Chapter 5

极限定理

5.1 第十二周课后作业参考答案

1. 验证概率分布如下给定的独立随机变量序列 $\{X_k\}$ 是否满足 Markov 条件:

(a) $P\left\{X_k = \pm 2^k\right\} = \dfrac{1}{2}$. (2 分)

【解】 由所给条件知 X_k 的分布律为

X_k	-2^k	2^k
p_i	0.5	0.5

所以有

$$E(X_k) = -2^k \times \frac{1}{2} + 2^k \times \frac{1}{2} = 0$$

$$E\left(X_k^2\right) = \left(-2^k\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(2^k\right)^2 \times \frac{1}{2} = 4^k$$

$$D(X_k) = E\left(X_k^2\right) - \left[E(X_k)\right]^2 = 4^k$$

又因为随机变量序列 $\{X_k\}$ 相互独立，于是

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 4^k = \frac{4\left(4^n - 1\right)}{3n^2} \longrightarrow \infty\,, \quad n \to \infty$$

所以该随机变量序列 $\{X_k\}$ 不满足 Markov 条件.

(b) $P\left\{X_k = \pm 2^k\right\} = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$, $P\{X_k = 0\} = 1 - \dfrac{1}{2^{2k}}$. (2 分)

【解】 由所给条件知 X_k 的分布律为

X_k	-2^k	0	2^k
p_i	$\dfrac{1}{2^{2k+1}}$	$1-\dfrac{1}{2^{2k}}$	$\dfrac{1}{2^{2k+1}}$

所以有

$$\begin{aligned}
E\left(X_k\right) &= -2^k \times \frac{1}{2^{2k+1}} + 0 \times \left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right) + 2^k \times \frac{1}{2^{2k+1}} = 0 \\
E\left(X_k^2\right) &= \left(-2^k\right)^2 \times \frac{1}{2^{2k+1}} + 0^2 \times \left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right) + \left(2^k\right)^2 \times \frac{1}{2^{2k+1}} = 1 \\
D\left(X_k\right) &= E\left(X_k^2\right) - \left[E\left(X_k\right)\right]^2 = 1
\end{aligned}$$

又因为随机变量序列 $\{X_k\}$ 相互独立，于是

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \longrightarrow 0\,, \quad n \to \infty$$

所以该随机变量序列 $\{X_k\}$ 满足 Markov 条件.

(c) $P\left\{X_k = \pm k\right\} = \dfrac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$， $P\left\{X_k = 0\right\} = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$. (2 分)

【解】 由所给条件知 X_k 的分布律为

X_k	$-k$	0	k
p_i	$\dfrac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$	$1-k^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$

所以有

$$\begin{aligned}
E\left(X_k\right) &= -k \times \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} + 0 \times \left(1-k^{-\frac{1}{2}}\right) + k \times \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} = 0 \\
E\left(X_k^2\right) &= (-k)^2 \times \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} + 0^2 \times \left(1-k^{-\frac{1}{2}}\right) + k^2 \times \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} = k^{\frac{3}{2}} \\
D\left(X_k\right) &= E\left(X_k^2\right) - \left[E\left(X_k\right)\right]^2 = k^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

又因为随机变量序列 $\{X_k\}$ 相互独立，于是

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\left(X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{3}{2}}$$

$$\geq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\longrightarrow\frac{1}{2},\quad n\to\infty$$

所以该随机变量序列 $\{X_k\}$ 不满足 Markov 条件.

2. 用 Chebyshev 不等式确定当掷一枚均匀硬币时，需要投掷多少次才能保证使得正面出现的概率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%. (2 分)

【解】 用 μ_n 表示掷一枚均匀硬币时正面向上出现的次数，则

$$\mu_n\sim b(n,\ 0.5)\quad\Longrightarrow\quad E\left(\mu_n\right)=0.5n\ ,\quad D\left(\mu_n\right)=0.25n$$

硬币正面向上出现的频率为 $\xi=\dfrac{\mu_n}{n}$，所以

$$E\left(\xi\right)=\frac{1}{n}E\left(\mu_n\right)=0.5\ ,\quad D\left(\xi\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\mu_n\right)=\frac{0.25}{n}$$

欲使正面出现的频率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%，即要求

$$P\left\{0.4<\xi<0.6\right\}\geq 0.90\quad\Longleftrightarrow\quad P\left\{|\xi-0.5|<0.1\right\}\geq 0.90$$

应用 Chebyshev 不等式，则有

$$P\left\{|\xi-E(\xi)|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}\quad\Longleftrightarrow\quad P\left\{|\xi-0.5|<0.1\right\}\geq 1-\frac{1}{0.1^2}\times\frac{0.25}{n}=1-\frac{25}{n}$$

于是，当 $1-\dfrac{25}{n}\geq 0.9$，即 $n\geq 250$ 时，即可保证正面出现的频率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%.

