4.2 第十周课后作业参考答案

1. 设随机向量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合分布律为

η	ξ: -1	0	1	p_η
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
p_ξ	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1

(a) 求 $D(\xi)$、$D(\eta)$. (2 分)

【解】 我们已经计算得 ξ、η 的边际分布律如表 4.1 所示，它们的数学期望分别为 $E(\xi)=E(\eta)=0$，于是，由方差的计算公式有

$$D(\xi)=E\left(\xi^2\right)-[E(\xi)]^2=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{8}-0^2=\frac{3}{4}$$

$$D(\eta)=E\left(\eta^2\right)-[E(\eta)]^2=(-1)^2\times\frac{3}{8}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{8}-0^2=\frac{3}{4}$$

(b) 证明 ξ 与 η 不相关. (2 分)

【证明】 计算 ξ 与 η 的协方差可得

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)&=E(\xi\eta)-E(\xi)\cdot E(\eta)\\&=(-1)\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times 0\times\frac{1}{8}+(-1)\times 1\times\frac{1}{8}\\&\qquad+0\times(-1)\times\frac{1}{8}+0\times 0\times 0+0\times 1\times\frac{1}{8}\\&\qquad+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times 0\times\frac{1}{8}+1\times 1\times\frac{1}{8}-0\times 0\\&=0\end{aligned}$$

所以 ξ 与 η 不相关.

(c) 证明 ξ 与 η 不相互独立. (2 分)

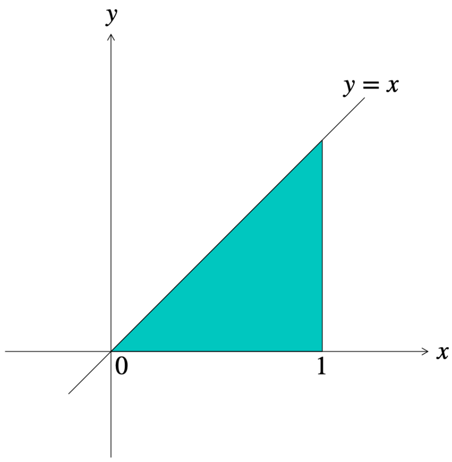
【证明】 因为

$$P\{\xi=0,\ \eta=0\}=0\neq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=P\{\xi=0\}\cdot P\{\eta=0\}$$

所以 ξ 与 η 不相互独立.

2. 设随机向量 $(\xi,\ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leq y\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(a) 求 $D(\xi)$、$D(\eta)$. (2 分)

【解】 联合概率密度函数的非零区域如上图所示，上周作业中我们已计算得 $E(\xi)=\frac{4}{5}$，$E(\eta)=\frac{3}{5}$，由方差的计算公式则有

$$\begin{aligned}D(\xi)&=E\left(\xi^2\right)-[E(\xi)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x-\left(\frac{4}{5}\right)^2\\&=\int_0^1 x^2\cdot\left(\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\frac{16}{25}\\&=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(\eta)&=E\left(\eta^2\right)-[E(\eta)]^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2\cdot f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\left(\frac{3}{5}\right)^2\\&=\int_0^1 y^2\cdot\left(\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\frac{9}{25}\\&=\frac{2}{5}-\frac{9}{25}=\frac{1}{25}\end{aligned}$$

(b) 求 $\mathrm{cov}(\xi,\ \eta)$. (2 分)

【解】 由协方差的计算公式我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\xi,\ \eta) &= E\left(\xi\eta\right) - E\left(\xi\right)\cdot E\left(\eta\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{4}{5}\times\frac{3}{5} \\
&= \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x} xy\cdot 12y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \frac{12}{25} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{12}{25} = \frac{1}{50}
\end{aligned}$$

3. 设随机变量 ξ 与 η 相互独立，且 $\xi\sim N(720,\ 30^2)$，$\eta\sim N(640,\ 25^2)$.

