2.2 第四周课后作业参考答案

1. 抽查一个家庭，考察两个事件，A：至多有一个女孩，B：男女孩子都有. 假设男女的出生率都是 $\frac{1}{2}$，证明：

(a) 对三个孩子之家，事件 A 与 B 独立. (2 分)

【解】 用 b 表示男孩，g 表示女孩，则三个孩子之家的样本空间为

$$\Omega = \{bbb\ ,\ bbg\ ,\ bgb\ ,\ gbb\ ,\ bgg\ ,\ gbg\ ,\ ggb\ ,\ ggg\}$$

因为男女的出生率都是 $\frac{1}{2}$，所以上述样本点等可能出现. 于是

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\ ,\quad P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\ ,\quad P(AB) = \frac{3}{8}$$

因为 $P(AB) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = P(A)P(B)$，所以事件 A 与 B 独立.

(b) 对四个孩子之家，事件 A 与 B 不独立. (2 分)

【解】 同样，用 b 表示男孩，g 表示女孩，则四个孩子之家的样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega = \{&bbbb,\ bbbg,\ bbgb,\ bgbb,\ gbbb,\ bbgg,\ bgbg,\ bggb,\\ &gbgb,\ gbbg,\ ggbb,\ bggg,\ gbgg,\ ggbg,\ gggb,\ gggg\}\end{aligned}$$

因为男女的出生率都是 $\frac{1}{2}$，所以上述样本点等可能出现. 于是

$$P(A) = \frac{5}{16}\ ,\quad P(B) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}\ ,\quad P(AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

因为 $P(AB) = \frac{1}{4} \neq \frac{5}{16}\cdot\frac{7}{8} = P(A)P(B)$，所以事件 A 与 B 不相互独立.

2. 设 A，B，C 三个事件相互独立，证明：

(a) $A\cup B$ 与 C 独立. (2 分)

【解】 因为

$$
\begin{aligned}
P\left((A \cup B) C\right) &= P\left(AC \cup BC\right) \\
&= P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\
&= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= \left[P(A) + P(B) - P(A)P(B)\right] P(C) \\
&= \left[P(A) + P(B) - P(AB)\right] P(C) \\
&= P\left(A \cup B\right) P(C)
\end{aligned}
$$

所以 $A \cup B$ 与 C 独立.

(b) AB 与 C 独立. (2 分)

【解】 因为

$$
P\left((AB) C\right) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = P(AB)P(C)
$$

所以 AB 与 C 相互独立.

(c) $A - B$ 与 C 独立. (2 分)

【解】 因为

$$
\begin{aligned}
P\left((A - B) C\right) &= P\left(AC - BC\right) \\
&= P(AC) - P(ABC) \\
&= P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\
&= \left[P(A) - P(A)P(B)\right] P(C) \\
&= P(A - B)P(C)
\end{aligned}
$$

所以 $A - B$ 与 C 相互独立.

(d) $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 也相互独立. (2 分)

【解】 因为

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right) &= P\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) \\
&= 1 - P\left(A \cup B \cup C\right) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A)P(B) + P(A)P(C) + P(B)P(C) \\
&\qquad - P(A)P(B)P(C) \\
&= \left[1 - P(A)\right]\left[1 - P(B)\right]\left[1 - P(C)\right] \\
&= P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right) P\left(\overline{C}\right)
\end{aligned}
$$

所以 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 也相互独立.

3. 三个工作小组独立对某个密码进行破译，如果他们成功的概率分别为 0.4，0.5，0.7，求该密码被破译的概率. (2 分)

【解】 设 A_1 表示第一个工作组成功破译密码，A_2 表示第二个工作组成功破译密码，A_3 表示第三个工作组成功破译密码，则

$$P(A_1) = 0.4\ ,\quad P(A_2) = 0.5\ ,\quad P(A_3) = 0.7$$

由于三个工作小组独立对密码进行破译，事件 A_1、A_2、A_3 分别对应于三个独立试验当中的事件，所以 A_1、A_2、A_3 相互独立. 于是，该密码被破译的概率为