3. 某计算机系统有 120 个终端，每个终端有 5% 的时间在使用，若各个终端在使用与否是相互独立的，试求有 10 个或更多终端在使用的概率. (2 分)

【解】设 ξ_k 表示第 k 个终端是否在使用，则 ξ_k 服从 Bernoulli 分布，其分布律为 $P\left\{\xi_k=1\right\}=0.05$，$P\left\{\xi_k=0\right\}=0.95$，所以

$$E\left(\xi_k\right)=0.05\ ,\qquad D\left(\xi_k\right)=0.05\times 0.95=0.0475$$

同时在使用的终端数量为 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{120} \sim b(120,\ 0.05)$，根据中心极限定理知

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{120} \quad \xrightarrow{L} \quad N\left(120 \times 0.05\ ,\ 120 \times 0.05 \times 0.95\right) = N(6,\ 5.7)$$

于是，有 10 个或更多终端在使用的概率为

$$\begin{aligned} P\{\eta \geq 10\} &= P\left\{\frac{\eta - 6}{\sqrt{5.7}} \geq \frac{10-6}{\sqrt{5.7}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{10-6}{\sqrt{5.7}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.6754) \\ &= 0.0469 \end{aligned}$$

4. 用正态逼近确定当掷一枚均匀硬币时，需要投掷多少次才能保证使得正面出现的概率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%. (2 分)

【解】 用 μ_n 表示掷一枚均匀硬币时正面向上出现的次数，则

$$\mu_n \sim b(n,\ 0.5) \quad \Longrightarrow \quad E\left(\mu_n\right) = 0.5n\ , \quad D\left(\mu_n\right) = 0.25n$$

硬币正面向上出现的频率为 $\xi = \dfrac{\mu_n}{n}$，所以

$$E\left(\xi\right) = \frac{1}{n}E\left(\mu_n\right) = 0.5\ , \quad D\left(\xi\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\mu_n\right) = \frac{0.25}{n}$$

根据 CLT (中心极限定理) 知，当 $n \to \infty$ 时有

$$\xi \quad \xrightarrow{L} \quad N\left(0.5,\ \frac{0.25}{n}\right)$$

欲使正面出现的频率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%，即要求

$$
\begin{aligned}
P\{0.4<\xi<0.6\}\geq 0.90 \iff & P\{|\xi-0.5|<0.1\}\geq 0.90 \\
\iff & P\left\{\left|\frac{\xi-0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right|<\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right\}\geq 0.90 \\
\iff & P\left\{\left|\frac{\xi-0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{n}}}\right|<\frac{\sqrt{n}}{5}\right\}\geq 0.90 \\
\iff & \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geq 0.90 \\
\iff & 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-1\geq 0.90 \\
\iff & \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geq 0.95 \\
\iff & \frac{\sqrt{n}}{5}\geq 1.644854 \\
\iff & n\geq (5\times 1.644854)^2=67.63862
\end{aligned}
$$

于是，当 $n\geq 68$ 时，即可保证正面出现的频率在 0.4 和 0.6 之间的概率不小于 90%.

5. 若飞机乘客购票后按期搭乘的概率为 p，各乘客的行动假设是相互独立的.

(a) 求一架 200 座的飞机售出 202 张机票不发生超座的概率. (2 分)

【解】 用 ξ_k 表示第 k 位购票者是否按期搭乘飞机，则 ξ_k 服从 Bernoulli 分布，其分布律为 $P\{\xi_k=1\}=p$，$P\{\xi_k=0\}=1-p$，所以

$$E(\xi_k)=p\ ,\qquad D(\xi_k)=p(1-p)$$

购票后实际搭乘飞机的人数为 $\mu=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{202}$，根据 CLT (中心极限定理) 知，当 $n\to\infty$ 时有

$$\mu \ \xrightarrow{L}\ N(202p,\ 202p(1-p)) \implies \frac{\mu-202p}{\sqrt{202p(1-p)}}\ \xrightarrow{L}\ N(0,\ 1)$$

于是，不发生超座的概率为

$$P\{\mu\leq 200\}=P\left\{\frac{\mu-202p}{\sqrt{202p(1-p)}}\leq\frac{200-202p}{\sqrt{202p(1-p)}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{200-202p}{\sqrt{202p(1-p)}}\right)$$

(b) 计算 $p = 0.97,\ 0.96,\ 0.95$ 时上述概率的取值. (2 分)

【解】 当 $p = 0.97,\ 0.96,\ 0.95$ 时，计算得不发生超座的概率分别为 0.9529909、0.9854837 和 0.9955379.

```
> x = c(0.97, 0.96, 0.95)
> y = (200 - 202 * x) / sqrt(202 * x * (1-x))
> pnorm(y)
[1] 0.9529909 0.9854837 0.9955379
```

6. 某理发店为每个顾客的服务时间服从均值为 $\frac{1}{3}$ (小时) 的指数分布，假设对每个顾客的服务是相互独立的.

