4.3 第十一周课后作业参考答案

1. 设 $\xi \sim U[0,\ 1]$，求 ξ 的特征函数. (2 分)

【解】 $\xi \sim U[0,\ 1]$ 的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是，ξ 的特征函数为

$$f(t) = E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x = \frac{1}{it}\mathrm{e}^{itx}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^{it}-1}{it}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{it}-1}{it}, & t \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{it}-1}{it} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{i\mathrm{e}^{it}}{i} = 1, & t = 0 \end{cases}$$

2. 设随机向量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$p(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1+xy\left(x^2+y^2\right)}{4}, & |x| \le 1,\ |y| \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 证明 ξ 与 η 不相互独立. (2 分)

【证明】 ξ、η 的边际分布密度函数分别为

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{1+xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \qquad |x| \le 1$$

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\ y)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1+xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad |y| \le 1$$

因为 $p(x,\ y) \neq p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$，所以 ξ 与 η 不相互独立.

(b) 证明其特征函数满足 $f_{\xi+\eta}(t) = f_\xi(t)\, f_\eta(t)$. (2 分)

【证明】 ξ 的特征函数为

$$f_\xi(t)=E\left(\mathrm{e}^{it\xi}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{itx}\cdot p_\xi(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2it}\mathrm{e}^{itx}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2it}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2it}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

同理可得 η 的特征函数为

$$f_\eta(t)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2it}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

于是

$$f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)=\begin{cases}-\dfrac{\left(\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}\right)^2}{4t^2}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2-\mathrm{e}^{2it}-\mathrm{e}^{-2it}}{4t^2}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}$$

$\xi+\eta$ 的特征函数为

$$f_{\xi+\eta}(t)=E\left(\mathrm{e}^{it(\xi+\eta)}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{it(x+y)}\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{1+xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ity}\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{itx}}{it}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{it}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{it}, & t\neq 0\\ 2, & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ity}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^{ity}}{it}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{it}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{it}, & t\neq 0\\ 2, & t=0\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\cdot[\cos(tx)+i\sin(tx)]\,[\cos(ty)+i\sin(ty)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\cos(tx)\cos(ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+i\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\cos(tx)\sin(ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+i\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\sin(tx)\cos(ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\sin(tx)\sin(ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

利用被积函数的奇偶性、积分区域的对称性可知

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\cdot\mathrm{e}^{ity}\cdot\frac{xy\left(x^2+y^2\right)}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

从而

$$
\begin{aligned}
f_{\xi+\eta}(t)&=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ity}\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{2-\mathrm{e}^{2it}-\mathrm{e}^{-2it}}{4t^2}, & t\neq 0\\ 1, & t=0\end{cases}\\
&=f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)
\end{aligned}
$$

3. 设随机变量 $\xi\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，利用特征函数法求 $E\left[(\xi-\mu)^k\right]$. (2 分)

【解】 由 $\xi\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ 易知 $\xi-\mu\sim N\left(0,\ \sigma^2\right)$，于是随机变量 $\xi-\mu$ 的特征函数为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

于是，将 $f(t)$ 展开为 Maclaurin 级数，则有

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\\
&=1-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\frac{1}{2!}\frac{1}{2^2}\sigma^4t^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2^n}\sigma^{2n}t^{2n}+\cdots\\
&=1-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+\frac{1}{4!!}\sigma^4t^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!!}\sigma^{2n}t^{2n}+\cdots
\end{aligned}
$$

所以

$$E\left[(\xi-\mu)^k\right]=\frac{f^{(k)}(0)}{i^k}=\begin{cases}\sigma^k(k-1)!!\,, & k \text{ 为偶数}\\ 0\,, & k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

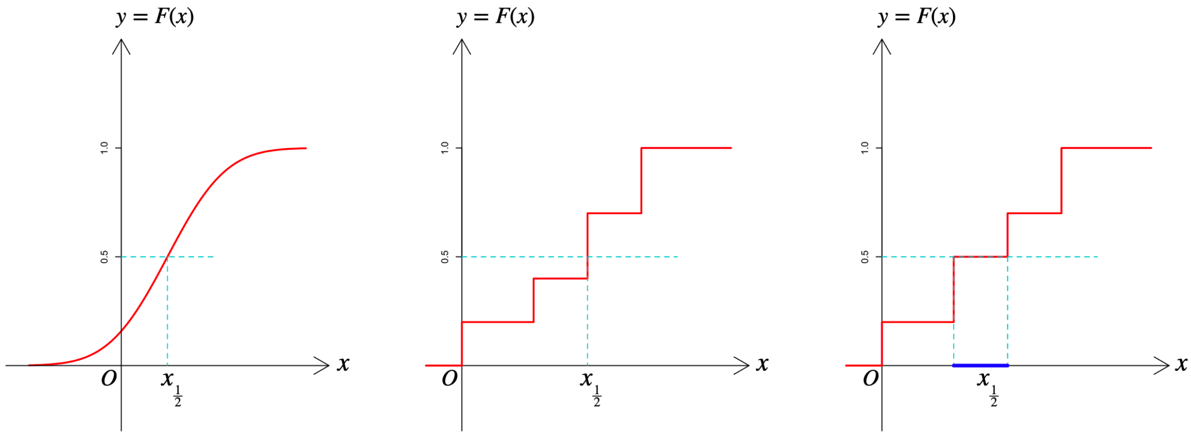
【注】 双阶乘的定义为

$$n!!=\prod_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}(n-2k)=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k)=n(n-2)(n-4)\cdots\times 4\times 2\,, & k \text{ 为偶数}\\ \prod\limits_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(2k-1)=n(n-2)(n-4)\cdots\times 3\times 1\,, & k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

4. (中位数) 对于任意随机变量 X，满足以下两式

$$P(X\le x)\ge\frac{1}{2}\,,\qquad P(X\ge x)\le\frac{1}{2}$$

的 x 称为 X 的**中位数**，记为 $x_{\frac{1}{2}}$ 或 M，它是反映集中位置的一个**数字特征**. 中位数总是存在的，但可以不唯一. 如果画出 X 的分布函数 $F(x)$ 的图形，当 $F(x)$ 连续时，那么 $x_{\frac{1}{2}}$ 是方程 $F(x)=\frac{1}{2}$ 的解，如果 $F(x)$ 有跳跃点，用垂直于横轴的线段连接后，得一连续曲线，它与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交点的横坐标即为 $x_{\frac{1}{2}}$. 由于交点可以不唯一，故可以有很多 $x_{\frac{1}{2}}$.



(a) 设 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

求 X 的中位数. (2 分)

【解】 如果 X 的分布函数为 $F(x)$，则 X 的中位数 M 应满足 $F(M)=\frac{1}{2}$，即

$$\frac{1}{2}=F(M)=P\{X\leq M\}=\int_0^M 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-2x}\big|_0^M=1-\mathrm{e}^{-2M}$$

由此解得 X 的中位数为

$$M=\frac{1}{2}\ln 2$$

(b) 设 X 服从 Cauchy 分布，其概率密度函数为

$$p(x)=\frac{b}{\pi\left[(x-a)^2+b^2\right]},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 $-\infty<a<\infty$，$b>0$. 求 X 的中位数. (2 分)

【解】 由中位数的定义有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=F(M)=P\{X\leq M\}\\&=\int_{-\infty}^M\frac{b}{\pi\left[(x-a)^2+b^2\right]}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)\Big|_{-\infty}^M\\&=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{M-a}{b}\right)+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\arctan\left(\frac{M-a}{b}\right)=0$$

由此知 $M-a=0$，故 X 的中位数 $M=a$.