$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}$

$(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz) = (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx) \cdot (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$ 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, d\theta\, dr = 2\pi$

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$

$\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$

$\xi \sim \chi_m^2 \Rightarrow p_\xi(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$

$y \sim \chi_n^2 \Rightarrow p_y(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^\lambda$

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

$\sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^1 x^{r-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\lambda y^{r-1} e^{-y} dy$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (欧拉公式)

退化分布 (随机向量固定，无随机性)

χ^2分布 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$P(X=x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & x \neq c \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$

$E(X) = c$

$D(X) = E[(X-c)^2] = 0$

1、包含关系 $A\subset B$：含义事件A发生必导致B发生

事件的相等 $A=B$：$A\subset B$ 且 $B\subset A$

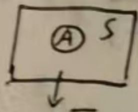
2、和事件 $A\cup B$：当且仅当事件A、B至少有一个事件发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

3、积事件 $A\cap B$ 或 AB：当且仅当事件A、B同时发生时，事件 AB 发生

4.差事件 $A-B$：当且仅当事件A发生，B不发生时，事件 $A-B$ 发生.

5.互不相容事件：当且仅当 $A\cap B=\emptyset$，指事件A与B不能同时发生.

6.对立(互逆)事件：当且仅当 $A\cap B=\emptyset$ 且 $A\cup B=S$



$\bar{A}=S-A$

无关

相互独立：$P(AB)=P(A)P(B)$

$A\cap B \to AB$

随机试验：可重复性、可观察性，不确定性.

E

样本空间 Ω　　样本点 ω

P14. 7.文氏图　$S=\{、…\}$

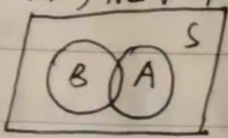
集合 S

①A为任意事件
$$\begin{cases} A\bar{A}=\varnothing \\ A\cup\bar{A}=S \\ \bar{A}=S-A \\ \bar{\bar{A}}=A \end{cases}$$

§1.1 随机现象与统计规律

§1.2 样本空间，随机事件.

随机事件：A、B、C
事件发生
基本事件：一个样本点
必然事件
不可能事件 $\varnothing$



②基本事件都互不相容，事件A与B−A也互不相容

$B\cap -AB$

③
$$\begin{cases} B-A=B\bar{A}=B-AB \\ A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup AB\cup(B-A) \end{cases}$$

8.事件的运算法则

1.交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

2.结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3.分配律
$$\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$$

4.对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$　　$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A_i}$　　$\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A_i}$

5.对必然事件的运算法则：$A\cup S=S$，$A\cap S=A$

6.对不可能事件的运算法则：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

P16. 例7.若A、B、C是三个事件，则

(1) 所有这三个事件都发生可以表示为：ABC

(2) 恰好发生一个：$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$　　+ 表示并

(3) 恰好发生两个：$\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}$

(4) 最多一个：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$

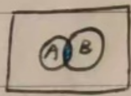
(5) 至少一次：$A\cup B\cup C=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$

(6) A发生而B与C都不发生可以表示为：$A\bar{B}\bar{C}=A-B-C=A-(B\cup C)$

(7) A与B都发生而C不发生可以表示为：$AB\bar{C}=AB-C=AB-ABC$　　用上述③

化简

① $(\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=\bar{A}\cup(\bar{B}\cap B)$



$=\bar{A}$

② $A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}=A\bar{B}\cup(\bar{A}\cap(B\cup\bar{B}))=A\bar{B}\cup\bar{A}=\overline{AB}$ 根据文氏图

$=A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\underline{\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{B}}=(A\bar{B}\cup\bar{A}\bar{B})\cup(\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B})=((A\cup\bar{A})\bar{B})\cup(\bar{A}(B\cup\bar{B}))$

$=\bar{B}\cup\bar{A}=\overline{AB}$

四、事件与集合的关系

§1.3 古典概型

一、频率

1.定义：$F_n(A)=\frac{n_A}{n}$

2.表现：①随机波动性，②稳定性，③统计规律

详见ppt.

3.性质

①非负有界性：$0\le F_n(A)\le 1$

②规范性：$F_n(S)=1$

③有限可加性：如果A_1、A_2、…，A_m两两互不相容，则

$$F_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=F_n(A_1)+F_n(A_2)+\cdots+F_n(A_m)$$

二、古典概率模型与计算公式

1.古典概型(等可能概率模型)：试验E满足

①样本空间只含有限多个样本点，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$

②每个样本点发生的可能性相同，即$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$

2.古典概型概率的计算公式：$P(A)=\frac{\text{随机事件A包含的样本点个数}}{\text{样本空间}\Omega\text{包含的样本点总数}}$

注：每个样本点等可能发生

三、组合数学相关知识

1.加法原理与乘法原理

2.基本排列组合公式

①不可重复的排列：从n个不同的元素中无放回地任意取出r个($1\le r\le n$)排成有顺序的一列，称为n取r的不可重复排列(选排列)

$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$

特别地$r=n$(全排列) $P_n=A_n^n=n!$

②可以重复的排列：从n个不同元素中允许放回地任意取出r个（$1\le r\le n$）出来排成有顺序的一列

n^r

③二项式组合：从n个不同元素中不允许放回任意取r个构成一个集合

$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

$\binom{n}{r}$为二项系数

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^rb^{n-r}$

④多项式组合：把n个不同元素分成k个部分，各个部分包含的元素个数分别为r_1、r_2、…r_k个；则全部不同的分配方式共有

$\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$

$\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}$为多项系数，为多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$展开的系数

$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n}\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$

例：桥牌比赛中，把52张扑克牌平均分给4个人，每人13张，则不同的分配方案有

$\binom{52}{13,13,13,13}=\frac{52!}{13!\times13!\times13!\times13!}$

⑤可重复组合：从n个不同元素中允许放回任意取r个构成一个集合（不计顺序），称为n取r的可重复组合，不同的组合方法共有

$\binom{n+r-1}{r}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

例：设$n=4$，$r=3$，考虑4只有序的匣子共装有3个不可分辨的球

（只考虑最终每个匣子几个球）

$3=1+2\quad 1+1+1\quad 3$

注：考虑方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=r$非负整数解的个数

解：$x_1+x_2+x_3+x_4=3$

$\binom{n+r-1}{r}=\binom{4+3-1}{3}=20$

⑥关于二项式系数的公式

(1) 设 $n、r \in N$，$x \in R$，将排列组合公式中的自然数 n 推广至可以取成任意实数 x，则有定义：

$A_x^r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$

$C_x^r = \binom{x}{r} = \frac{A_x^r}{r!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$

(2) 规定 $0! = 1$，则 $\binom{x}{0} = 1$

设 $n、r \in N$，$a、b、x \in R$

(3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$

(4) $\binom{-x}{r} = (-1)^r\binom{x+r-1}{r}$ 或 $\binom{x}{r} = (-1)^r\binom{-x+r-1}{r}$ 　x换-x

证：$\binom{-x}{r} = \frac{-x(-x-1)\cdots(-x-r+1)}{r!}$

$= (-1)^r \frac{x(x+1)\cdots(x+r-1)}{r!}$

$= (-1)^r \binom{x+r-1}{r}$

(5) $\binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}$ 　特别 $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$ ☆ $(a=b=n$ 时$)$

证：① Taylor 展开：$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k$，$(1+x)^b = \sum_{l=0}^{\infty}\binom{b}{l}x^l$

$(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n = (1+x)^a(1+x)^b = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k\right]\left[\sum_{l=0}^{\infty}\binom{b}{l}x^l\right]$

② $a=b=n \Rightarrow \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$

$\Rightarrow \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

四、古典概率的例子

1、基本特征：样本点点数有限，每个样本点等可能发生

2、经典问题：①生日问题（亦称分房问题）p24 例4(会)(①) + ②(会)

②抽题问题：P26 例5. 口袋中有a只黑球，b只白球，它们除颜色不同外，其它没有任何差别，现在把球随机地一只只摸出来，求第k次摸出的一只球是黑球的概率 $(1 \le k \le a+b)$

法1. 考虑 a+b 次摸球的顺序

$p_k = \frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$

法2. 考虑前 k 次摸球的顺序

$p_k = \frac{a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a\cdot\frac{(a+b-1)!}{(a+b-k)!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-k)!}} = \frac{a}{a+b}$

③产品抽样：(二项分布与超几何分布) P28 例6 (1)(须注) (2)(会)

五、古典概率的性质

①非负性：对任一事件A，有$0\le P(A)\le 1$

②规范性：对必然事件Ω，有$P(\Omega)=1$

③有限可加性：若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容，则$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

推论：$P(A)=1-P(\bar{A})$

六、对立事件的概率

(较会)

P33 例8(德·梅尔问题 De Mere) 一枚骰子掷4次至少得到一次六点，与两枚骰子掷24次至少得到一次双六点，这两个事件哪一件有更多的机会遇到？

(1) $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{5^4}{6^4}=0.517469$

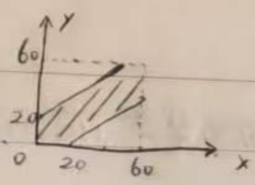
(2) $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{35^{24}}{36^{24}}=0.4914039$

1.1 …… 1.6

6.1 — 6.6

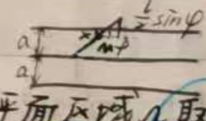
§1.4 几何概率

例(P36 例4 会面问题)(会)



例: P37 投针问题: 平面上有一族平行线, 其中任何相邻的两线距离都是 $a\ (a>0)$. 向平面任意投一根长为 $l\ (l\le a)$ 的针, 试求针与某一条平行线相交的概率.