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3\right) &= 1 - P\left(\overline{A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3}\right) \\
&= 1 - P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3\right) \\
&= 1 - P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2\right) P\left(\overline{A}_3\right) \\
&= 1 - [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot [1 - P(A_3)] \\
&= 1 - [1 - 0.4] \cdot [1 - 0.5] \cdot [1 - 0.7] \\
&= 0.91
\end{aligned}$$

4. 掷硬币出现正面的概率为 p，掷了 n 次，求下列概率：

(a) 至少出现一次正面. (2 分)

【解】掷一次硬币的试验只有两个结果：正面、反面，掷了 n 次硬币相当于进行 n 重 Bernoulli 试验，所以正面出现的次数服从二项分布. 于是，至少出现一次正面的概率为

$$1 - b(0; n, p) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n$$

(b) 至少出现两次正面. (2 分)

【解】 同理可知，至少出现两次正面的概率为

$$\begin{aligned}
1 - b(0; n, p) - b(1; n, p) &= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \\
&= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

(c) 恰好出现三次正面. (2 分)

【解】 同理，恰好出现三次正面的概率为

$$b\,(3;n,p)=\binom{n}{3}p^3(1-p)^{n-3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,p^3(1-p)^{n-3}$$

5. 在 Bernoulli 试验中，事件 A 出现的概率为 p，求在 n 次独立试验中，以下事件发生的概率：

   (a) A 出现偶数次. (2 分)

   (b) A 出现奇数次. (2 分)

   【解】 这是 n 重 Bernoulli 试验中事件 A 出现的次数问题，可用二项分布求解. 将事件 A 出现偶数次的概率记为 a，事件 A 出现奇数次的概率记为 b，利用二项分布概率 $b(k;n,p)$ 可知

$$a=\binom{n}{0}p^0(1-p)^n+\binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2}+\binom{n}{4}p^4(1-p)^{n-4}+\cdots$$

$$b=\binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}+\binom{n}{3}p^3(1-p)^{n-3}+\binom{n}{5}p^5(1-p)^{n-5}+\cdots$$

   注意到

$$\begin{cases} a+b &= (p+1-p)^n=1\\ a-b &= (-p+1-p)^n=(1-2p)^n \end{cases}$$

   由此解得

$$\begin{cases} a &= \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(1-2p)^n\\ b &= \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(1-2p)^n \end{cases}$$

6. 甲袋中有 $N-1$ 只白球和 1 只黑球，乙袋中有 N 只白球，每次从甲、乙两袋中分别取出一只球并交换放入另一袋中，这样经过了 n 次之后，问：

   (a) 黑球出现在甲袋中的概率是多少. (2 分)

   【解】 用 A_n 表示经过 n 次交换以后黑球位于甲袋中的事件，则 $\overline{A}_n$ 表示经过 n 次交换以后黑球位于乙袋中的事件. 记 $p_n=P\left(A_n\right)$，$q_n=P\left(\overline{A}_n\right)$，则有 $q_n=1-p_n$.

   事件 A_n 发生是伴随着经过 $n-1$ 次交换以后，黑球位于甲袋 (A_{n-1}) 或乙袋 $(\overline{A}_{n-1})$

中这两个事件之一的出现而发生，利用全概率公式则有

$$\begin{aligned}
p_n &= P\left(A_{n-1}\right)P\left(A_n\left|A_{n-1}\right.\right)+P\left(\overline{A}_{n-1}\right)P\left(A_n\left|\overline{A}_{n-1}\right.\right)\\
&= p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}+q_{n-1}\cdot\frac{1}{N}\\
&= \frac{N-1}{N}p_{n-1}+\frac{1}{N}\left(1-p_{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{N}+\frac{N-2}{N}p_{n-1}
\end{aligned}$$

