{aligned}
P\{|\xi-b|>b\} &= P\{\xi-b>b\}+P\{\xi-b<-b\} \\
&= P\{\xi>2b\}+P\{\xi<0\} \\
&= 1-P\{\xi\le 2b\}+0.5 \\
&= 1.5-\Phi(2b)=0.51 \\
\Longrightarrow \quad & \Phi(2b)=0.99
\end{aligned}
$$

所以 $2b=2.326348$，故 $b=1.163174$.

```
> qnorm(0.99, 0, 1, lower.tail = TRUE)
[1] 2.326348
```

6. 设随机变量 $\eta\sim N(270,100)$.

(a) 计算概率 $P\{260<\eta<280\}$. (2 分)

【解】 可利用性质 $\dfrac{\eta-270}{10}\sim N(0,1)$ 然后查表计算. 因为

$$
\begin{aligned}
P\{260<\eta<280\} &= P\left\{\frac{260-270}{10}<\frac{\eta-270}{10}<\frac{280-270}{10}\right\} \\
&= \Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826895
\end{aligned}
$$

也可以利用 R 直接计算.

```
> 2 * pnorm(1, 0, 1, lower.tail = TRUE) - 1
[1] 0.6826895
> pnorm(280, 270, 10, lower.tail = TRUE) - pnorm(260, 270, 10, lower.tail = TRUE)
[1] 0.6826895
```

(b) 计算概率 $P\{\eta<250\}$. (2 分)

【解】 可利用性质 $\dfrac{\eta-270}{10}\sim N(0,1)$ 然后查表计算. 因为

$$
P\{\eta<250\}=P\left\{\frac{\eta-270}{10}<\frac{250-270}{10}\right\}=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.02275013
$$

也可以利用 R 软件直接计算.

(c) 计算概率 $P\{\eta>300\}$. (2 分)

```
> 1 - pnorm(2, 0, 1, lower.tail = TRUE)
[1] 0.02275013
> pnorm(250, 270, 10, lower.tail = TRUE)
[1] 0.02275013
```

【解】 可利用性质 $\frac{\eta-270}{10} \sim N(0,1)$ 然后查表计算. 因为

$$P\{\eta > 300\} = P\left\{\frac{\eta-270}{10} > \frac{300-270}{10}\right\} = 1 - \Phi(3) = 0.001349898$$

也可以利用 R 软件直接计算.

```
> 1 - pnorm(3, 0, 1, lower.tail = TRUE)
[1] 0.001349898
> pnorm(300, 270, 10, lower.tail = FALSE)
[1] 0.001349898
```

7. 设随机变量 ξ 取值于 $[0,1]$，如果对于所有的 $0 \le x \le y \le 1$，都有 $P\{x < \xi \le y\}$ 只与长度 $y-x$ 有关，证明随机变量 ξ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布. (2 分)

【解】 记 $P\{x < \xi \le y\} = f(y-x)$，则对于 $x=0$ 以及任意的 $y \in [0,1]$，我们有

$$P\{0 < \xi \le y\} = f(y)$$

于是，对于任意的 y_1，$y_2 \in [0,1]$，注意到 $P\{x < \xi \le y\}$ 只与长度 $y-x$ 有关，从而有

$$P\{0 < \xi \le y_1 + y_2\} = P\{0 < \xi \le y_1\} + P\{y_1 < \xi \le y_1 + y_2\} = P\{0 < \xi \le y_1\} + P\{0 < \xi \le y_2\}$$

即有

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2) \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) = Cy$$

因为 $f(1) = C = P\{0 < \xi \le 1\} = 1$ 可得 $C = 1$，所以 $f(x) = x$，即得

$$P\{0 < \xi \le x\} = x, \quad x \in [0,1]$$

故 ξ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

8. 已知随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

(a) 求常数 A. (2 分)

【解】 由概率密度函数的性质我们有 $A > 0$，且

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = A\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = A\pi$$

所以有 $A = \dfrac{1}{\pi}$.

(b) 求 $P\left\{-\dfrac{1}{2} < \xi < \dfrac{1}{2}\right\}$. (2 分)

【解】 所求概率为

$$P\left\{-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

(c) 求 ξ 分布函数 $F_\xi(x)$. (2 分)

【解】 由分布函数与密度函数的关系可知

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,\mathrm{d}t$$

易知，当 $x <-1$ 时，$F_\xi(x) = 0$. 当 $x > 1$ 时，$F_\xi(x) = 1$. 当 $-1 \le x < 1$ 时，

$$F_\xi(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arcsin t\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{\pi}\arcsin x + \frac{1}{2}$$

即，ξ 的分布函数为

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x <-1 \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x + \dfrac{1}{2}, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$