中国石油大学（北京）克拉玛依校区

2025-2026学年秋季学期

《概率论》自测题

(AB卷)

考核方式：笔试 (开卷)

班　级：________________

姓　名：________________

学　号：________________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
分值	15	15	12	12	15	10	14	7	100
得分									

注：

1. 试卷共 10页（含封面、附表），请勿漏答.

2. 试卷不得拆开，所有答案均写在题后空白处.

1. **填空题** (本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

(a) (3 分) 设A、B为随机事件，已知$P(A)=0.6$，$P(A\bar{B})=0.3$，则$P(AB)=$

【解】：$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-P(AB)=0.3 \Rightarrow P(AB)=0.3.$

(b) (3 分) 任意投掷两枚均匀的小正方体骰子，朝上的点数之和是奇数的概率为

【解】：投掷一枚骰子，朝上点数为奇数的概率是3/6=1/2，朝上点数为偶数的概率是3/6=1/2，两枚骰子点数之和是奇数等价于两枚骰子向上点数一个是奇数一个是偶数，则

$$\begin{aligned}&P(\text{两枚骰子朝上点数之和是奇数})\\&=\binom{2}{1}P(\text{一枚骰子朝上点数为奇数})P(\text{一枚骰子朝上点数为偶数})\\&=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) (3 分) 已知ξ服从几何分布$g(k;p)=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\ldots$，且$P(\xi>3|\xi>1)=0.3$，则$P(\xi>2)=$

【解】：由几何分布的无记忆性知$P(\xi>2)=P(\xi>3|\xi>1)=0.3.$

(d) (3 分) 设(X,Y)在由曲线$y=x^2/2$和$y=x$所围的有限区域内服从均匀分布．则(X,Y)的联合概率密度函数为

【解】：

$$f(x,y)=\begin{cases}1.5, & 0<x<2, \frac{x^2}{2}<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(e) (3 分) 设随机变量$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P\{|X-\mu|>\sigma\}=$

【解】：$2-2\Phi(1)=2-2\times0.8413=0.3174.$

2. **选择题** (本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

(a) (3 分) 以下命题中，正确的是【C】.

A. 若$P(A)=0$，则A是不可能事件.

B. 若$P(A\cup B)=0$，则A、B互不相容.

C. 若$P(A\cup B)+P(AB)=1$，则$P(A)+P(B)=1$.

D. $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(b) (3 分) 下列说法不正确的是【B】.

A. $A\cup B$表示A、B至少有一个发生.

B. $A\cup B$表示A、B同时发生.

C. $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$成立的条件是$A_i$两两互不相容.

D. $P(A|\bar{B})\neq P(\bar{A}|B)$.

(c) (3 分) 下列说法正确的是【D】.

A. 具有无记忆性的离散型分布为二项分布.

B. 具有无记忆性的离散型分布为泊松分布.

C. 具有无记忆性的连续型分布为几何分布.

D. 具有无记忆性的连续型分布为指数分布.

(d) (3 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$，边缘密度函数分别为$f_X(x),f_Y(y)$，则下列说法不正确的是【B】.

A. 由$f(x,y)$可以确定$f_X(x),f_Y(y)$.

B. 由$f_X(x),f_Y(y)$可以确定$f(x,y)$.

C. 由$f(x,y)$可以确定$f_X(x),f_{Y|X}(y\mid x)$.

D. 由$f_X(x),f_{Y|X}(y\mid x)$可以确定$f(x,y)$.

(e) (3 分) 设随机变量$X\sim b(2,p)$，且$P\{X\geq 1\}=\frac{5}{9}$，则$p=$【B】.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{4}{9}$.

3. 有甲、乙、丙三个盒子，甲盒中装有2个红球和4个白球，乙盒中装有3个红球和3个白球，丙盒中装有4个红球和2个白球。现从三个盒子中随机取出一个盒子，并从该盒子中随机取出一球.

   (a) (6 分) 求取到红球的概率是多少？

   【解】

   设取到甲、乙、丙三个盒子分别为事件A、B、C，取到红球为事件R，取到白球为事件W。由全概率公式知 (2分)

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C) \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(4分)

   所以取到红球的概率为$\frac{1}{2}$。

   (b) (6 分) 若已知取出的是红球，问它来自甲盒的概率是多少？

   【解】

$$\begin{aligned} P(A|R) = \frac{P(AR)}{P(R)} &= \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} \qquad \text{(3分)} \\ &= \frac{\frac{2}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{9}. \qquad \text{(3分)} \end{aligned}$$