因为初始时黑球位于甲袋，所以有初始条件 $p_0=1$. 由上述差分方程可得

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{1}{N}+\frac{N-2}{N}\left(\frac{1}{N}+\frac{N-2}{N}p_{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{N}+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)+\left(\frac{N-2}{N}\right)^2\left(\frac{1}{N}+\frac{N-2}{N}p_{n-3}\right)\\
&= \frac{1}{N}+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^2+\left(\frac{N-2}{N}\right)^3\left(\frac{1}{N}+\frac{N-2}{N}p_{n-4}\right)\\
&= \cdots\cdots=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^2+\cdots+\frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1}+\left(\frac{N-2}{N}\right)^n\\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-\left(\frac{N-2}{N}\right)^n}{1-\frac{N-2}{N}}+\left(\frac{N-2}{N}\right)^n\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

(b) 当 $n\to\infty$ 时，黑球出现在甲袋中的概率是多少. (2 分)

【解】 利用上述结果可知，当 $N\geq 2$ 时，我们有

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n=\frac{1}{2}$$

7. 一个工厂出产的产品中废品率为 0.005，现随机取出 1000 件.

(a) 计算其中至少有 2 件废品的概率. (2 分)

【解】 随机取出一件产品的可能结果只有两个：废品、正品，现随机重复进行 1000 次试验，

取出的废品数服从二项分布 $b(k;1000,0.005)$. 从而至少有 2 件废品的概率为

$$
\begin{aligned}
&1-b(0;1000,0.005)-b(1;1000,0.005)\\
=&1-\binom{1000}{0}0.005^0(1-0.005)^{1000-0}-\binom{1000}{1}0.005^1(1-0.005)^{1000-1}\\
=&0.959909
\end{aligned}
$$

计算概率的 R 代码与结果如下图所示.

```
> # 至少有 2 件废品的概率
> 1 - dbinom(0, 1000, 0.005) - dbinom(1, 1000, 0.005)
[1] 0.959909
>
> # 不超过 5 件废品的概率
> sum(dbinom(0:5, 1000, 0.005))
[1] 0.615961
>
> # 不超过 k (1:10) 件废品的概率
> x = array(0, 10)
> for (i in 1:10) x[i] = sum(dbinom(0:i, 1000, 0.005))
> data.frame(k = 1:10, Prob = x)
    k      Prob
1   1 0.0400910
2   2 0.1240196
3   3 0.2643224
4   4 0.4400534
5   5 0.6159610
6   6 0.7625507
7   7 0.8671524
8   8 0.9323970
9   9 0.9685348
10 10 0.9865310
```

(b) 计算其中不超过 5 件废品的概率. (2 分)

【解】 同理，不超过 5 件废品的概率为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{5}b(k;1000,0.005)&=\sum_{k=0}^{5}\binom{1000}{k}0.005^k(1-0.005)^{1000-k}\\
&=0.615961
\end{aligned}
$$

(c) 能以 90% 的概率希望废品件数不超过多少. (2 分)

【解】 同理，我们可以计算不超过 $k=1,2,\ldots,10$ 件废品的概率，结果如上图所示，由图中

可以看出，能以 90% 的概率希望废品件数不超过 8 件.

8. 某企业有 7 个专家顾问，如果每位专家提供正确意见的可能性为 0.6，现有某事项是否可行分别向 7 位专家征求意见，并按多数人的意见作出决策，求作出正确决策的概率. (2 分)

【解】每位专家提供意见的可能结果只要两个：正确、错误，因为是分别向 7 位专家征求意见，所以可以假设每位专家提供意见的试验相互独立，由于每位专家提供正确意见的可能性为 0.6，于是提供正确意见的数量服从二项分布 $b(k;7,0.6)$，若按多数人的意见作出决策，则作出正确决策的概率为 (R 代码与结果如下图所示)

$$\sum_{k=4}^{7} b(k;7,0.6) = \sum_{k=4}^{7} \binom{7}{k} 0.6^k (1-0.6)^{7-k} = 0.710208$$

```
> # 作出正确决策的概率
> sum(dbinom(4:7, 7,0.6))
[1] 0.710208
```