Chapter 2

条件概率与统计独立性

2.1 第三周课后作业参考答案

1. 若 M 件产品中包含 m 件废品，今在其中任取两件，求：

   (a) 取出的两件中至少有一件是废品的概率. (2 分)

   【解】 用 A 表示事件"取出的两件中至少有一件是废品"，则利用古典概型概率计算可得

$$P(A) = \frac{\binom{m}{1}\binom{M-m}{1} + \binom{m}{2}}{\binom{M}{2}} = \frac{m(2M-m-1)}{M(M-1)}$$

   (b) 已知取出的两件中有一件是废品的条件下，另一件也是废品的条件概率. (2 分)

   【解】 用 A 表示事件"取出的两件中至少有一件是废品"，用 B 表示事件"取出的两件都是废品"，易知 $B \subset A$，利用古典概型概率计算可得

$$P(B) = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{M}{2}}$$

再根据条件概率的定义可得

$$\begin{aligned} P(B\,|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{\dbinom{m}{2}}{\dbinom{m}{1}\dbinom{M-m}{1} + \dbinom{m}{2}} \\ &= \frac{m-1}{2M-m-1} \end{aligned}$$

(c) 已知两件中有一件不是废品的条件下，另一件是废品的条件概率. (2 分)

【解】 用 C 表示事件“取出的两件中有一件不是废品”，D 表示事件“取出的两件中恰有一件废品”，则所求概率为

$$\begin{aligned} P(D\,|C) &= \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} \\ &= \frac{\dbinom{m}{1}\dbinom{M-m}{1}}{\dbinom{M-m}{2} + \dbinom{m}{1}\dbinom{M-m}{1}} \\ &= \frac{2m}{M+m-1} \end{aligned}$$

2. 甲袋中有 a 只白球、b 只黑球，乙袋中有 α 只白球、β 只黑球，某人从甲袋中任取两球放入乙袋，然后在乙袋中任取两球，问最后取出的两球全为白球的概率是多少. (2 分)

【解】 用 $A_i\ (i=0,1,2)$ 表示从甲袋中任取两球放入乙袋中的白球个数，则

$$P\left(A_i\right) = \frac{\dbinom{a}{i}\dbinom{b}{2-i}}{\dbinom{a+b}{2}}, \qquad i=0,1,2$$

用 B 表示从乙袋中任取两球全为白球这一事件，则

$$P(B|A_0)=\frac{\binom{\alpha}{2}\binom{\beta+2}{0}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}=\frac{\binom{\alpha}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}$$

$$P(B|A_1)=\frac{\binom{\alpha+1}{2}\binom{\beta+1}{0}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}=\frac{\binom{\alpha+1}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}$$

$$P(B|A_2)=\frac{\binom{\alpha+2}{2}\binom{\beta}{0}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}=\frac{\binom{\alpha+2}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}$$

从而由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)\\&=\frac{\binom{a}{0}\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}\frac{\binom{\alpha}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}+\frac{\binom{a}{1}\binom{b}{1}}{\binom{a+b}{2}}\frac{\binom{\alpha+1}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}+\frac{\binom{a}{2}\binom{b}{0}}{\binom{a+b}{2}}\frac{\binom{\alpha+2}{2}}{\binom{\alpha+\beta+2}{2}}\\&=\frac{\binom{b}{2}\binom{\alpha}{2}+\binom{a}{1}\binom{b}{1}\binom{\alpha+1}{2}+\binom{a}{2}\binom{\alpha+2}{2}}{\binom{a+b}{2}\binom{\alpha+\beta+2}{2}}\end{aligned}$$

3. 设一个家庭中有 n 个小孩的概率为

$$p_n=\begin{cases}\alpha p^n, & n\ge 1\\ 1-\dfrac{\alpha p}{1-p}, & n=0\end{cases}$$

其中 $0<p<1$，$0<\alpha<\dfrac{1-p}{p}$. 假设生一个小孩为男孩或女孩是等可能的.

(a) 证明一个家庭有 $k\,(k\geq 1)$ 个男孩的概率为 $\dfrac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$. (2 分)

【证明】 假设

$$
\begin{aligned}
A_n &= \{\text{一个家庭中有 } n \text{ 个孩子}\}\,, \quad n=1,2,3,\ldots \\
B_k &= \{\text{该家庭中有 } k \text{ 个男孩}\}\,, \quad k\geq 1
\end{aligned}
$$

由于假设生男孩或生女孩是等可能的，所以

$$
P\left(B_k\,|A_n\right)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n
$$

于是，利用全概率公式可得

$$
\begin{aligned}
P\left(B_k\right) &= \sum_{n=k}^{\infty} P\left(A_n\right)\,P\left(B_k\,|A_n\right)=\sum_{n=k}^{\infty}\alpha\,p^n\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \alpha\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^{k+i} \\
&= \alpha\left(\frac{p}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{\infty}\binom{k+i}{i}\left(\frac{p}{2}\right)^{i} \\
&= \alpha\left(\frac{p}{2}\right)^k\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-k-i}{i}\left(-\frac{p}{2}\right)^{i} \\
&= \alpha\left(\frac{p}{2}\right)^k\left(1-\frac{p}{2}\right)^{-k-1} \\
&= \frac{2\,\alpha\,p^k}{(2-p)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

