1.2 第二周课后作业参考答案

1. 证明等式：(2 分)

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\,n\binom{n}{n}=0$$

【证】 利用二项式展开的结果，我们有

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

两侧同时对 x 求导数，得

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

取其中的 $x=-1$，则有

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\,n\binom{n}{n}=0$$

2. 将一部五卷的文集按任意次序放到书架上去，求以下事件的概率：

(a) 第一卷出现在旁边. (2 分)

【解】 用 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 分别表示五卷书，则按任意次序放到书架上去相当于这五个数字的一个全排列，于是样本空间的样本点总数为：$5!=120$. 第一卷出现在旁边共有 2 种不同情形，其余四卷可任意排列，于是有利场合数为：$2\times 4!=48$，故

$$P\,(\text{第一卷出现在旁边})=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

(b) 第一卷及第五卷出现在旁边. (2 分)

【解】 第一卷及第五卷出现在旁边共有 2 种不同情形，其余三卷可任意排列，于是有利场合数为：$2\times 3!=12$，故

$$P\,(\text{第一卷及第五卷出现在旁边})=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$$

(c) 第一卷或第五卷出现在旁边. (2 分)

【解】 第一卷出现在旁边的有利场合数为：$2\times 4!=48$，同理，第五卷出现在旁边的有利场合数亦为：$2\times 4!=48$，但其中第一卷及第五卷同时出现在旁边的有利场合数：$2\times 3!=12$

被重复计算了一次，所以第一卷或第五卷出现在旁边的有利场合数为：$48+48-12=84$，故

$$P\,(\text{第一卷或第五卷出现在旁边}) = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$$

(d) 第一卷及第五卷都不出现在旁边. (2 分)

【解】 第一卷及第五卷都不出现在旁边的对立事件为：第一卷或第五卷出现在旁边，故

$$P\,(\text{第一卷及第五卷都不出现在旁边}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

(e) 第三卷恰好在正中. (2 分)

【解】 第三卷恰好在正中只有一种情形，其余四卷可以任意排列，所以第三卷恰好在正中的有利场合数为：$4! = 24$，故

$$P\,(\text{第三卷恰好在正中}) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

3. 从 n 双不同的鞋子中任取 $2r$ $(2r<n)$ 只，求下列事件发生的概率：

(a) 没有成对的鞋子. (2 分)

【解】 从 n 双不同的鞋子 ($2n$ 只鞋子) 中任取 $2r$ $(2r<n)$ 只，不同的取法总数为：$\begin{pmatrix} 2n \\ 2r \end{pmatrix}$.
没有成对的鞋子的有利场合是：先从 n 双不同的鞋子中任取 $2r$ 双，再从每双中任取一只，有利场合数为：$\begin{pmatrix} n \\ 2r \end{pmatrix} 2^{2r}$，故

$$P\,(\text{没有成对的鞋子}) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ 2r \end{pmatrix} 2^{2r}}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2r \end{pmatrix}}$$

(b) 只有一对鞋子. (2 分)

【解】只有一对鞋子的有利场合是：先从 n 双中取出 1 双，其 2 只鞋全部取出，共有 $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ 种不同取法. 再从余下的 $n-1$ 双中取出 $2r-2$ 双，再从每双中任取一只，共有 $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2r-2 \end{pmatrix} 2^{2r-2}$ 种不同取法. 故

$$P\,(\text{只有一对鞋子}) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ 2r-2 \end{pmatrix} 2^{2r-2}}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2r \end{pmatrix}}$$

(c) 恰有两对鞋子. (2 分)

【解】 仿照上题，恰有两对鞋子的有利场合是：先从 n 双中任取出 2 双，其 4 只鞋全部取出，共有 $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 种不同取法. 再从余下的 $n-2$ 双中取出 $2r-4$ 双，再从每双中任取一只，共有 $\begin{pmatrix} n-2 \\ 2r-4 \end{pmatrix} 2^{2r-4}$ 种不同取法. 故

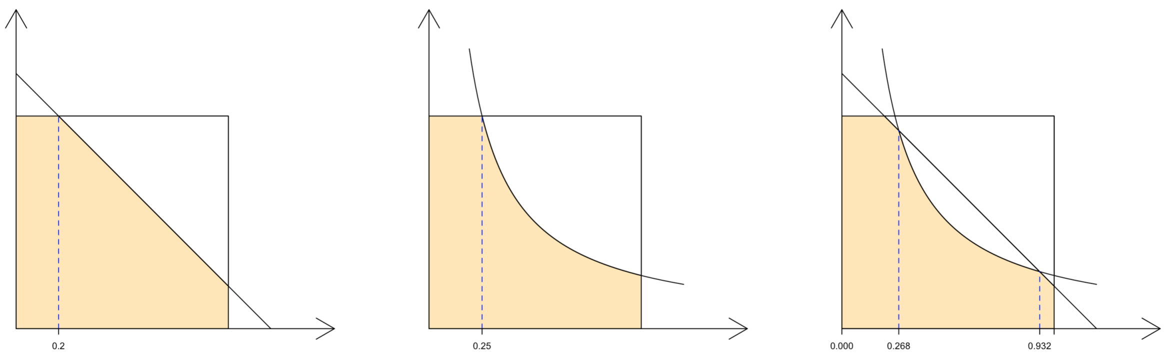
$$P\,(\text{恰有两对鞋子}) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-2 \\ 2r-4 \end{pmatrix} 2^{2r-4}}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2r \end{pmatrix}}$$

