2.3 第五周课后作业参考答案

1. 商店中出售某种商品，根据历史记录分析，每月销售量服从 Poisson 分布，参数为 7. 问在月初进货时要库存多少件此种商品，才能以 0.999 的概率充分满足顾客的需要. (2 分)

```
> k = 0:20
> Prob = dpois(k, 7)
> Cum_Prob = cumsum(Prob)
> round(data.frame(k = k, Probs = Prob, Cum_Probs = Cum_Prob), digits = 4)
    k  Probs Cum_Probs
1   0 0.0009    0.0009
2   1 0.0064    0.0073
3   2 0.0223    0.0296
4   3 0.0521    0.0818
5   4 0.0912    0.1730
6   5 0.1277    0.3007
7   6 0.1490    0.4497
8   7 0.1490    0.5987
9   8 0.1304    0.7291
10  9 0.1014    0.8305
11 10 0.0710    0.9015
12 11 0.0452    0.9467
13 12 0.0263    0.9730
14 13 0.0142    0.9872
15 14 0.0071    0.9943
16 15 0.0033    0.9976
17 16 0.0014    0.9990
18 17 0.0006    0.9996
19 18 0.0002    0.9999
20 19 0.0001    1.0000
21 20 0.0000    1.0000
```

【解】 上图给出了参数为 7 的 Poisson 分布当 $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$ 的概率以及相应的累积概率，由此可见，当月初进货时库存达到有 $k = 16$ 件此种商品时，就能以 0.999 的概率能充分满足顾客的需要.

2. 某疫苗中所含细菌数服从 Poisson 分布，每一毫升中平均含一个细菌，把这种疫苗放入 5 只试管中，每试管放 2 毫升.

   (a) 求 5 只试管中都有细菌的概率. (2 分)

   【解】根据假设，疫苗中所含细菌数服从 Poisson 分布，每一毫升中平均含一个细菌，每只试管放 2 毫升，所以每试管中平均含 2 个细菌，从而每只试管的细菌数服从 $\lambda = 2$ 的 Poisson 分布，于是每只试管中有细菌的概率为

$$p = 1 - \frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2} = 1 - \mathrm{e}^{-2} = 0.8646647$$

   每只试管中有无细菌的试验可看作是 Bernoulli 试验，将这种疫苗放入 5 只试管中，则 5 只试管有细菌的试管数目服从二项分布，从而 5 只试管中都有细菌的概率为

$$C_5^5 p^5 (1-p)^{5-5} = 0.8646647^5 = 0.4833244$$

(b) 求至少有 3 只试管中有细菌的概率. (2 分)

【解】 至少有 3 只试管中有细菌的概率为

$$\sum_{k=3}^{5} C_5^k p^k (1-p)^{5-k} = 0.979972$$

3. 实验室器皿中产生甲、乙两类细菌的机会是相等的，且产生 k 个细菌的概率为

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) 求产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率. (2 分)

【解】 产生了 k 个细菌，并且 k 个细菌全都是甲类细菌的概率为

$$\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

于是，产生了甲类细菌但没有乙类细菌的概率为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} - 1\right)$$

(b) 在已知产生了细菌而且没有甲类细菌的条件下，求有 2 个乙类细菌的概率. (2 分)

【解】 产生了细菌而且没有甲类细菌的概率与上一问中的概率相同，产生两个乙类细菌的概率为

$$\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

故，所求条件概率为

$$\frac{\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} - 1\right)} = \frac{\lambda^2}{8\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} - 1\right)}$$

4. 若每条蚕的产卵数服从 Poisson 分布，参数为 λ，而每个卵变为成虫的概率为 p，且各卵是否变为成虫彼此独立，求每蚕养活 k 只小蚕的概率. (2 分)

【解】 用 A_n 表示蚕产出 n 个卵的事件，根据假设：每条蚕的产卵数服从参数为 λ 的 Poisson 分布，从而

$$P\left(A_n\right) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

用 B_k 表示蚕养活 k 只小蚕的事件，根据独立性假设，如果蚕产出了 n 个卵，则这 n 个卵中成活的成虫数服从参数为 n 与 p 的二项分布，从而

$$P\left(B_k \,|A_n\right) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

由全概率公式，我们有

$$\begin{aligned}
P\left(B_k\right) &= \sum_{n=k}^{\infty} P\left(A_n\right) P\left(B_k \,|A_n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k(1-p)^{n-k} \qquad \longleftarrow \text{ Let } j=n-k \\
&= \frac{p^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+j}}{j!}(1-p)^j \\
&= \frac{1}{k!}\,(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda p)^j}{j!} \\
&= \frac{1}{k!}\,(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda-\lambda p} \\
&= \frac{1}{k!}\,(\lambda p)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda p}
\end{aligned}$$

5. 通过某交叉路口的汽车流可看作 Poisson 分布，若在一分钟内没有车的概率为 0.2，求在 2 分钟内多于一车的概率. (2 分)

【解】 利用所给条件：交叉路口的汽车流可看作 Poisson 分布，在一分钟内没有车的概率为 0.2，从而有

$$\frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = 0.2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = -\ln 0.2 = 1.609438$$

根据 Poisson 分布的机制可知，2 分钟内的汽车流服从参数为 $2\lambda = 3.218876$ 的 Poisson 分布，于是，在 2 分钟内多于一车的概率为

$$1-\frac{(2\lambda)^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-2\lambda}-\frac{(2\lambda)^1}{1!}\,\mathrm{e}^{-2\lambda} = 1-\mathrm{e}^{-3.218876}-3.218876\times\mathrm{e}^{-3.218876} = 0.831245$$