解 设 x 是针的中点M到最近一条平行线的距离

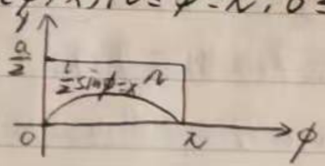


φ 是针与此平行线的交角, 投针问题就相当于向平面区域 Ω 取点的几何概率

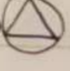
$\Omega=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le x\le\frac{a}{2}\}$

设A表示针与某一条平行线相交, 则 $A=\{(\varphi,x)\mid 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le x\le\frac{l}{2}\sin\varphi\}$

$$P=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\, d\varphi}{\frac{a}{2}\cdot\pi}=\frac{2l}{\pi a}$$



Bertrand

例. P39 贝特朗奇论(三种)  (可看)

§1.5 概率空间

集类：由Ω中的若干子集构成的集合称为集类（花写字母 $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}$）

一、事件域

1.定义：（σ域）满足下列条件的集类$\mathscr{F}$称为σ域或σ代数（包含全集）

①若$A\in\mathscr{F}$，则$\bar{A}\in\mathscr{F}$（对逆运算封闭） $\rightarrow \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bar{A_i}$

②若$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$（对可列并运算封闭）

2.若$\mathscr{F}$是由样本空间Ω的一些子集构成的一个σ域，则称$\mathscr{F}$为事件域

$\mathscr{F}$中的元素称为事件，Ω称为必然事件，$\emptyset$称为不可能事件

3.必然事件和不可能事件都在事件域中，事件的有限及可列交、并也都在事件域中

例：若$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，$\mathscr{F}$是由$\Omega$的所有子集构成的集合，这里的$\mathscr{F}$是一个有限集合，共有$2^n$个元素，$\mathscr{F}$是一个$\sigma$域

Borel 集类

1.用R^1表示实数直线或实数全体，用R^n表示n维欧氏空间

2.一维Borel点集：由一切形为$[a,b)$的有界左闭右开区间构成的集类所产生的σ域，称为一维Borel σ域，记为$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_1$中的集合称为一维Borel点集

3.n维Borel点集：由一切n维矩形产生的n维Borel σ域

二、概率的公理化定义

1.定义：设Ω为样本空间，$\mathscr{F}$为Ω上的事件域，称定义在事件域$\mathscr{F}$上的集合函数$P(\cdot)$为$\mathscr{F}$上的一个概率测度，如果它满足$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$，$\forall A\in\mathscr{F}$，称函数值$P(A)$为事件A的概率、称三元组$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间

2、概率测度的其他性质

(1) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\le P(B)$

(2) $\forall A\subset\Omega$，有 $0\le P(A)\le 1$

(3) 布尔不等式：$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$ $1\ge P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

(4) Bonferroni 不等式：$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$ $P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{\substack{i<j\\ \cancel{i,j=1,2,\cdots,n}\\ 1\le i<j\le n}}P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i<j<k\\ \cancel{i,j,k=1,2,\cdots,n}\\ 1\le i<j<k\le n}}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\right)$$

例：(最大车牌号) 某区域有 N 部卡车，车牌号从 1 到 N，有一个外地人到该区域去，把遇到的 n 部卡车的车牌号抄下来(可以重复)，以 A 表示抄到的最大号码正好为 k ($1\le k\le N$)，求 A 的概率。

解：$A_k=$ {记到的最大号码为 k}

$B_k=$ {记到的最大号码不超过 k} $\le k$

则 $A_k=B_k-B_{k-1}$

$P(B_k)=\dfrac{k^n}{N^n}$

因 B_{k-1} 为 B_k 的子事件 $C\subseteq D$，则 $P(D-C)=P(D)-P(C)$

则 $P(A_k)=P(B_k-B_{k-1})=P(B_k)-P(B_{k-1})=\dfrac{k^n}{N^n}-\dfrac{(k-1)^n}{N^n}$

例1：(匹配问题) 某人写好n封信，又写好n只信封，然后在黑暗中每封信放入一只信封中，试求至少一封信放对的概率. →即求 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ ☆☆.

解 $A_i=\{$第 i 封信与信封符合$\}$, $i=1,2,\cdots,n$

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},\quad i,j=1,2,\cdots,n,\ i\neq j$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n,\ i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k$$

$\cdots$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

三、概率的可列可加性与连续性

1.定义：若 $S_n\in\mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$ 且 $S_n\subset S_{n+1}$，则 S_n 是 $\mathcal{F}$ 的一个单调不减的集序列

$\supset$ 单调不增

2.定义：对于 $\mathcal{F}$ 上的集合函数 $P(\cdot)$，若对 $\mathcal{F}$ 中任何一个单调不减的集序列 $\{S_n\}$

单调不增

均有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(S_n)=P(\lim\limits_{n\to\infty}S_n)$ 成立，则称 $P(\cdot)$ 是下连续的.

上连续

3.定理：若 P 为 $\mathcal{F}$ 上满足 $P(\Omega)=1$ 的非负集合函数，则它具有可列可加性的充要条件为：(i) 它是有限可加的 (ii) 它是下连续的

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\qquad P(\lim_{n\to\infty}S_n)=\lim_{n\to\infty}P(S_n)$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

设A_i两两互不相容，欲证明 $\Leftrightarrow \begin{cases} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \\ P(\lim_{n\to\infty} S_n)=\lim_{n\to\infty} P(S_n) \end{cases}$

充分性：有限可加性得 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

下连续得 $P(\lim_{n\to\infty} S_n)=\lim_{n\to\infty} P(S_n)$

必要性：可列可加性保证有限可加性

$$P(\lim_{n\to\infty} S_n)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(S_i-S_{i-1}))=\sum_{i=1}^{\infty} P(S_i-S_{i-1})=\sum_{i=1}^{\infty}[P(S_i)-P(S_{i-1})]$$

$S_0=\phi$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[P(S_i)-P(S_{i-1})]=\lim_{n\to\infty}[P(S_n)-P(S_0)]=\lim_{n\to\infty} P(S_n)$$

推论1、概率是下连续的

推论2、概率是上连续的，即若$B_i\in\mathcal{F}$，而且$B_i\supset B_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$，则$\lim_{n\to\infty}P(B_n)=P(\lim_{n\to\infty}B_n)$

证：若$B_i\supset B_{i+1}$，则$\bar{B}_i\subset\bar{B}_{i+1}$

由概率的下连续可知 $\lim_{n\to\infty}P(\bar{B}_n)=P(\lim_{n\to\infty}\bar{B}_n)$

又 $\lim_{n\to\infty}P(\bar{B}_n)=\lim_{n\to\infty}[1-P(B_n)]=1-\lim_{n\to\infty}P(B_n)=P(\lim_{n\to\infty}\bar{B}_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n)=1-P(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{B}_n})$

$=1-P(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)$

因 $\boxed{\lim_{n\to\infty}B_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i}$

则 $\lim_{n\to\infty}P(B_n)=P(\lim_{n\to\infty}B_n)$

推论3、$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

证明：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)+\cdots$

四、概率空间的实际例子

例、Bernoulli 概率空间

例、有限概率空间

例、离散概率空间

例、一维几何概率空间 ppt.上

第2章 条件概率与统计独立性

§2.1 条件概率、全概率公式与Bayes公式

一、条件概率

定义：设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个概率空间，$B \in \mathcal{F}$且$P(B)>0$，则对$\forall A \in \mathcal{F}$，记

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

性质(条件概率也是概率)

①$P(A|B) \geq 0$

②$P(\Omega|B)=1$

③$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

④$P(\bar{A}|B) = 1-P(A|B)$

⑤$P(A\cup B|C) = P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

注：$P(\Omega|B)=1$　　$P(B|\Omega) \neq 1$

$P(A|\Omega)=P(A)$　　$P(A|A)=1$

$P(A|\bar{B}) \neq P(\bar{A}|B)$　　$P(A|\bar{B}) \neq 1-P(A|B)$

二、乘法公式

①若$P(B)>0$，则$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$

若$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

②若$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

例 ppt(5)(会)

例(Polya坛子模型) P65. 例2.

$n_2=n-n_1$

$$p=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdots\frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}\cdot\frac{r}{b+r+n_1c}\cdot\frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}\cdots\frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}$$

$$=\frac{\prod_{k=0}^{n_1-1}(b+kc)\cdot\prod_{k=0}^{n_2-1}(r+kc)}{\prod_{k=0}^{n-1}(b+r+kc)}$$

注：答案只与黑球与红球出现的次数有关，而与出现的顺序无关

$c=0$ 有放回摸球　$c=-1$ 不放回摸球

三、全概率公式（求结果的概率）

完备事件组（样本空间Ω的一个分割）

① $A_i \cap A_j = \phi$，$\forall i \neq j$，$i,j=1,2,\cdots$

② $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ ☆☆

全概率公式：

则：$P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i)$

$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$

最简单形式：$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$ $\boxed{A \ \bar{A}}$

例. P68 例3.

四、贝叶斯公式（Bayes）（已知结果求发生原因的概率）

若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 是样本空间Ω的一组分割，且 $P(B) > 0$，则

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B|A_k)}{P(B)} \rightarrow \text{乘法公式}$$

$$= \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B|A_i)} \leftarrow \text{全概率公式}$$ ☆

例：用血清甲胎球蛋白法诊断肝癌：P(阳性|患者) = 0.95，P(阴性|健康者) = 0.90

已知自然人群中，P(患者) = 0.0004. 现随机抽查一人，用血清甲胎球蛋白法诊断结果为阳性（A），求其真正患肝癌（C）的概率有大？

解：记 A：血清甲胎球蛋白法诊断结果为阳性

C：某人患有肝癌

则 $P(C) = 0.0004$

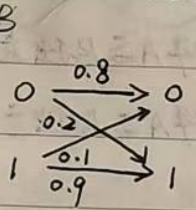
$P(A|C) = 0.95$

$P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.90$

$$P(C|A) = \frac{P(C) \cdot P(A|C)}{P(C) \cdot P(A|C) + P(\bar{C}) \cdot P(A|\bar{C})}$$

$= 0.0038$

例：发报机以0.7和0.3的概率发出信号0和1，由于随机干扰的影响，当发出信号0时，接收机不一定收到0，而是以概率0.8和0.2收到信号0和1；同样，当发报机发出信号1时，接收机以概率0.9和0.1收到信号1和0. 求当接收机收到信号0时，发报机发出信号是0的概率.