(d) 有 r 对鞋子. (2 分)

【解】 有 r 对鞋子的有利场合是：至少有 r 对鞋子，所以有利场合数为：$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$，故

$$P\,(\text{有 } r \text{ 对鞋子}) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2r \end{pmatrix}}$$

4. 从 (0, 1) 区间中随机地取两个数，求以下概率：



(a) 两数之和小于 1.2. (2 分)

【解】 这是几何概型问题，由上图 (左) 可知所求概率为

$$P\,(\text{两数之和小于 } 1.2) = \frac{1 - \dfrac{1}{2} \times 0.8 \times 0.8}{1} = 0.68$$

(b) 两数之积小于 $\frac{1}{4}$. (2 分)

【解】 类似地，由上图 (中) 可知所求概率为

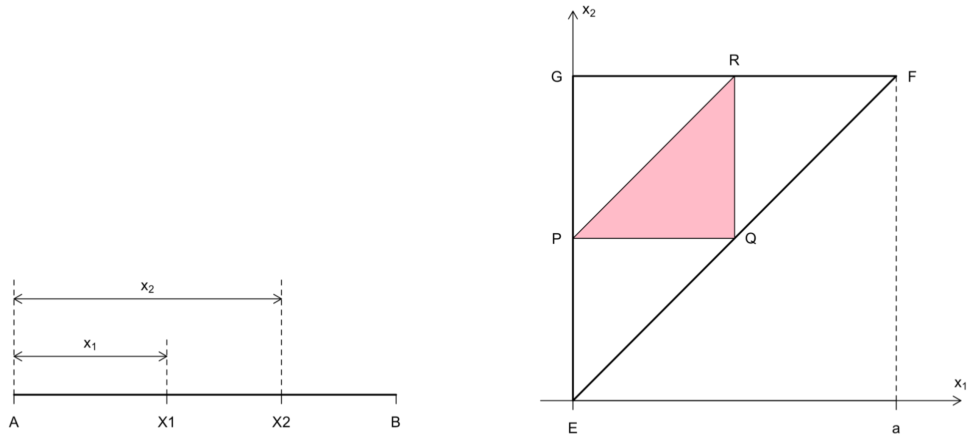
$$P\left(\text{两数之积小于 } \frac{1}{4}\right) = 0.25 \times 1 + \int_{0.25}^{1} \frac{1}{4x} \mathrm{d}x = 0.5966$$

(c) 上述两个要求同时满足. (2 分)

【解】 类似地，由上图 (右) 可知所求概率为

$$\begin{aligned} P\,(\text{两条件均满足}) &= 0.2 \times 1 + \int_{0.2}^{0.268} (1.2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0.268}^{0.932} \frac{1}{4x}\mathrm{d}x + \int_{0.932}^{1} (1.2 - x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0.593 \end{aligned}$$

5. 在一线段 AB 中随机地取两个点把线段截为三段，求这三段可以构成一个三角形的概率（三线段能构成三角形的充分必要条件是任意两边之和大于第三边）. (2 分)



【解】 设在线段 AB 中随机取两个点，从左到右依次记为 X_1 和 X_2，令 $AB = a$，$AX_1 = x_1$，$AX_2 = x_2$ (上图左)，则有 $0 \le x_1 \le x_2 \le a$，点 (x_1, x_2) 与上图 (右) 三角形 EFG 内的点是一一对应的. 三线段构成三角形的充分必要条件是

$$\begin{cases} x_1 + (x_2 - x_1) > a - x_2 \\ x_1 + (a - x_2) > (x_2 - x_1) \\ (x_2 - x_1) + (a - x_2) > x_1 \end{cases}$$

它确定的区域是上图 (右) 中的三角形区域 PQR，由几何概率的计算知，所求概率为 $\frac{1}{4}$.