(a) 求为对 100 个顾客服务，总共需要 31 小时至 35 小时的概率. (2 分)

【解】 为第 k 个顾客的服务时间 $\xi_k \sim \mathrm{Exp}(3)$，$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100$，所以

$$E(\xi_k) = \frac{1}{3}, \qquad D(\xi_k) = \frac{1}{9}$$

且 ξ_k 相互独立. 对 100 个顾客服务的总时间为 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}$，根据 CLT (中心极限定理) 知，$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}$ 近似服从正态分布 $N\left(100 \times \frac{1}{3},\ 100 \times \frac{1}{9}\right)$. 于是

$$\begin{aligned} P\{31 \le \eta \le 35\} &= P\left\{\frac{31 - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{100}{9}}} \le \frac{\eta - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{100}{9}}} \le \frac{35 - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{100}{9}}}\right\} \\ &= P\left\{-0.7 \le \frac{\eta - \frac{100}{3}}{\sqrt{\frac{100}{9}}} \le 0.5\right\} \\ &\approx \Phi(0.5) - \Phi(-0.7) = 0.4494988 \end{aligned}$$

```
> pnorm(0.5, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE) - pnorm(-0.7, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE)
[1] 0.4494988
```

(b) 以 95% 的概率在 32 小时之内可以服务完几个顾客. (2 分)

【解】 服务完 n 个顾客的总时间为 $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$，当 n 很大时，根据 CLT (中心极限定理) 知

$$\zeta \quad \text{近似服从} \quad N\left(\frac{n}{3},\ \frac{n}{9}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\zeta - \frac{n}{3}}{\sqrt{\frac{n}{9}}} \quad \text{近似服从} \quad N(0,\ 1)$$

于是，以 95% 的概率在 32 小时之内服务完 n 个顾客即要求 $P\{\zeta \le 32\} \ge 0.95$ 来确定 n.

因为

$$P\{\zeta \leq 32\} \geq 0.95 \iff P\left\{\frac{\zeta - \frac{n}{3}}{\sqrt{\frac{n}{9}}} \leq \frac{32 - \frac{n}{3}}{\sqrt{\frac{n}{9}}}\right\} \geq 0.95$$

从而近似有

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{32-\frac{n}{3}}{\sqrt{\frac{n}{9}}}\right) \geq 0.95 \iff & \Phi\left(\frac{96-n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \\ \Longrightarrow & \frac{96-n}{\sqrt{n}} \geq 1.644854 \\ \Longrightarrow & 9216 - 194.7055 \times n + n^2 \geq 0 \\ \Longrightarrow & n \leq 81.18 \quad \text{或} \quad n \geq 113.5255 \text{ (舍)}\end{aligned}$$

故以 95% 的概率在 32 小时之内可以服务完 81 个顾客.

```
> qnorm(0.95, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE)
[1] 1.644854
> polyroot(c(9216, -194.7055, 1))
[1]  81.1800-0i 113.5255+0i
```

(c) 确定 Δ，使理发店对 100 个顾客的服务时间在 $(33.33-\Delta,\ 33.33+\Delta)$ 之间的概率大于 95%. (2 分)

【解】 对 100 个顾客服务的总时间为 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}$，根据 CLT (中心极限定理) 知，$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{100}$ 近似服从正态分布 $N\left(100 \times \frac{1}{3},\ 100 \times \frac{1}{9}\right)$. 于是，使理发店对 100 个顾客的服务时间在 $(33.33-\Delta,\ 33.33+\Delta)$ 之间的概率大于 95%，即要求

$$\begin{aligned} & P\{33.33 - \Delta < \eta < 33.33 + \Delta\} > 0.95 \\ \iff & P\{-\Delta < \eta - 33.33 < \Delta\} > 0.95 \\ \iff & P\left\{-\frac{\Delta}{\sqrt{\frac{100}{9}}} < \frac{\eta - 33.33}{\sqrt{\frac{100}{9}}} < \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{100}{9}}}\right\} > 0.95 \\ \iff & P\left\{-0.3\Delta < \frac{\eta - 33.33}{\sqrt{\frac{100}{9}}} < 0.3\Delta\right\} > 0.95 \\ \Longrightarrow & \Phi(0.3\Delta) - \Phi(-0.3\Delta) > 0.95 \\ \Longrightarrow & 2\Phi(0.3\Delta) - 1 > 0.95 \Longrightarrow \Phi(0.3\Delta) > 0.975 \end{aligned}$$

于是，

$$0.3\Delta > 1.959964 \quad \Longrightarrow \quad \Delta > 6.533213$$

故，$\Delta = 6.54$ 小时.