解：记 $\begin{cases} A_0 = A：发报机发出0 \\ A_1 = \bar{A}：发报机发出1 \\ B：接收机接到信号0 \end{cases}$

$$P(A_0|B) = \frac{P(A_0)\cdot P(B|A_0)}{P(A_0)\cdot P(B|A_0) + P(A_1)\cdot P(B|A_1)} = 0.9492$$

例：(Bayes 决策) 为了判断一个字母是C还是O，通常采用先提取它的某一个特征x，然后再根据这个特征作出判决，此时Bayes决策是常见的方法之一

解：记 $\begin{cases} A_1：被检验字母为C & P(A_1)=\frac{1}{2} \\ A_2：被检验字母为O & P(A_2)=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$P(A_1|x) = \frac{P(A_1)\cdot P(x|A_1)}{P(A_1)\cdot P(x|A_1) + P(A_2)\cdot P(x|A_2)}$$

$$P(A_2|x) = \frac{P(A_2)\cdot P(x|A_2)}{P(A_1)\cdot P(x|A_1) + P(A_2)\cdot P(x|A_2)}$$

若 $P(A_1|x) > P(A_2|x)$，则具有特征x的字母为C

§2.2 事件独立性

一、两个事件的独立性

定义：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，简称A与B独立

推论一：若事件A与B独立，且$P(B)>0$，则$P(A|B)=P(A)$

推论二：若事件A与B独立，则A与$\bar{B}$独立，$\bar{A}$与B独立，$\bar{A}$与$\bar{B}$独立

Remark：

①必然事件Ω及不可能事件φ与任何事件都独立

②相互独立与互不相容是无关的两个概念

二、多个事件的独立性

定义：A、B、C相互独立 $\Rightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$

对n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，$1\le i<j<k<\cdots\le n$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \cdots\cdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases}$$

等式共有：$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-\binom{n}{1}-\binom{n}{0}=2^n-n-1$

推论：

注意：①

②

三、事件独立性与概率的计算

$\bar{A}_1,\bar{A}_2,\cdots,\bar{A}_n$ 相互独立

若n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立的,则 $\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n$

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$

$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$ 独立性

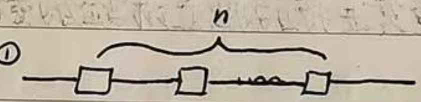
$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\cdots[1-P(A_n)]$

例:假若每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%,混合100个人的血清,求此血清中含有肝炎病毒的概率

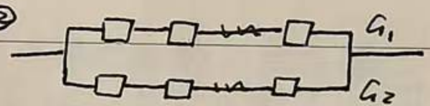
解:A_i=第i个人血清中含有肝炎病毒,$i=1,2,\cdots,100$

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})=$ ……

每个元件可靠性为p,

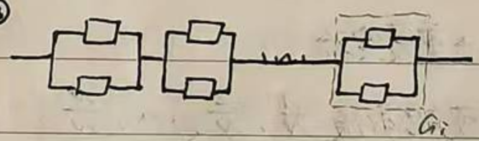
①


p^n

②


$1-P(\bar{G}_1\bar{G}_2)=1-P(\bar{G}_1)P(\bar{G}_2)$

$=1-(1-p^n)^2=p^n(2-p^n)$

③


③ $P(G_i)=1-(1-p)^2=p(2-p)$

$P(G_1G_2\cdots G_n)=P(G_1)P(G_2)\cdots P(G_n)=p^n(2-p)^n$

四试验的独立性

1.试验相互独立,指其中一个试验所得到的结果,对其它各试验取得的可能结果的概率都没有影响

2.若试验E_1的任一结果与试验E_2的任一结果都是相互独立的事件,则称这两个试验相互独立,或称独立试验

如E_1的样本空间$\Omega_1=\{\omega^{(1)}\}$,…$E_n$的样本空间$\Omega_n=\{\omega^{(n)}\}$.为描述这n次试验,构造依次进行试验$E_1,E_2,\cdots,E_n$的复合试验E,其样本点为$\omega=\{\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(n)}\}$

样本空间为$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n$

E：首先掷一枚硬币，再摸一只球

E_1：掷一枚硬币　E_2：从装有红、白、黑三球的袋子中摸出一球

例1. $\Omega_1=\{H,T\}$，$\Omega_2=\{R,W,B\}$

则 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{(H,R),(H,W),(H,B),(T,R),(T,W),(T,B)\}$

定义：设 $\mathscr{A}_k$ 表示与第 k 次试验有关的事件全体（$k=1,2,\cdots,n$），若对于任意的 $A^{(1)}\in\mathscr{A}_1$，$A^{(2)}\in\mathscr{A}_2$，…，$A^{(n)}\in\mathscr{A}_n$ 均成立 $P(A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)})=P(A^{(1)})P(A^{(2)})\cdots P(A^{(n)})$

则称试验 E_1、E_2、…、E_n 是相互独立的

如例1.

如例2. n次有放回摸球所构成的n个试验是相互独立的

n次不放回摸球所构成的n个试验不相互独立的

重复独立试验：研究在同样条件下重复进行的独立试验的数学模型

① $\Omega_1=\Omega_2=\cdots=\Omega_n$

②有关事件的概率保持不变

③各次试验是相互独立的

例：Pierre Simon Laplace 的独立重复实验

硬币正面向上的概率未知，但等可能取值 $\frac{1}{N},\frac{2}{N},\cdots,\frac{N}{N}$

$\Rightarrow P(p=\frac{i}{N})=\frac{1}{N}$，$i=1,2,\cdots,N$

问题：如果连续掷该硬币n次均正面向上，问第n+1次依然正面向上的概率是多少

解　A：第n+1次正面向上　　（求 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$）

B：连续n次均正面向上

C_i：正面向上的概率 $p=\frac{i}{N}$，$i=1,2,\cdots,N$ $\rightarrow P(C_i)=\frac{1}{N}$

$P(B)=P(B|C_1)P(C_1)+P(B|C_2)P(C_2)+\cdots+P(B|C_N)P(C_N)$

$P(B|C_i)=(\frac{i}{N})^n$?

$P(B)=(\frac{1}{N})^n\cdot\frac{1}{N}+(\frac{2}{N})^n\cdot\frac{1}{N}+\cdots+(\frac{N}{N})^n\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{i}{N})^n$

同理 $P(AB)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{i}{N})^{n+1}$　（定积分定义）

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\frac{i}{N})^{n+1}}{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\frac{i}{N})^{n}}\approx\frac{\int_0^1x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}}{\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}}\approx\frac{n+1}{n+2}$$

§2.3 Bernouli试验与直线上的随机游动 不考.

一、Bernouli概型

定义：随机试验E只有两个结果：A和$\bar{A}$，$P(A)=p$，$P(\bar{A})=q$，$p+q=1$

则称E为伯努利试验

特点：……

样本点：$w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 共有2^n

概率为 $P\{(w_1, w_2, \cdots, w_n)\} = p^k q^{n-k}$ ☆ $\overbrace{A A \cdots A}^{k} \underbrace{\bar{A}\bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k}$

独立重复Bernouli试验中的三个重要问题：

①n次试验中A恰好发生k次的概率是多少？

②到第k试验A才首次发生的概率是多少？

③一直不停试验，A最终发生的概率是多少？

在n重Bernoulli试验中，成功出现的次数k次

二项分布：$b(k;n,p) \triangleq P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$

$$\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^k = (p+q)^n = 1$$

例：设一批产品中有a件是次品，b件是正品，现有放回地从中抽回了n件产品，求事件A的概率，其中A={n件产品恰有k件次品}，$k=0,1,2,\cdots,n$

解：$P(A) = b(k;n,p) = C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}$

n重Bernoulli试验中，首次成功出现在第k次试验的概率

几何分布：$g(k;p) = q^{k-1}p = (1-p)^{k-1}p$，$k=1,2,\cdots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(k;p) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

n重Bernoulli试验中，第r次成功出现在第k次试验的概率

帕斯卡分布：$f(k;r,p) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k-r} \cdot p = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$，$k=r, r+1, r+2, \cdots$

$$\sum_{k=r}^{\infty} f(k;r,p) = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} \xlongequal{l \triangleq k-r} \sum_{l=0}^{\infty} \overbrace{\binom{r+l-1}{r-1}}^{C_{r+l-1}^{r-1}} p^r q^l = \sum_{l=0}^{\infty} \overbrace{\binom{r+l-1}{l}}^{C_{r+l-1}^{l}} p^r q^l = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-r}{l} p^r q^l$$

牛顿二项式：$(1+x)^\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} x^l$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-r}{l} (-q)^l p^r = (1-q)^{-r} p^r = 1$$

$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}$

帕斯卡分布

1、分赌注问题

甲、乙两赌徒按某种方式下注赌博，先胜t局者将赢得全部赌注，但进行到甲胜r局、乙胜s局（$r<t, s<t$）时，因故不得不中止，问如何分配这些赌注才公平合理.