(a) 确定 $\zeta_1 = 2\xi+\eta$ 的分布. (2 分)

【解】 因为相互独立的正态分布随机变量的线性组合还是服从正态分布的随机变量，所以 $\zeta_1 = 2\xi+\eta$ 服从正态分布，而

$$\begin{aligned}
E\left(\zeta_1\right) &= E\left(2\xi+\eta\right) = 2E(\xi) + E(\eta) = 2\times 720 + 640 = 2080 \\
D\left(\zeta_1\right) &= D\left(2\xi+\eta\right) = 2^2D(\xi) + D(\eta) = 4\times 30^2 + 25^2 = 4225 = 65^2
\end{aligned}$$

因此，$\zeta_1\sim N\left(2080,\ 65^2\right)$.

(b) 确定 $\zeta_2 = \xi-\eta$ 的分布. (2 分)

【解】 同理，因为

$$\begin{aligned}
E\left(\zeta_2\right) &= E\left(\xi-\eta\right) = E(\xi) - E(\eta) = 720 - 640 = 80 \\
D\left(\zeta_2\right) &= D\left(\xi-\eta\right) = D(\xi) + D(\eta) = 30^2 + 25^2 = 1525
\end{aligned}$$

因此，$\zeta_2\sim N\left(80,\ 1525\right)$.

(c) 求 $P\left\{\xi>\eta\right\}$. (2 分)

【解】 所求概率为

$$\begin{aligned}P\{\xi>\eta\}&=P\{\xi-\eta>0\}=P\{\zeta_2>0\}=1-P\{\zeta_2\leq 0\}\\&=1-\Phi\left(\frac{0-80}{\sqrt{1525}}\right)=0.9797489\end{aligned}$$

(d) 求 $P\{\xi+\eta>1400\}$. (2 分)

【解】 因为 $\xi+\eta\sim N\left(720+640,\ 30^2+25^2\right)=N(1360,\ 1525)$，所以，所求概率为

$$P\{\xi+\eta>1400\}=1-P\{\xi+\eta\leq 1400\}=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=0.152848$$

得到上述概率的 R 代码如下：

```
> 1 - pnorm(-80/sqrt(1525))
[1] 0.9797489
> pnorm(0, mean = 80, sd = sqrt(1525), lower.tail = FALSE)
[1] 0.9797489
> 1 - pnorm((1400-1360)/sqrt(1525))
[1] 0.152848
> pnorm(1400, mean = 1360, sd = sqrt(1525), lower.tail = FALSE)
[1] 0.152848
```

4. 设随机向量 $(\xi\ \ \eta)$ 的联合概率密度函数为

$$p(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 求 $E(\xi)$，$E(\eta)$. (2 分)

【解】 两个随机变量的数学期望为

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2 x\left(\int_0^2(x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\cdot\frac{28}{3}=\frac{7}{6}$$

$$E(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\int_0^2 y\left(\int_0^2(x+y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\cdot\frac{28}{3}=\frac{7}{6}$$

(b) 求 $D(\xi)$，$D(\eta)$. (2 分)

【解】 两个随机变量的方差为

$$\begin{aligned}
D(\xi) &= E\left(\xi^2\right) - [E(\xi)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \left(\frac{7}{6}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 x^2\left(\int_0^2 (x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \frac{49}{36} = \frac{11}{36} \\
D(\eta) &= E\left(\eta^2\right) - [E(\eta)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \left(\frac{7}{6}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 y^2\left(\int_0^2 (x+y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \frac{49}{36} = \frac{11}{36}
\end{aligned}$$

(c) 求 $\mathrm{cov}(\xi,\ \eta)$. (2 分)

【解】 两个随机变量的协方差为

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\xi,\ \eta) &= E(\xi\eta) - E(\xi)\cdot E(\eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot p(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{7}{6}\times\frac{7}{6} \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2\int_0^2 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{49}{36} \\
&= -\frac{1}{36}
\end{aligned}$$

(d) 求 ξ 与 η 的相关系数 ρ. (2 分)

【解】 所求 ξ 与 η 的相关系数为

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\times\sqrt{\frac{11}{36}}} = -\frac{1}{11}$$

(e) 求 $D(\xi+\eta)$. (2 分)

【解】 两个随机变量之和的方差为

$$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta) + 2\mathrm{cov}(\xi,\ \eta) = \frac{11}{36} + \frac{11}{36} + 2\times\left(-\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{9}$$

5. 设随机变量 ξ 满足 $a \le \xi \le b$.