6. 某班有 N 个士兵，每人各有一支枪，这些枪外形完全一样. 在一次夜间紧急集合当中，若每人随机地取走一支枪，问至少有一个人拿到自己的枪的概率是多少. (2 分)

【解】 用 A_i 表示"第 i 个士兵拿到自己的枪"这一事件，$i=1,2,\dots,N$，易知

$$
\begin{aligned}
P\left(A_i\right) &= \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N} \\
P\left(A_iA_j\right) &= \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}, \qquad i \neq j \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\left(A_1A_2\cdots A_N\right) &= \frac{1}{N!}
\end{aligned}
$$

利用加法公式可知

$$
\begin{aligned}
P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\right) = \frac{(N-1)!}{N!} &= \sum_{i=1}^{N} P\left(A_i\right) - \sum_{1 \le i < j \le N} P\left(A_iA_j\right) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j < k \le N} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots + (-1)^{N-1} P\left(A_1A_2\cdots A_N\right) \\
&= \binom{N}{1}\frac{1}{N} - \binom{N}{2}\frac{1}{N(N-1)} + \binom{N}{3}\frac{1}{N(N-1)(N-2)} \\
&\quad - \cdots + (-1)^{N-1}\frac{1}{N!} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}
\end{aligned}
$$

7. 从一副扑克牌中有放回地一张张抽取，求在抽取第 6 张时得到全部 4 种花色的概率. (2 分)

【解】 用 A_1 表示抽取的 6 张牌当中有黑桃这一事件，A_2 表示抽取的 6 张牌当中有红心这一事件，A_3 表示抽取的 6 张牌当中有方块这一事件，A_4 表示抽取的 6 张牌当中有草花这一事件，则得到全部 4 种花色的概率为

$$
P\left(A_1A_2A_3A_4\right) = 1 - P\left(\overline{A_1A_2A_3A_4}\right) = 1 - P\left(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4\right)
$$

再由加法公式可知

$$
\begin{aligned}
P\left(A_1A_2A_3A_4\right) &= 1 - \sum_{i=1}^{4} P\left(\overline{A}_i\right) + \sum_{1 \le i < j \le 4} P\left(\overline{A}_i\overline{A}_j\right) - \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P\left(\overline{A}_i\overline{A}_j\overline{A}_k\right) + P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\right) \\
&= 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^6 + 6\left(\frac{2}{4}\right)^6 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^6 + 0 \\
&= 0.38086
\end{aligned}
$$

8. 求包含事件 A、B 的最小 σ 域. (2 分)

【解】 我们用数字 0, 1 来表示两种不同的状态. 例如 1 表示样本点 ω 属于某一事件，0 就表示样本点 ω 不属于该事件.

对于两个事件 A, B 而言，则会有 $2^2 = 4$ 种不同的情况，它们分别代表四个事件，这四个事件两两互不相容，如下表所示：

A	B	
1	1	表示 AB
1	0	表示 $A\overline{B}$
0	1	表示 $\overline{A}B$
0	0	表示 $\overline{A}\,\overline{B}$

现在考虑这四个互不相容事件 AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{A}\,\overline{B}$, 这四个互不相容事件构成了全空间 Ω 的一个分割. 为了找出最小 σ 域，我们来开率事件“并”的运算. 如果以 1 表示该事件参与“并”的运算，以 0 表示该事件不参与“并”的运算，这样就有 $2^4 = 16$ 种情况，列于下表：

AB	$A\overline{B}$	$\overline{A}B$	$\overline{A}\,\overline{B}$		
0	0	0	0	表示	Φ
1	0	0	0	表示	AB
0	1	0	0	表示	$A\overline{B}$
0	0	1	0	表示	$\overline{A}B$
0	0	0	1	表示	$\overline{A}\,\overline{B}$
1	1	0	0	表示	A
1	0	1	0	表示	B
1	0	0	1	表示	$AB\bigcup\overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	0	表示	$A\overline{B}\bigcup\overline{A}B$
0	1	0	1	表示	$\overline{B}$
0	0	1	1	表示	$\overline{A}$
1	1	1	0	表示	$A\bigcup B$
1	1	0	1	表示	$A\bigcup\overline{B}$
1	0	1	1	表示	$\overline{A}\bigcup B$
0	1	1	1	表示	$\overline{A}\bigcup\overline{B}$
1	1	1	1	表示	Ω

因此，该最小 σ 域为

$$\Big\{\Omega\,,\ \Phi\,,\ A\,,\ B\,,\ \overline{A}\,,\ \overline{B}\,,\ AB\,,\ A\overline{B}\,,\ \overline{A}B\,,\ \overline{A}\,\overline{B}\,,\ AB\bigcup\overline{A}\,\overline{B}\,,$$

$$A\overline{B}\bigcup\overline{A}B\,,\ A\bigcup B\,,\ A\bigcup\overline{B}\,,\ \overline{A}\bigcup B\,,\ \overline{A}\bigcup\overline{B}\Big\}$$