解：$A=$甲获胜概率为p，还须$n=t-r$局；$\bar{A}=$乙获胜概率q，还须$m=t-s$局

甲最终获胜：第n次出现A之前，$\bar{A}$出现的次数k小于m次

则须进行$n+k$次赌局 → 第n次获胜须出现在第$n+k$局 （$k=0,1,\cdots,m-1$）

$$P(\text{甲最终获胜})=\sum_{k=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{n-1}p^{n-1}q^{k}\cdot p=\sum_{k=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{n-1}p^{n}q^{k}$$

2 Banach火柴盒问题

数学家衣服的左、右口袋中各放有一盒装有N根火柴的火柴盒，每次抽烟时任取一盒用一根，求发现一盒用光时，另一盒尚有r根火柴的概率

每次任取一盒是$p=\frac{1}{2}$的Bernoulli试验

解考虑左边口袋空而右边尚有r根：左边取过$N+1$次（第$N+1$次发现空了）而右边取过$N-r$次

$$P(\text{一盒用光另一盒剩}r)=2\cdot f(2N-r+1;N+1,\tfrac{1}{2})=2\binom{2N-r}{N}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-r}\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$=\binom{2N-r}{N}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2N-r}$$

4小概率事件必然发生

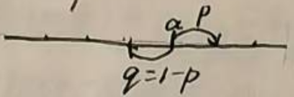
假定随机事件A在一次试验中发生的概率是P（无论多小，但要$p>0$），如果不停地独立重复进行该试验，那么A最终必然会发生. $\Leftrightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=1$　　$P(\bar{A_i})=1-p$

证：$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A_i})=1-\prod_{i=1}^{\infty}P(\bar{A_i})=1-\prod_{i=1}^{\infty}(1-p)$

$$=1-\lim_{n\to\infty}(1-p)^n=1$$

三、直线上的随机游动

1、随机游动



2、对称的随机游动：$p=q=\frac{1}{2}$

3、无限制随机波动：质点可以在整个数轴的整数点上游动

有无穷财资的赌徒在n局后的输赢

事件$\{S_n=k\}$

①(假设赌徒在n局赢\$k) $\longrightarrow p=q=\frac{1}{2}$

定义 $\begin{cases} x：在n次游动中向右移动的次数 \\ y：在n次游动中向左移动的次数 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=n \\ x-y=k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{n+k}{2} \\ y=\frac{n-k}{2} \end{cases}$ (n、k须具有相同奇偶性)

$$p(S_n=k)=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n+k}{2}}$$

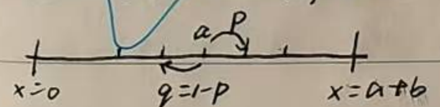
当n与k奇偶性相反时，$P\{S_n=k\}=0$ ？

②赌徒在n局后не赢的概率

(1) n为偶数($n=2m$)

4.两端带有吸收壁的随机波动 X

(有限赌资赌徒的输赢)

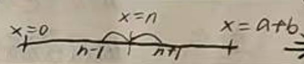


确定质点在 $x=0$ / $x=a+b$ 被吸收的概率

定义 $\begin{cases} q_0(n)=P\{\text{从}x=n\text{出发被}0\text{吸收}\} \Rightarrow \text{边界条件}: q_0(0)=1,\ q_0(a+b)=0 \\ P_{a+b}(n)=P\{\text{从}x=n\text{出现被}a+b\text{吸收}\} \Rightarrow P_{a+b}(0)=0,\ P_{a+b}(a+b)=1 \end{cases}$

全概率公式

$P\{\text{从}x=n\text{出发被}0\text{吸收}\} = p\cdot P\{\text{从}x=n+1\text{出发被}0\text{吸收}\} + q\cdot P\{\text{从}x=n-1\text{出发被}0\text{吸收}\}$



$\Rightarrow q_0(n) = p\cdot q_0(n+1) + q\cdot q_0(n-1)$

同理 $P_{a+b}(n)=p\cdot P_{a+b}(n+1)+q\cdot P_{a+b}(n-1)$

四、推广的Bernoulli试验与多项分布

二项分布可以容易地推广到n次重复独立试验且每次试验可能有若干个结果的情形

设每次试验的可能结果为$A_1, A_2, \cdots, A_r$，且 $\begin{cases} P(A_i)=p_i, & i=1,2,\cdots,r \\ p_i \geq 0, & 且 p_1+p_2+\cdots+p_r=1 \end{cases}$

$P(A_1=k_1, A_2=k_2, \cdots, A_r=k_r) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ $k_i \geq 0$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$

多项分布：$(p_1+p_2+\cdots+p_r)^n$ 展开式的一般项

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ k_1+k_2+\cdots+k_r=n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = 1$$

例：平面上的随机游动 X

一质点从平面上某一点出发，等可能的向上、下、左右四个方向移动，每次的移动距离为1，求经过2n次移动后回到出发点的概率

解：定义 $\begin{cases} A_1：质点向上移动一格 \\ A_2：质点向下移动一格 \\ A_3：质点向左移动一格 \\ A_4：质点向右移动一格 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A_1)=\frac{1}{4} \\ P(A_2)=\frac{1}{4} \\ P(A_3)=\frac{1}{4} \\ P(A_4)=\frac{1}{4} \end{cases}$

则 $P = \sum_{k+m=n} \dfrac{(2n)!}{k!k!m!m!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}_{=\binom{2n}{n}}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot \binom{2n}{n}^2$

§2.4 二项分布与Poisson分布

一、二项分布

事件A恰好发生k次

$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

例：血清试验

性质：

(1) 固定n与p，当k增加时，概率$b(k;n,p)$先随之增加直至达到最大值，随后单调减少.

(2) 当$(n+1)\cdot p$不为整数时，$b(k;n;p)$在$[(n+1)\cdot p]$ 达到最大值 →取整

(3) 当$(n+1)p=m$为整数时，$b(k;n,p)$在$k=m-1$和$k=m$达到最大值.

证：(1) $\frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)}=\frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{kq}$

$=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}$ ☆

(2)(3)
$$\begin{cases} k<(n+1)p \Rightarrow b(k;n,p)>b(k-1;n,p) \\ k=(n+1)p \Rightarrow b(k;n,p)=b(k-1;n,p) \\ k>(n+1)p \Rightarrow b(k;n,p)<b(k-1;n,p) \end{cases}$$

例：设某种疾病的发病率为0.01，问在500人的社区中进行普查，最可能的发病人数是多少？并求其相应的概率

解：$n=500,\ p=0.01$

$(n+1)p=(500+1)\times0.01=5.01$

$[(n+1)p]=5$

$b(5;500,0.01)=\binom{500}{5}\times0.01^5\times0.99^{495}=0.17635105$

例：(机票超售) 某航线历史资料表明：购票乘客有 5% 不来登机，问一架 200 座飞机可以售出多少张机票.

解：假设超售票 m 张，共售 200+m 张机票，$\overset{\text{登机}}{p=0.95}$

实际登机人数 k 人的概率服从二项分布 $b(k;200+m,0.95)$

① $P(\text{恰好}k\text{人登机})=\binom{200+m}{k}p^k(1-p)^{200+m-k}$

② $\underbrace{\text{出现拒登机}}_{\text{实际登机人数超过飞机座位数200人}}$的概率为 $\sum_{k=201}^{200+m}b(k;200+m,0.95)=\sum_{k=201}^{200+m}\binom{200+m}{k}\times 0.95^k\times 0.05^{200+m-k}$

例：(人寿保险) ① 40 人死亡 $b(40;10000,0.005)$

② 不超过 70 人 $\sum_{k=0}^{70}b(k;10000,0.005)$

直接计算困难

二、二项分布的 Poisson 逼近

Poisson 定理：在独立试验中，以 p_n 代表事件 A 在试验中出现的概率，它与试验的总次数 n 有关，如果 $np_n\to\lambda$，则当 $n\to\infty$ 时，有 $b(k;n,p_n)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$\lambda_n \triangleq np_n \to p_n=\frac{\lambda_n}{n}$

$$b(k;n,p_n)=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=e^{-\lambda}$

$$\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(n\to\infty)$$

泊松定理表明：泊松分布是二项分布的极限分布 ☆

应用中，当 p 很小 ($p\le 0.1$) 时，有近似公式 $b(k;n,p)\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$

三、泊松分布 Poisson

$\underbrace{p(k;\lambda)}_{np}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ☆

Cauchy引理：若$f(x)$是连续函数（或单调函数），且对一切x,y（或一切$x\ge0, y\ge0$）成立
$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$
则$f(x)=a^x$（其中$a\ge0$是某一常数）

产生Poisson分布的机制分布：
...

说明$f(x)=a^x$对一切有理数成立，再利用连续性或单调性可以证明对无理数也成立

Poisson过程：①②③
...

求$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$
...

