

Chapter 1

事件与概率

1.1 第一周课后作业参考答案

1. 若 A, B, C 是随机事件, 说明下列关系式的概率意义:

(a) $ABC = A$. (2分)

【解】 A 发生, 则 A, B, C 必同时发生.

(b) $A \cup B \cup C = A$. (2分)

【解】 B 发生或 C 发生时必有 A 发生.

(c) $AB \subset C$. (2分)

【解】 A, B 同时发生必导致 C 发生.

(d) $A \subset \overline{BC}$. (2分)

【解】 A 发生时, B 和 C 至少有一个不发生.

2. 在某班学生中任选一个同学, 以事件 A 表示选到的是男同学, 事件 B 表示选到的人不喜欢唱歌, 事件 C 表示选到的人是运动员.

(a) 表述 ABC 及 \overline{ABC} . (2分)

【解】 $ABC = \{\text{选到的是男同学, 且不喜欢唱歌, 又不是运动员}\}.$

$\overline{ABC} = \{\text{选到的是男同学, 且喜欢唱歌, 又是运动员}\}.$

(b) 什么条件下成立 $ABC = A$. (2分)

【解】 当所有男同学都不爱唱歌且都是运动员时成立.

(c) 何时成立 $\overline{C} \subset B$ 中. (2分)

【解】 不是运动员的同学必然是不爱唱歌的同学时成立.

(d) 何时同时成立 $A = B$ 及 $\overline{A} = C$. (2分)

【解】 男同学就是不爱唱歌的同学的全体、而且也是非运动员的全体时成立.

3. 完成下列问题:

(a) 证明: $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \cdots + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{n-1} A_n$. (2分)

【证】 利用数学归纳法证明, 当 $n = 2$ 时,

$$A_1 \cup A_2 = A_1 + (A_2 - A_1) = A_1 + \bar{A}_1 A_2$$

假设 $n = k$ 时结论成立, 即

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \cdots + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k$$

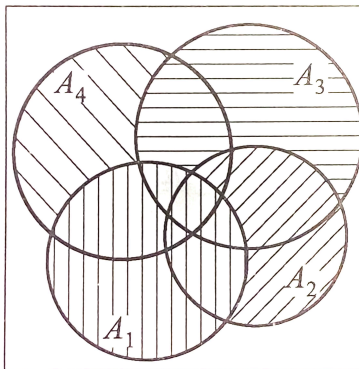
则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup A_{k+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^k A_i + \overline{\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right)} \cap A_{k+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^k A_i + \left(\bigcap_{i=1}^k \bar{A}_i \right) \cap A_{k+1} \\ &= A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \cdots + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k + \bigcap_{i=1}^k \bar{A}_i A_{k+1} \end{aligned}$$

因此, 结论对任意 n 都成立.

(b) 对 $n = 4$ 画出上述证明对应的文氏图. (2分)

【证】 当 $n = 4$ 时, 对应的文氏图如下:



4. 若 A, B, C, D 是四个事件, 试用这四个事件表示下列各事件:

(a) 这四个事件至少有一个发生. (2分)

【解】 $A \cup B \cup C \cup D$.

(b) A, B 都发生而 C, D 都不发生. (2分)

【解】 $A \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D}$.

(c) 这四个事件恰好发生两个. (2分)

【解】 $AB\bar{C}\bar{D} \cup A\bar{B}C\bar{D} \cup \bar{A}BC\bar{D} \cup A\bar{B}\bar{C}D \cup \bar{A}B\bar{C}D \cup \bar{A}\bar{B}CD$.

(d) 这四个事件都不发生. (2分)

【解】 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = \overline{A \cup B \cup C \cup D}$.

(e) 这四个事件中至多发生一个. (2分)

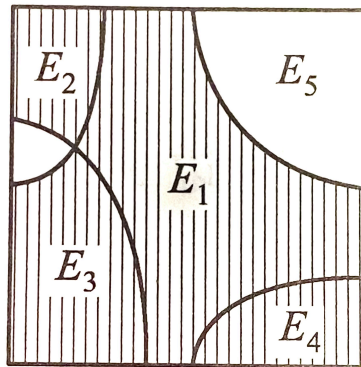
【解】 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \cup A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \cup \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \cup \bar{A}\bar{B}C\bar{D} \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

5. 从 0, 1, 2, ..., 9 中随机地取出 5 个数 (可重复), 以 E_i 记某些数字正好出现 i 次这一事件 (例如 52353 既属于 E_1 , 也属于 E_2 及 E_0), 试用文氏图表示 E_0, E_1, \dots, E_6 的关系. (2分)

【解】 本题全部正确完成有点难度. 事件 E_0, E_1, \dots, E_6 的关系如下:

$$E_0 = \Omega, \quad E_6 = \Phi, \quad E_4 \subset E_1, \quad E_1 E_5 = \Phi, \quad E_2 E_5 = \Phi$$

$$E_3 E_5 = \Phi, \quad E_4 E_5 = \Phi, \quad E_2 E_4 = \Phi, \quad E_3 E_4 = \Phi, \quad E_1 E_2 E_3 = \Phi$$



6. 利用英文字母的出现频率破译以下经过加密的一段英文.

HVOCZHVODXDVIN VMZ GDFZ AMZIXCHZI;
 RCVOZQZM TJP NVT OCZH,
 OCZT OMVINGVOZ DIOJ OCZDM JRI GVIBPVBZ
 VIY AJMOCRDOC DO DN NJHZOC DIB ZIODMZGT YDAAZMZIO.
 BJZOCZ

(a) 破译后的英文内容是什么. (2分)

【解】 编码方式如下:

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
实际含义	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
字母	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
实际含义	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E

破译结果:

Mathematicians are like Frenchmen; what ever you say them, they translate into their own language and forthwith it is something entirely different. Goethe.

(b) 将破译后的英文翻译成中文. (2分)

【解】 内容翻译:

数学家就像法国人, 不管你对他说什么, 他们都会将它翻译成自己的语言, 从而立刻就变成了完全不同的东西. 歌德.