(b) 已知家庭中至少有一个男孩，求此家庭至少有两个男孩的概率. (2 分)

【解】 假设 $A=\{\text{家庭中至少有一个男孩}\}$，$B=\{\text{家庭中至少有两个男孩}\}$，易知 $B\subset A$，

并且

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,\alpha\,p^k}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2\,\alpha}{2-p}\cdot\frac{\dfrac{p}{2-p}}{1-\dfrac{p}{2-p}}=\frac{\alpha\,p}{(2-p)\,(1-p)}$$

$$P(B)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2\,\alpha\,p^k}{(2-p)^{k+1}}=\frac{2\,\alpha}{2-p}\cdot\frac{\dfrac{p^2}{(2-p)^2}}{1-\dfrac{p}{2-p}}=\frac{\alpha\,p^2}{(2-p)^2\,(1-p)}$$

根据条件概率的定义，就有

$$P\left(B\,|A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{p}{2-p}$$

(c) 已知家庭中没有女孩，求正好有一个男孩的概率. (2 分)

【解】 假设

$$C=\{\text{家庭中无女孩}\}=\{\text{家庭中无孩子，或者家庭中有 } n \text{ 个孩子且都是男孩}\}$$
$$D=\{\text{家庭中正好有一个男孩}\}=\{\text{家庭中只有一个孩子且是男孩}\}$$

易知 $D\subset C$，而且

$$\begin{aligned}P(C)&=1-\frac{\alpha\,p}{1-p}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\,p^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{\alpha\,p}{1-p}+\frac{\alpha\,\dfrac{p}{2}}{1-\dfrac{p}{2}}\\&=\frac{2-3p-\alpha\,p+p^2}{(1-p)(2-p)}\\P(D)&=\alpha\,p\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\alpha\,p\end{aligned}$$

根据条件概率的定义，就有

$$\begin{aligned}P\left(D\,|C\right)&=\frac{P(DC)}{P(C)}=\frac{P(D)}{P(C)}=\frac{\alpha\,p}{2}\cdot\frac{(1-p)(2-p)}{2-3p-\alpha\,p+p^2}\\&=\frac{\alpha\,p(1-p)(2-p)}{2\,(2-3p-\alpha\,p+p^2)}\end{aligned}$$

4. 甲袋中有 3 只黑球、7 只白球，乙袋中有 7 只黑球、13 只白球，丙袋中有 12 只黑球、8 只白球. 先以 $1:2:2$ 的概率选择甲、乙、丙中的一只袋子，再从选中的袋子中先后摸出 2 球.

   (a) 求先摸到的是黑球的概率. (2 分)

   【解】 记 A_1 表示选中甲袋，A_2 表示选中乙袋，A_3 表示选中丙袋，则

$$P(A_1)=\frac{1}{5},\quad P(A_2)=\frac{2}{5},\quad P(A_3)=\frac{2}{5}$$

   用 B_1 表示事件先摸到的是黑球，则

$$P(B_1|A_1)=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3+7}{1}}=\frac{3}{10}$$

$$P(B_1|A_2)=\frac{\binom{7}{1}}{\binom{7+13}{1}}=\frac{7}{20}$$

$$P(B_1|A_3)=\frac{\binom{12}{1}}{\binom{12+8}{1}}=\frac{12}{20}$$

   从而由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)+P(A_3)P(B_1|A_3)\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{20}=0.44\end{aligned}$$

   (b) 已知后摸到的是白球，求先摸到的是黑球概率. (2 分)

   【解】 用 B_2 表示事件“后摸到的是黑球”，则 $\overline{B}_2$ 表示事件“后摸到的是白球”，于是我们要计算的是条件概率 $P\left(B_1|\overline{B}_2\right)$，由条件概率的定义知

$$P\left(B_1|\overline{B}_2\right)=\frac{P\left(B_1\overline{B}_2\right)}{P\left(\overline{B}_2\right)}$$

根据全概率公式，我们有

$$
\begin{aligned}
P\left(B_1\overline{B}_2\right) &= P\left(A_1\right)P\left(B_1\overline{B}_2\left|A_1\right.\right)+P\left(A_2\right)P\left(B_1\overline{B}_2\left|A_2\right.\right)+P\left(A_3\right)P\left(B_1\overline{B}_2\left|A_3\right.\right)\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{20}\cdot\frac{13}{19}+\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}=0.24351
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{B}_2\right) &= P\left(A_1\right)P\left(\overline{B}_2\left|A_1\right.\right)+P\left(A_2\right)P\left(\overline{B}_2\left|A_2\right.\right)+P\left(A_3\right)P\left(\overline{B}_2\left|A_3\right.\right)\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{13}{20}+\frac{2}{5}\cdot\frac{8}{20}=0.56
\end{aligned}
$$

故

$$
P\left(B_1\left|\overline{B}_2\right.\right)=\frac{P\left(B_1\overline{B}_2\right)}{P\left(\overline{B}_2\right)}=\frac{0.24351}{0.56}=0.4348
$$