例：假设服务器在长度t分钟的时间内被攻击的次数近似服从$P(2t)$，问3分钟内至少被攻击一次与5分钟内至少被攻击两次，哪一个事件更有可能出现？

解：3分钟内被攻击次数服从参数为6的Poisson分布，故3分钟内至少被攻击一次的概率为：$1-p(0;6)\approx0.9975212$ $\quad \lambda t=2t$

同理：$1-p(0;10)-p(1;10)\approx0.9995006$

§3.1 随机变量及其分布

一、随机变量的定义（将试验结果数值化）

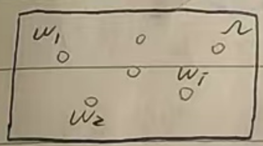
例：抛一枚硬币的试验中：$X=\begin{cases}1, \text{出现正面(H)向上}\\ 0, \text{出现反面(T)向上}\end{cases}$

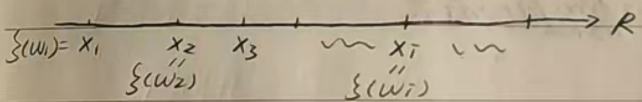
例：对任意随机事件A，引进一个函数（$\Omega\to\{0,1\}$）来表示A是否发生：$I_A=\begin{cases}1, \text{如果A发生}\\ 0, \text{如果A不发生}\end{cases}$

1、随机变量的概念

若对于随机试验E的每一个可能结果$\omega\in\Omega$，都有唯一的一个实数值$\xi(\omega)$相对应，则称实值函数$\xi(\omega)$为随机变量，简记为ξ

随机变量：X、Y、Z、W、V　随机变量所取的值：x, y, z, w, v





2、如何理解一个随机变量ξ？

①ξ的取值情况

②ξ的取值的概率分布情况

(1)

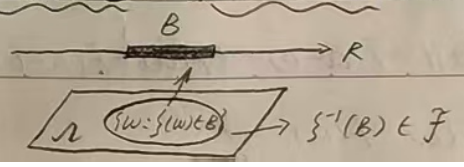
(2) ξ的取值既具有可变性，也有随机性

3、引入随机变量的意义

研究随机事件的概率规律 $\xrightarrow{\text{通过将随机事件数值化转为}}$ 研究随机变量取值的概率规律

定义：设$\xi(\omega)$是定义于概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的单值实函数，如果对于直线上任一Borel点集B，有$\{\omega:\xi(\omega)\in B\}\in\mathcal{F}$

则称$\xi(\omega)$为随机变量，而$P(\xi(\omega)\in B)$称为随机变量$\xi(\omega)$的概率分布



定义：$F(x)=P\{\xi(\omega)\le x\}$，$-\infty<x<\infty$ 为随机变量$\xi(\omega)$的累积分布函数，记作$\xi(\omega)\sim$

注1、2、

3、分布函数可以唯一决定概率分布

二、分布函数的性质

①单调性：若$a<b$，则$F(a)\le F(b)$

证：$F(b)-F(a)=P\{\xi\le b\}-P\{\xi\le a\}$

$=P\{a<\xi\le b\}\ge 0$

②有界性：$0\le F(x)\le 1$，且$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

证：$P\{-\infty<\xi<+\infty\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}P\{n<\xi\le n+1\}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[F(n+1)-F(n)]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}F(n)-\lim\limits_{m\to-\infty}F(m)=1$

$F(x)$单调有界 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{m\to-\infty}F(m)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F(n)$存在

又因为$0\le F(x)\le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{m\to-\infty}F(m)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}F(n)=1$

③右连续性：$F(x+0)=\lim\limits_{t\to x+0}F(t)=F(x)$

证：

(1) $P\{\xi(\omega)\le a\}=P\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\xi(\omega)\le a+\frac{1}{n}\}\}=\lim\limits_{n\to+\infty}P\{\xi(\omega)\le a+\frac{1}{n}\}=\lim\limits_{n\to\infty}F(a+\frac{1}{n})=F(a+0)$

(2) $P\{\xi(\omega)=a\}=P\{\xi(\omega)\le a\}-P\{\xi(\omega)<a\}=F(a)-F(a-0)$

(3) $P\{\xi(\omega)\ge a\}=1-P\{\xi(\omega)<a\}=1-F(a-0)$

(4) $P\{\xi(\omega)>a\}=P\{\xi(\omega)\ge a\}-P\{\xi(\omega)=a\}=1-F(a-0)-(F(a)-F(a-0))=1-F(a)$

(5) $P\{a<\xi(\omega)\le b\}=P\{\xi(\omega)\le b\}-P\{\xi(\omega)\le a\}=F(b)-F(a)$

三、离散型随机变量

定义：若随机变量ξ的全部可能取值是有限个或可列无限个，则称ξ是离散型随机变量

定义：设$\xi=x_k$，$k=1,2,\cdots$，则称事件$\{\xi=x_k\}$的概率$P\{\xi=x_k\}\triangleq P_k$，$k=1,2,\cdots$为随机变量$\xi$的概率分布或分布律

①分布列：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P_k	P_1	P_2	$\cdots$	P_k	$\cdots$

②概率分布的性质：

(1) $P_k\geq 0$，$k=1,2,\cdots$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$

已知分布列求分布函数：$F(x)=P\{\xi\leq x\}=\sum_{x_k\leq x}P_k$，$\forall x\in R$

已知分布函数求分布列：$P\{\xi=x\}=F(x)-F(x-0)$，$\forall x\in R$

常见的离散型随机变量及其分布

①退化分布（随机变量固定）：$P\{\xi=c\}=1$

②Bernoulli分布：$P\{\xi=k\}=b(k;1,p)=p^k(1-p)^{1-k}$　$k=0,1$

③二项分布：$P\{\xi=k\}=b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$　$k=0,1,2,\cdots,n$

④超几何分布：$h_x=P\{\xi=x\}=\dfrac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$　$x=0,1,2,\cdots,k$

⑤Poisson分布：$P\{\xi=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$　$x=0,1,2,\cdots$

⑥几何分布：$g(x,p)=P\{\eta=x\}=(1-p)^{x-1}p$　$x=1,2,\cdots$

只有几何分布有无记忆性：$P\{\eta>m+n\mid\eta>m\}=P\{\eta>n\}$，$\forall m,n\geq 1$

或者$P\{\eta=m+n\mid\eta>m\}=P\{\eta=n\}$，$\forall m,n\geq 1$

Remark：几何分布是唯一无记忆的离散型分布

直观解释：表明试验m次失败，加做n次试验失败的条件概率，等于从开始算起做n次试验失败的概率，即已做过的m次失败的试验被忘记了（根本原因在于独立重复试验）☆☆

全部试验数

③ Pascal分布：Bernoulli试验中，(1) 事件A第r次出现时的试验次数

$P\{\xi=x\}=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{x-r}$，$x=r,r+1,\cdots$　　r=1时为几何分布

△ 定义η_i表示第$i-1$次成功之后算起，再首次出现成功所需的试验次数，

则η_i服从几何分布 $P\{\eta_i=x\}=pq^{x-1}$，$x=1,2,3,\cdots$

△ η_i相互独立，且$\xi=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_r$

△ 参数为r的Pascal分布可以分解为r个独立同分布的几何分布的随机变量之和

(2) 定义$\tilde{\xi}=\xi-r$，则$\tilde{\xi}$表示为等待第r次成功出现所经历的失败次数，则

$P\{\tilde{\xi}=y\}=P\{\xi=r+y\}=\binom{r+y-1}{r-1}p^r q^y=\binom{-r}{y}p^r(-q)^y$　$y=0,1,2,\cdots$

△ r=1时，表示首次出现成功所经历的失败次数$\tilde{\eta}$，则$P\{\tilde{\eta}=x\}=q^x p$，$x=0,1,\cdots$
几何分布

△ 等待第r次成功所经历的失败次数也可以分解为$\tilde{\xi}=\tilde{\eta}_1+\tilde{\eta}_2+\cdots+\tilde{\eta}_r$

④ 负二次分布：Pascal分布中去掉r为正整数的限制，$\forall r>0$，称

$$Nb(x;r,p)=\binom{-r}{x}p^r(-q)^x \quad x=0,1,2,\cdots$$

四、连续型随机变量

定义：设$F(x)$是随机变量ξ的分布函数，若存在非负可积函数$p(x)$，使对任意实数x都有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt$ ☆

称$p(x)$为ξ的概率密度函数，简称概率密度或密度函数

Remark：连续型随机变量的分布函数$F(x)$是绝对连续的，且$F(x)$几乎处处可导，

即 $p(x)=F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)$　$x\in R$

概率密度性质：

① 非负性：$p(x)\geq 0$

② 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$（概率密度函数的充分必要条件）

△ $P\{a<\xi\leq b\}=P\{\xi\leq b\}-P\{\xi\leq a\}=F(b)-F(a)=\int_a^b p(x)dx$

? △ 对R中任一Borel点集B，可证$P\{\xi\in B\}=\int_B p(x)dx$

△ 在$p(x)$的连续点x处，有$P\{\xi\in(x,x+\Delta x)\}\approx p(x)\cdot\Delta x$

△ $\forall c \in (-\infty, +\infty)$，有 $P\{\xi = c\} = 0$

$(0 \le P\{\xi = c\} \le \lim\limits_{h \to 0} \int_c^{c+h} p(x)\,dx \to 0 \quad (h \to 0))$

Remark：

△ 事件概率为0，不一定为不可能事件

1，不一定为必然事件

△ 在零测集上可改变密度函数 $p(x)$ 的值，而不影响分布函数 $F(x)$ 的值

相互唯一确定

△ 若两个ξ的 $p(x)$ 几乎处处相等，即可说二者同分布

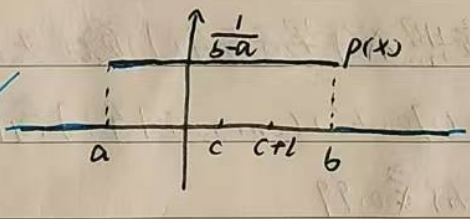
例：$p(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

写出ξ的分布函数 $(F(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx)$

解：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_0^x t\,dt & 0 \le x < 1 \\ \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases} \rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \le x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

① 均匀分布：$\xi \sim U[a,b]$



$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$\forall [c, c+l] \subset [a,b]$

$P\{c \le \xi < c+l\} = \int_c^{c+l} p(x)\,dx = \int_c^{c+l} \frac{1}{b+a}\,dx = \frac{l}{b-a}$

与长度成正比，与位置无关

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$

$p(x)$在$x=\mu$处取最大值$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

μ决定位置，σ决定形状

(Gauss分布)

③正态分布：$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x, \mu \in R, \sigma>0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad x\in R$$

标准正态分布：$\mu=0, \sigma=1$，即$N(0,1)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\in R$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad x\in R$$

① $p(x)\geq 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$

(1) $p(x)$定义了一个概率密度函数，显然有$p(x)>0$ ①

$$② \int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz}_{=\sqrt{2\pi}}=1$$

令$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$

(2) $\xi \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{\xi-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ ☆☆