(a) 证明：$D(\xi) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$. (2 分)

【证明一】 由方差的定义与性质，我们有

$$\begin{aligned} D(\xi) &= E\left\{[\xi - E(\xi)]^2\right\} \\ &\le E\left[\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \qquad \longleftarrow \quad a \le \xi \le b \\ &\le E\left[\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

【证明二】 定义 $\eta = \dfrac{\xi - a}{b-a}$，则有 $0 \le \eta \le 1$，于是

$$\begin{aligned} D(\eta) &= E\left(\eta^2\right) - [E(\eta)]^2 \\ &\le E(\eta) - [E(\eta)]^2 \\ &= E(\eta)\,[1 - E(\eta)] \le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

从而

$$D(\xi) = (b-a)^2 \cdot D(\eta) \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

(b) 上述不等式中的等号在何种情况下成立. (2 分)

【解法一】方差表示随机变量关于其数学期望的离散程度，因为 $a \le \xi \le b$，所以当 $P\{\xi = a\} = P\{\xi = b\} = \dfrac{1}{2}$ 时，ξ 的方差达到最大，此时

$$D(\xi) = E\left(\xi^2\right) - [E(\xi)]^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$$

【解法二】 证明二当中等式成立的充分必要条件是

$$E(\eta) = [E(\eta)]^2 = \frac{1}{2}\,, \qquad P\{\eta = 0\} = P\{\eta = 1\} = \frac{1}{2}$$

6. 随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $[0,\ 1]$ 上的均匀分布. 以 X、Y 为边长作一个长方形，ξ 表示长方形的面积，以 η 表示长方形的周长.

(a) 求 $E(\xi)$，$E(\eta)$. (2 分)

【解】 因为 $X \sim U[0,\ 1]$，$Y \sim U[0,\ 1]$，所以 $E(X)=E(Y)=\dfrac{1}{2}$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{1}{12}$. 以 X、Y 为边长作一个长方形，ξ 表示该长方形的面积，η 表示该长方形的周长，则

$$\xi = X \cdot Y\ , \qquad \eta = 2(X+Y)$$

再由 X 与 Y 相互独立，可知

$$\begin{aligned}
&E(\xi)=E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{4}\\
&E(\eta)=E\left[2(X+Y)\right]=2\left[E(X)+E(Y)\right]=2
\end{aligned}$$

(b) 求 $D(\xi)$，$D(\eta)$. (2 分)

【解】 因为 X 与 Y 相互独立，所以 X^2 与 Y^2 亦相互独立，于是

$$\begin{aligned}
D(\xi)&=D(XY)=E\left(X^2Y^2\right)-[E(XY)]^2=E\left(X^2\right)\cdot E\left(Y^2\right)-[E(X)\cdot E(Y)]^2\\
&=\left\{D(X)+[E(X)]^2\right\}\cdot\left\{D(Y)+[E(Y)]^2\right\}-\frac{1}{16}\\
&=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}\\
D(\eta)&=D\left[2(X+Y)\right]=4\left[D(X)+D(Y)\right]=4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(c) 求 $\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)$. (2 分)

【解】 因为 X 与 Y 相互独立，所以 X^2 与 Y 亦相互独立，X 与 Y^2 亦相互独立，于是

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)&=\operatorname{cov}\left(XY,\ 2(X+Y)\right)=2\operatorname{cov}\left(XY,\ X+Y\right)=2\left[\operatorname{cov}\left(XY,\ X\right)+\operatorname{cov}\left(XY,\ Y\right)\right]\\
&=2\left[E\left(X^2Y\right)-E(XY)\cdot E(X)\right]+2\left[E\left(XY^2\right)-E(XY)\cdot E(Y)\right]\\
&=2\left\{E\left(X^2\right)\cdot E(Y)-[E(X)]^2\cdot E(Y)\right\}+2\left\{E(X)\cdot E\left(Y^2\right)-E(X)\cdot[E(Y)]^2\right\}\\
&=E\left(X^2\right)-\frac{1}{4}+E\left(Y^2\right)-\frac{1}{4}=D(X)+[E(X)]^2+D(Y)+[E(Y)]^2-\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(d) 求 ξ 与 η 的相关系数 ρ. (2 分)

【解】 由相关系数的定义，可知 ξ 与 η 的相关系数为

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{7}{144}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{6}{7}} = 0.9258201$$