   所以，已知取出的是红球，它来自甲盒的概率是$\frac{2}{9}$。

4. (12 分) 事件A,B,C两两独立，$ABC=\emptyset$，$P(A)=P(B)=P(C)$，且已知$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，求$P(A)$是多少？

【解】

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\
&= P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(\emptyset) \qquad \text{(3分)}\\
&= 3P(A)-3[P(A)]^2 = 3P(A)[1-P(A)] = 9/16 \qquad \text{(3分)}\\
&\Longrightarrow P(A)=3/4\text{或}1/4. \qquad \text{(3分)}
\end{aligned}
$$

又因为$ABC=\emptyset$，所以$P(A)=1/4$。 (3分)

5. 设随机变量(ξ,η)的分布律为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(a) (5 分) 求$P\{\xi=2|\eta=3\}$，$P\{\eta=4|\xi=0\}$.

【解】

$$P(\xi=2|\eta=3)=\frac{P(\xi=2,\eta=3)}{P(\eta=3)}=\frac{0.05}{3\times0.05+0.06}=\frac{5}{21}. \qquad (2.5\text{分})$$

$$P(\eta=4|\xi=0)=\frac{P(\eta=4,\xi=0)}{P(\xi=0)}=\frac{0.07}{0.01+0.03+0.05+0.07+0.09}=\frac{7}{25}. \qquad (2.5\text{分})$$

(b) (5 分) 求$\nu=\max\{\xi,\eta\}$的分布律.

【解】

ν的分布律为

ν	0	1	2	3	4	5
P	0.00	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(c) (5 分) 求$\zeta=\xi+\eta$的分布律.

【解】

ζ的分布律为

ζ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.00	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

6. (10 分) 设随机变量X,Y独立, $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda),Y\sim \mathrm{Exp}(\mu)$,计算$P(X>Y)$.

【解】 X概率密度函数为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y概率密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由X,Y独立知,

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-\lambda x}e^{-\mu y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4分)

$$P(X>Y)=\iint_{x>y>0}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}\lambda\mu e^{-\lambda x}e^{-\mu y}dxdy=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

(6分)

7. 设随机变量(X,Y) 有联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(a) (3 分) 确定常数c.

【解】 由联合密度规范性: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ ，经计算知：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} c(x+y)e^{-(x+y)} \\
=&c\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-x}e^{-y}+ye^{-y}e^{-x}dxdy \\
=&c\int_0^{\infty}[\int_0^{\infty} -e^{-y}xde^{-x}+\int_0^{\infty} -ye^{-y}de^{-x}]dy \\
=&c\int_0^{\infty}[-e^{-y}e^{-x}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-y}e^{-x}dx-ye^{-y}e^{-x}|_0^{\infty}]dy \\
=&c\int_0^{\infty}[-e^{-y}e^{-x}|_0^{\infty}+ye^{-y}]dy \\
=&\int_0^{\infty} e^{-y}+ye^{-y}dy \\
=&c[-e^{-y}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} -yde^{-y}] \\
=&c[1-ye^{-y}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-y}dy] \\
=&c[1-e^{-y}|_0^{\infty}]=c(1+1)=2c=1,
\end{aligned}$$

故c=1/2. (3分)

(b) (6 分) X,Y是否独立?

【解】 边缘密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2分)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \frac{1}{2}(y+1)e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2分)

当$x>0,y>0$时,$f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\neq f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{4}(x+1)(y+1)e^{-(x+y)}$,故$X,Y$不独立。 (2分)

(c) (5 分) 求$Z=X+Y$的密度函数.

【解】 由卷积公式可得到随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z \frac{1}{2}ze^{-z}dx=\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(5分)

8. (7 分) 设电流I在$8 \sim 9$ A服从均匀分布，当电流通过2Ω的电阻时，消耗的功率(单位：W)是$W = 2I^2$，求W的概率密度.

【解】 I的概率密度函数为

$$f_I(i) = \begin{cases} 1, & i \in (8,9), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设W的分布函数为$F_W(w)$,则当$w \le 0$时,$F_W(w) = P\{W < w\} = 0$; (2分)

当$w > 0$时,

$$F_W(w) = P\{W < w\} = P\{-\sqrt{\frac{w}{2}} < I < \sqrt{\frac{w}{2}}\} = \int_{-\sqrt{\frac{w}{2}}}^{\sqrt{\frac{w}{2}}} f_I(i)di = \begin{cases} 0, & w < 128, \\ 1, & w \ge 162, \\ \int_8^{\sqrt{\frac{w}{2}}} 1di = \sqrt{\frac{w}{2}} - 8, & 128 \le w < 162. \end{cases}$$

因此

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8w}}, & 128 \le w \le 162, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(5分)