△ $F(x)=P\{\xi<x\}=P\{\frac{\xi-\mu}{\sigma}<\frac{x-\mu}{\sigma}\}=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ ← $N(0,1)$的分布函数

△ $P\{a<\xi\leq b\}=F(b)-F(a)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

△ $P\{|\xi-\mu|<k\cdot\sigma\}=P\{-k<\frac{\xi-\mu}{\sigma}<k\}=\Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1$

$P\{|\xi-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826895$

$P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544997$

$P\{|\xi-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.9973002$

例：公共汽车车门的高度是按照成年男子与车门顶碰头的机会在0.01以下来设计的，假设成年男子身高$X\sim N(170, 6^2)$(cm)，问车门高度h应确定为多少？

解：$P\{X\geq h\}\leq 0.01 \Rightarrow P\{X<h\}\geq 0.99$

$P\{X<h\}=\Phi(\frac{h-170}{6})\geq 0.99$

$\frac{h-170}{6}\geq$ ～

$h\geq$ ～

指数分布：$\xi \sim Exp(\lambda)$

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases} \quad (\lambda>0)$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$$

无记忆性：$P\{\xi\ge s+t \mid \xi\ge s\}=\frac{P\{\xi\ge s+t\}}{P\{\xi\ge s\}}=\frac{1-P\{\xi<s+t\}}{1-P\{\xi<s\}}=\frac{1-F(s+t)}{1-F(s)}$
(定理ppt上)

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\{\xi\ge t\}$$

例：某人乘公交车去上班，等待公交车的时间(分钟) $\xi\sim Exp(0.2)$，如①果等车时间超过10分钟他就去乘出租车去上班、假设一个月工作日为20天，求至少有3天②是乘出租车上班的概率.

二项分布

$\lambda=0.2$，$t=10$

解：$P\{\xi>10\}=1-P\{\xi\le 10\}=1-F(10)=e^{-2}$

设η为每个月等待时间超过10分钟的次数

$\eta\sim B(20,e^{-2})$

$$P\{\eta\ge 3\}=\sum_{k=3}^{20}\binom{20}{k}p^k(1-p)^{20-k}=1-\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}p^k(1-p)^{20-k}=0.5206055$$

指数分布与泊松过程的关系：

$\xi(t)$表示参数为λt的Poisson过程

$$P\{\xi(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\quad k=0,1,2,\cdots$$

$\tau_1 \triangleq \{\xi(t)$的第一个跳跃发生的时刻$\}$

? $P\{\tau_1\ge t\}=P\{\xi(t)=0\}=e^{-\lambda t}$

$P\{\tau_1<t\}=1-P\{\tau_1\ge t\}=1-e^{-\lambda t}$

④ Erlang（埃尔朗）分布：

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad r\in N^+,\ \lambda>0$$

$$F(t)=1-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

⑤ Γ（伽马）分布：$\xi\sim\Gamma(r,\lambda)$

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}\qquad \Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx\quad r\in R^+$$

$\Gamma(1,\lambda)=Exp(\lambda)$

当 $r\in N^+$ 时，$\Gamma(r,\lambda)$ 为 Erlang 分布

性质 $\Gamma(1)=1$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$\forall r\in R^+$，$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$

$\forall r\in N^+$，$\Gamma(r+1)=r!$

$$\binom{n+r-1}{n}=\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)\Gamma(r)}$$

$$\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}=\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}du$$

§3.2 随机向量，随机变量的独立性

一、随机向量及其分布

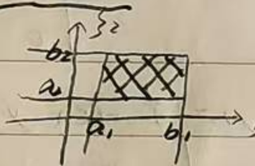
①定义：$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))$ n维随机向量/n维随机变量

$\forall x_1,x_2,\cdots x_n\in R$

$\{\xi_1(\omega)<x_1,\xi_2(\omega)<x_2,\cdots,\xi_n(\omega)<x_n\}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{\xi_i(\omega)<x_i\}\in\mathcal{F}$

即：若B_n为R^n上任一Borel点集，则$\{\omega\mid\xi(\omega)\in B_n\}\in\mathcal{F}$

②定义：称n元函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{\xi_1(\omega)\le x_1,\xi_2(\omega)\le x_2,\cdots,\xi_n(\omega)\le x_n\}$为n维随机向量$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))$的(联合)分布函数



如：$P\{a_1<\xi_1\le b_1,\ a_2<\xi_2\le b_2\}$

$=P\{\xi_1\le b_1,\xi_2\le b_2\}-P\{\xi_1\le a_1,\xi_2\le b_2\}-P\{\xi_1\le b_1,\xi_2\le a_2\}+P\{\xi_1\le a_1,\xi_2\le a_2\}$

多元分布函数的性质：(与一元类似)

(1) 单调性：$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于x_i单调不降

(2) 规范性：
$$\begin{cases}F(-\infty,x_2,x_3,\cdots,x_n)=0\\F(x_1,-\infty,x_3,\cdots,x_n)=0\\\quad\vdots\\F(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},-\infty)=0\\F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)=1\end{cases}$$

(3) 右连续性.

(4) $n=2$时 $\forall a_1\le b_1,\ a_2\le b_2$ 有 $F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)\ge0$

③常见的多元离散型分布

$k_1+k_2+\cdots+k_r=n$

(1) 多项分布：$P(\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\cdots,\xi_r=k_r)=\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$

(有放回抽样)

$N_1+N_2+\cdots+N_r=N,\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n$

(2) 多元超几何分布：$P(\xi_1=n_1,\xi_2=n_2,\cdots,\xi_r=n_r)=\dfrac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$

(不放回抽样)

④常见的多元连续型分布

联合概率密度函数：存在非负函数 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得

充分必要条件

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(y_1,y_2,\cdots,y_n)dy_1dy_2\cdots dy_n$$

性质：

(1) 非负性：$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0$

(2) 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}p(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$

1. 均匀分布

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\frac{1}{S} & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in G\\ 0 & (x_1,x_2,\cdots,x_n)\notin G\end{cases}$$

如 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & -1\leq x,y\leq 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

2. 多元正态分布

△二元正态分布

设二维随机向量 (X,Y) 具有概率密度函数

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二元正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)\ \begin{matrix}\rightarrow\\ \not\leftarrow\end{matrix}\ \begin{cases}\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\\ \eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\end{cases}\ ☆$$

须 $p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)$

二、边际分布

离散情形

ξ 取 $x_1,x_2,\cdots,x_i\cdots$，η 取 $y_1,y_2,\cdots,y_j\cdots$

$p(x_i,y_j)\triangleq P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$

$\{p(x_i,y_j)\}$ 为 (ξ,η) 的联合分布律

联合分布律
性质

(1) $p(x_i,y_j)\geq 0$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p(x_i,y_j)=1$

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	$\cdots$	$p(x_1,y_j)$	$\cdots$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	$\cdots$	$p(x_2,y_j)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	$\cdots$	$p(x_i,y_j)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

ξ、η 的边际(边缘)分布

$p_1(x_i)\triangleq P\{\xi=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p(x_i,y_j)$

$p_2(y_j)\triangleq P\{\eta=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i,y_j)$

联合分布不能由边际分布唯一确定

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_1(\cdot)$
x_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_1,y_2)$	$\cdots$	$p(x_1,y_j)$	$\cdots$	$p_1(x_1)$
x_2	$p(x_2,y_1)$	$p(x_2,y_2)$	$\cdots$	$p(x_2,y_j)$	$\cdots$	$p_1(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$p(x_i,y_1)$	$p(x_i,y_2)$	$\cdots$	$p(x_i,y_j)$	$\cdots$	$p_1(x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_2(\cdot)$	$p_2(y_1)$	$p_2(y_2)$	$\cdots$	$p_2(y_j)$	$\cdots$	1

例：从 1, 2, 3, 4 中随机取一个数 ξ，再从 1, …, ξ 中随机地取一个数 η，确定 (ξ,η) 的联合分布律

解 ξ 可取 1, 2, 3, 4，$P\{\xi=i\}=\frac{1}{4}$，$i=1,2,3,4$

η 可取 1, 2, 3, 4 且 $\eta\leq\xi$，$P\{\eta=j\mid\xi=i\}=\frac{1}{i}$，$j=1,\cdots,i$

$P(\xi=i,\eta=j)=P(\xi=i)\cdot P\{\eta=j\mid\xi=i\}=\frac{1}{4i}$ $1\leq j\leq i\leq 4$ (乘法公式)

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

若(ξ,η)是二维(离散或连续)随机向量，其分布函数为$F(x,y)$

则ξ,η的分布函数为

$F_\xi(x)=P\{\xi\le x\}=P\{\xi\le x,\eta<+\infty\}=F(x,+\infty)$ ξ的边际分布函数

$F_\eta(y)=P\{\eta\le y\}=P\{\xi<+\infty,\eta\le y\}=F(+\infty,y)$ η的边际分布函数

若连续情形 $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dvdu$

$=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,v)dudv$

连续情形

△设连续型随机向量(ξ,η)的联合分布函数$F(x,y)$，联合概率密度函数为$p(x,y)$

则$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv$ $p(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$

△在连续点(x,y)处，(ξ,η)落在小的矩形区域$(x,x+\Delta x)\times(y,y+\Delta y)$上的概率近似等于$p(x,y)\Delta x\Delta y$

△(ξ,η)落在平面上任意区域D上的概率为：$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint p(x,y)dxdy$

例：已知(ξ,η)的联合概率密度函数为$p(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)} & x,y\ge0\\0 & \text{其它}\end{cases}$

①求(ξ,η)的联合分布函数$F(x,y)$

解 $\forall x>0,y>0$

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv=\iint_D p(u,v)dudv$

$=\int_0^y e^{-v}\left[\int_0^x 2e^{-2u}du\right]dv=\int_0^y(1-e^{-2x})e^{-v}dv$

$=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$

$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0,y>0\\0 & \text{其它}\end{cases}$