7. 设 $\{\xi_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots\}$ 是相互独立的随机变量序列，它们具有相同的分布

$$P\{\xi_k = 1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi_k = 0\} = \frac{1}{2}$$

记 $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$，用特征函数法证明 η_n 的分布收敛于 $[0\ ,\ 1]$ 上的均匀分布. (2 分)

【证】 $\xi_k\ (k=1,\ 2,\ \ldots)$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}
f_{\xi_k}(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\xi_k}\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{it\times 1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{it\times 0} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{it}+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}it}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it} \quad \longleftarrow \quad \text{Euler 公式} \\
&= \cos\frac{t}{2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}it}
\end{aligned}$$

于是，$\frac{\xi_k}{2^k}$ 的特征函数为

$$f_{\frac{\xi_k}{2^k}}(t) = \cos\frac{t}{2^{k+1}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{it}{2^{k+1}}}$$

所以，$\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}
f_{\eta_n}(t) &= \left(\cos\frac{t}{2^2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{it}{2^2}}\right)\left(\cos\frac{t}{2^3}\cdot \mathrm{e}^{\frac{it}{2^3}}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\cos\frac{t}{2^{n+1}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{it}{2^{n+1}}}\right) \\
&= \cos\frac{t}{2^2}\ \cos\frac{t}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{t}{2^{n+1}}\ \mathrm{e}^{it\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \frac{1}{2^n}\ \frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2^{n+1}}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}it\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}
\end{aligned}$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty} f_{\eta_n}(t) = \frac{2}{t}\left(\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it} = \frac{2}{t}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}it}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}it} = \frac{1}{it}\left(\mathrm{e}^{it}-1\right)$$

而 $\frac{1}{it}\left(\mathrm{e}^{it}-1\right)$ 就是 $[0,\ 1]$ 上均匀分布的特征函数，由连续性定理即知 η_n 的分布收敛于 $[0\ ,\ 1]$ 上的均匀分布.

8. 用特征函数法证明二项分布的 Poisson 逼近定理. (2 分)

【证】 成功概率为 p_n 的二项分布的特征函数为

$$f_n(t) = \left(p_n \mathrm{e}^{it} + q_n\right)^n = \left[1 + \frac{np_n\left(\mathrm{e}^{it} - 1\right)}{n}\right]^n$$

如果当 $n \to \infty$ 时有 $np_n \to \lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \exp\left[\lambda\left(\mathrm{e}^{it} - 1\right)\right] = f(t)$$

而 $f(t)$ 是 Poisson 分布的特征函数，故结论得证.

9. 证明以下命题:

(a) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，$X_n \xrightarrow{P} Y$，则 $P\{X = Y\} = 1$. (2 分)

【证】 因为

$$\begin{aligned} P\{|X - Y| \geq \varepsilon\} &= P\{|X - X_n + X_n - Y| \geq \varepsilon\} \\ &\leq P\left\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|X_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

由 ε 的任意性得 $P\{X \neq Y\} = 0$，所以 $P\{X = Y\} = 1$.

(b) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，$Y_n \xrightarrow{P} Y$，则 $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} X \pm Y$. (2 分)

【证】 因为

$$\begin{aligned} P\{|X_n \pm Y_n - (X \pm Y)| \geq \varepsilon\} &= P\{|(X_n - X) \pm (Y_n - Y)| \geq \varepsilon\} \\ &\leq P\left\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

从而有 $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} X \pm Y$.

(c) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，k 是常数，则 $kX_n \xrightarrow{P} kX$. (2 分)

【证】 当 $k=0$ 时显然成立. 如果 $k\neq 0$，则有

$$\begin{aligned} P\{|kX_n-kX|\geq\varepsilon\} &= P\{|k|\cdot|X_n-X|\geq\varepsilon\} \\ &= P\left\{|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{|k|}\right\} \\ &\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

所以 $kX_n\xrightarrow{P}kX$.

(d) 若 $X_n\xrightarrow{P}a$，$Y_n\xrightarrow{P}b$，其中 a, b 是常数，则 $X_nY_n\xrightarrow{P}ab$. (2 分)

【证】 由 (b) 可知 $X_n+Y_n\xrightarrow{P}a+b$，同样可以证明

$$\begin{aligned} (X_n+Y_n)^2=X_n^2+Y_n^2+2X_nY_n &\quad\xrightarrow{P}\quad (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \\ X_n^2 &\quad\xrightarrow{P}\quad a^2 \\ Y_n^2 &\quad\xrightarrow{P}\quad b^2 \end{aligned}$$

所以有 $X_nY_n\xrightarrow{P}ab$.