②求$P\{0<\xi\le1,0<\eta\le1\}$

法1:

解 $P\{0<\xi\le1,0<\eta\le1\}=P\{\xi\le1,\eta\le1\}-P\{\xi\le0,\eta\le1\}-P\{\xi\le1,\eta\le0\}+P\{\xi\le0,\eta\le0\}$

$=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=(1-e^{-2})(1-e^{-1})$

法2:

$P\{0<\xi\le1,0<\eta\le1\}=\iint_D p(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 2e^{-(2x+y)}dxdy$

$=(1-e^{-2})(1-e^{-1})$

③求$P\{\xi\le\eta\}$ 即 $x\ge y$

解 $P\{\xi\ge\eta\}=\iint p(x,y)\,dxdy=\iint 2e^{-(2x+y)}\,dxdy$

$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_y^{+\infty}2e^{-2x}dx\right)dy=\frac{1}{3}$

边际分布

$p_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy$ $\quad\xi\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$

$\eta\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$p_\eta(y)=\frac{d}{dy}F_\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$

见上上上页的二元正态分布

条件 $\begin{cases}(\eta|\xi=x)\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)\\(\xi|\eta=y)\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)\end{cases}$

$\downarrow \rho=0$

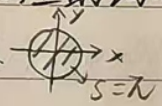
$\begin{cases}(\eta|\xi=x)\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\\(\xi|\eta=y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\end{cases}$

X、Y相互独立 $\Longleftrightarrow\rho=0$

问题：均匀分布的边际分布是否还是均匀分布？ ✗

例：(X,Y)服从$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$上的均匀分布，求随机变量X、Y的边际概率密度.

解 $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le1\\0 & 其它\end{cases}$



$-1\le x\le1$

$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$

$|x|>1$

$p_X(x)=0$

$p_X(x)=\begin{cases}\\ \end{cases}$

同理: ~

三、条件分布

离散情形：

已知 $\xi=x_i$ 时，事件 $\{\eta=y_j\}$ 的条件概率为：

$$P\{\eta=y_j|\xi=x_i\}=\frac{P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}}{P\{\xi=x_i\}}=\frac{p(x_i,y_j)}{p_1(x_i)}$$

即 η 关于 ξ 的条件分布

$(\eta|\xi=x_i)$

$$P\{\xi=x_i|\eta=y_j\}=\frac{P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}}{P\{\eta=y_j\}}=\frac{p(x_i,y_j)}{p_2(y_j)}$$

即 ξ 关于 η 的条件分布

$(\xi|\eta=y_j)$

例见上上上页

① $(\xi|\eta=1)$ 的条件分布律为

$\xi|\eta=1$	1	2	3	4
p_i	$\frac{12}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$

② ……

③ $(\eta|\xi=3)$ 的条件分布律为

$\eta|\xi=3$	1	2	3
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

连续情形

例：二元正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的条件分布仍然是正态分布

$$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\}$$

$$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_\eta(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]\right.}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\}$$

$(\eta|\xi=x)\sim N(\quad,\quad)$

$(\xi|\eta=y)\sim N(\quad,\quad)$

例：上页

解 $p(x,y)=\{$

$p_X(x)=\{$ $\quad p_Y(y)=\{$

$p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}\\ 0 & 其它\end{cases}$ $\quad p(x|y)=\{$

$(\eta|\xi=x)\sim U(-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2})$，$(\xi|\eta=y)\sim U(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})$

四、随机变量的独立性

定义：$P\{\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2,\cdots,\xi_n\le x_n\}=P\{\xi_1\le x_1\}\cdot P\{\xi_2\le x_2\}\cdots P\{\xi_n\le x_n\}$

则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ $\boxed{相互独立}$ ☆☆ （等号亦同）

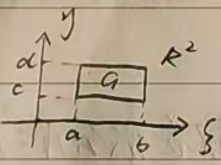
即 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$

~~条件分布化为无条件分布~~

$\boxed{P(\eta\le y|\xi=x)}=\frac{P(\xi=x,\eta\le y)}{P(\xi=x)}=\frac{P(\xi=x)\cdot P(\eta\le y)}{P(\xi=x)}=\boxed{P(\eta\le y)}$ ✓

$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$

例：设(ξ,η)服从矩阵 $G=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 上的均匀分布



$\therefore p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)} & a\le x\le b, c\le y\le d\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\Leftrightarrow \xi\sim U[a,b]$，$\eta\sim U[c,d]$，且$\xi,\eta$相互独立

$\nrightarrow$ 两两独立

定理：如果$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，则其中任何一部分随机变量仍独立.

定理：ξ,η独立 $\Leftrightarrow$ 当且仅当 $p(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$ ☆☆

$P\{\xi\in B_1,\eta\in B_2\}=P\{\xi\in B_1\}\cdot P\{\eta\in B_2\}$

§3.3 随机变量的函数及其分布

一、Borel 函数与随机变量的函数

$y=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $R^n\to R^1$

定义：设 $y=g(x)$ 是 R^1 到 R^1 上的一个映射，若对于一切 R^1 的 Borel 点集 B_1，都有（n元）

$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B_1\}\in \mathcal{B}_n$

$\{x=g(x)\in B_1\}\in\mathcal{B}_1$ （$\mathcal{B}_1$ 为 R^1 上的 Borel σ域）

则称 $g(x)$ 是一元 Borel（可测）函数 ← 所有分段连续/单调函数

大部分函数

$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ n元 $g(\xi_1,\xi_2,\cdots)$

命题：若 ξ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量，而 $g(x)$ 是一元 Borel 函数，则 $g(\xi)$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量.

离散型随机变量的函数的分布

设 ξ 的分布列为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$p_i=P\{\xi=x_i\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

设 $g(\xi)$ 的分布列为

$g(\xi)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
$P\{g(\xi)=g(x_i)\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$g(x_i)$ 相等，p_i 可合并

离散卷积公式：$P\{\xi+\eta=r\}=\sum_{k=0}^{r}P\{\xi=k\}\cdot P\{\eta=r-k\}$

定理：若 $\xi\sim B(m,p)$（→二项分布），$\eta\sim B(n,p)$ 相互独立，则 $\xi+\eta\sim B(m+n,p)$

定理：若 $\xi\sim P(\lambda_1)$，$\eta\sim P(\lambda_2)$ 相互独立，则 $\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

已知ξ的分布函数$F(x)$或密度函数$p(x)$，求$\eta=g(\xi)$的分布函数$G(y)$或密度函数$q(y)$

$$G(y)=P\{\eta\le y\}=P\{g(\xi)\le y\}=\int_{g(\xi)\le y}p(x)dx$$

二、单个随机变量的函数的分布（15ppt）

① 直接法：$\{x:g(\xi)\le y\}$ 直接化为ξ

例：设ξ的密度函数$p(x)$，$\eta=a\xi+b$（$a\ne0$），求η的密度函数$q(y)$

$$G(y)=P\{\eta<y\}=P\{a\xi+b<y\}=\begin{cases}P\{\xi<\frac{y-b}{a}\} & a>0\\ P\{\xi>\frac{y-b}{a}\} & a<0\end{cases}=\begin{cases}F(\frac{y-b}{a}) & a>0\\ 1-F(\frac{y-b}{a}) & a<0\end{cases}$$

$$q(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\begin{cases}\frac{1}{a}p(\frac{y-b}{a}) & a>0\\ -\frac{1}{a}p(\frac{y-b}{a}) & a<0\end{cases}=\frac{1}{|a|}p(\frac{y-b}{a})$$

若$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad -\infty<x<\infty$

$\eta\triangleq\frac{\xi-\mu}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\xi+(-\frac{\mu}{\sigma})$ $\quad a=\frac{1}{\sigma},\ b=-\frac{\mu}{\sigma}$

$$q(y)=\frac{1}{|a|}p(\frac{y-b}{a})=\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{[\sigma(y+\frac{\mu}{\sigma})-\mu]^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow\eta=\frac{\xi-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

例：$\eta=e^\xi$

$$G(y)=P\{\eta\le y\}=P\{e^\xi\le y\}=\begin{cases}P\{\xi\le\ln y\} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$$

$$q(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$$

例：设$\xi\sim N(0,1)$，求$\eta=\xi^2$的密度函数$q(y)$

$$G(y)=P\{\eta<y\}=P\{\xi^2<y\}=\begin{cases}P\{-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y}\} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$$

$$=2\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$q(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & y\le0\end{cases}$$

例：设X的密度函数为$p_X(x)$，求$Y=\sin X$的概率分布

解 $F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\sin X<y\}=\begin{cases}0 & y\le -1\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\{2k\pi-(\pi+\arcsin y)\le X<2k\pi+\arcsin y\} & -1<y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$

$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2k\pi-(\pi+\arcsin y)}^{2k\pi+\arcsin y} p_X(x)dx$

$p_X(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi^2} & 0<x<\pi\\ 0 & 其他\end{cases}$

$Y=\sin X$

$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx & 0<y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$

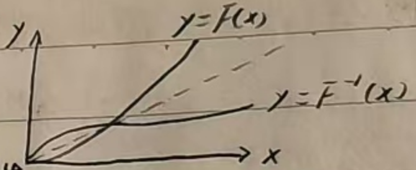
$=\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2+1-\left(\frac{\pi-\arcsin y}{\pi}\right)^2$

$q(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & 0<y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

②变换法：ppt 15.

均匀分布的应用.

①分布函数的单调逆函数



(1) $F(x)$ 与 $F^{-1}(x)$ 相同单调性和连续性

(2) 分布函数只有非降性和右连续性 $\xrightarrow{\text{推广}F^{-1}(x)}$

定义：若随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，$\forall y\in[0,1]$，定义 $F^{-1}(y)=\inf\{x: F(x)>y\}$ 为分布函数 $F(x)$ 的单调逆函数

性质1：当 $F(x)$ 是严格上升的连续函数时，它的单调逆就是普遍的反函数

性质2：单调不降.

性质3：$\forall y\in(0,1)$ 有 $F(F^{-1}(y))\le y$，当 $F(x)$ 在点 $F^{-1}(y)$ 连续时等号成立.

性质4：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $F^{-1}(F(x))\ge x$，严格不等号有时成立

推论：$\forall y\in(-\infty,+\infty)$ 以及 $\forall y\in(0,1)$，有

(a) $F^{-1}(y)\ge x \iff y\ge F(x)$

(b) $F^{-1}(y)<x \iff y<F(x)$

性质5：$F^{-1}(y)$ 在任意点 $y\in(0,1)$ 处均右连续

②均匀分布的特殊地位

命题：ξ 的分布函数 $F(x)$，且 $F(x)$ 为连续函数，则 $\eta=F(\xi)$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布

$\forall x\in[0,1]$ $\xrightarrow{\eta=F(\xi)\text{的分布函数}}$ $P\{\eta<x\}=P\{F(\xi)<x\}=P\{\xi<F^{-1}(x)\}=F(F^{-1}(x))=x$

命题：$F(x)$ 为分布函数，η 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则随机变量 $\xi=F^{-1}(\eta)$ 以 $F(x)$ 为分布函数

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $\xrightarrow{\xi=F^{-1}(\eta)\text{的分布函数}}$ $P\{\xi<x\}=P\{F^{-1}(\eta)<x\}=P\{\eta<F(x)\}=F(x)$

随机变量的存在性定理.

定理：若 $F(x)$ 是右连续的单调不降函数，且 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，则存在一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 及其上的随机变量 $\xi(\omega)$，使 $\xi(\omega)$ 的分布函数正好是 $F(x)$.

三、随机向量的函数的分布律

△设$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的密度函数为$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若随机变量$\eta=g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则$\eta$的分布函数为

$$G(y)=P\{\eta<y\}=P\{g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)<y\}=\int\cdots\int_{g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)<y} p(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=G'(y)$$

△和的分布

定理：$(X,Y)\to p(x,y)$，则$Z=X+Y$的密度函数为：

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)dy$$

特别地，当X、Y相互独立时有 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy$

$$G(z)=P\{Z<z\}=P\{X+Y<z\}=\iint_{x+y<z}p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy\right)dx$$

$$p_Z(z)=\frac{d}{dz}G(z)=\sim$$

△商、差、积的分布

定理：$(X,Y)\to p(x,y)$，则$Z_1=\frac{X}{Y}$，$Z_2=X-Y$，$Z_3=XY$的密度函数分别为

$$p_{Z_1}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot p(zy,y)dy$$

$$p_{Z_2}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}p(y+z,y)dy$$

$$p_{Z_3}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}p(x,\frac{z}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}p(\frac{z}{y},y)dy$$

$Z_1=\frac{X}{Y}$时 $G(z)=P\{Z_1<z\}=P\{\frac{X}{Y}<z\}=\iint_{\frac{x}{y}<z}p(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{yz}p(x,y)dx\right)dy+\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{zy}^{+\infty}p(x,y)dx\right)dy$

△顺序统计量的分布

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$的n个相互独立的随机变量，具有相同的分布函数$F(x)$和密度函数$p(x)$

对$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本$x_1,x_2,\cdots,x_n$，将其由小到大排序为$X_{min}<X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}=X_{max}$

$X_{(k)}$：第k个顺序统计量

定理：设X、Y相互独立，分布函数分别为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，则$\xi=\max\{X,Y\}$与$\eta=\min\{X,Y\}$的分布函数分别为$F_\xi(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$$F_\eta(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

证：$F_\xi(z)=P\{\xi<z\}=P\{\max\{X,Y\}<z\}=P\{X<z,Y<z\}=P\{X<z\}\cdot P\{Y<z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$F_\eta(z)=P\{\eta<z\}=P\{\min\{X,Y\}<z\}=1-P\{\min\{X,Y\}\ge z\}=$

推广到n个 …

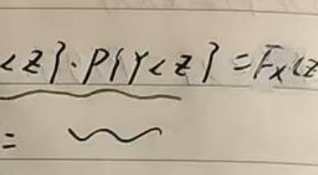
特别地当$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且具有相同的$F_X(x)$时，则 $F_\xi(z)=[F_X(z)]^n$

$F_\eta(z)=1-[1-F_X(z)]^n$

(ξ,η)的联合分布（$\xi=\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$，$\eta=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$ $\Rightarrow \xi\ge\eta$）

(ξ,η)的联合分布函数

$$G(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\}=\begin{cases}P\{\xi<x\} & x\le y\\ P\{\xi<x\}-P\{\xi<x,\eta\ge y\} & x>y\end{cases}$$



$$=\begin{cases}[F(x)]^n & x\le y\\ [F(x)]^n-[F(x)-F(y)]^n & x>y\end{cases}$$

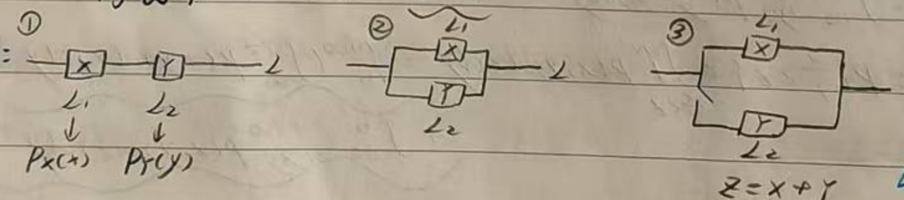
(ξ,η)的联合概率密度函数

$$q(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}G(x,y)=\begin{cases}0 & x\le y\\ n(n-1)[F(x)-F_Y]^{n-2}p(x)p(y) & x>y\end{cases}$$

极差$R=\xi-\eta$的分布　由上页可知

$$p_R(r)=\begin{cases}0 & r\le 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}p(x,x-r)dx & r>0\end{cases}=\int_{-\infty}^{+\infty}n(n-1)[F(x)-F(x-r)]^{n-2}p(x)p(x-r)dx$$

例：



可知X、Y独立

$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

① $Z=\min\{X,Y\}\Rightarrow p_Z(z)=p_X(z)\cdot[1-F_Y(z)]+p_Y(z)\cdot[1-F_X(z)]$

② $Z=\max\{X,Y\}\Rightarrow p_Z(z)=p_X(z)\cdot F_Y(z)+p_Y(z)\cdot F_X(z)$

③ $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy$ ← 由上页可知

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$ 假定偏导数存在且连续

四、连续型随机向量的变换 $\Rightarrow y_i = g_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

$\Delta\ G(y_1, y_2, \cdots, y_m) = P\{\eta_1 < y_1, \eta_2 < y_2, \cdots, \eta_m < y_m\} = \int\cdots\int_{\substack{y_1<y_1 \\ \vdots \\ y_m<y_m}} p(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

$q(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases} p(x_1, x_2, \cdots, x_n)|J| & (y_1, y_2, \cdots, y_n) 属于 (g_1, g_2, \cdots g_n) 的值域 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

例：$(\xi_1, \xi_2) \to p(x_1, x_2)$，而 $\begin{cases} \eta_1 = a\xi_1 + b\xi_2 \\ \eta_2 = c\xi_1 + d\xi_2 \end{cases}$ 且 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$，求 (η_1, η_2) 的密度函数

解：设 $\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{d}{\Delta} y_1 - \frac{b}{\Delta} y_2 \\ x_2 = -\frac{c}{\Delta} y_1 + \frac{a}{\Delta} y_2 \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} = \frac{1}{ad-bc}$

$q(y_1, y_2) = p(x_1, x_2)|J| = \frac{1}{|ad-bc|} \cdot p(\quad , \quad)$

① $p_\xi(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$

$p_\eta(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$

例：设 ξ, η 相互独立，且 $\xi \sim \chi_m^2$，$\eta \sim \chi_n^2$，求 $\alpha = \xi + \eta$，$\beta = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{n}{m}$ 的联合密度函数 $q(u, v)$

解：② 因 ξ, η 相互独立，则 $p(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$

③ $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{y} \cdot \frac{n}{m} \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{muv}{n+mv} \\ y = \frac{nu}{n+mv} \end{cases}$

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{m}{n} \cdot \frac{u}{(1 + \frac{m}{n} v)^2}$

④ $q(u, v) = p(x, y)|J| = (\quad)(\quad) \to \beta \sim F_{m,n}$，$\alpha \sim \chi_{m+n}^2$

不同，则增补变量

Δ 增补变量法：例：设 ξ, η 相互独立，$\xi \sim N(0,1)$，$\eta \sim \chi_n^2$，求 $T = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}}$ 的密度函数

解 $\begin{cases} \xi \sim N(0,1) \Rightarrow p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \eta \sim \chi_n^2 \Rightarrow p_\eta(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \end{cases} \longrightarrow p(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y) =$

引入增补变量 $s = y$

$\begin{cases} s = y \\ t = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \end{cases} \to \begin{cases} x = t \cdot \sqrt{\frac{s}{n}} \\ y = s \end{cases} \to J = -\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$q(s, t) = p(x, y)|J| = \cdots$

$p_T(t) = \int_0^{+\infty} q(s, t)\, ds = \cdots$

看 s 的取值

五、随机变量的函数的独立性

定义：$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 相互独立 $\longrightarrow f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \cdots, f_n(\xi_n)$ 相互独立（f_i 是任意一元 Borel 函数）

证：$P\{f_1(\xi_1)\in A_1, f_2(\xi_2)\in A_2, \cdots, f_n(\xi_n)\in A_n\}$

$=P\{\xi_1\in f_1^{-1}(A_1), \xi_2\in f_2^{-1}(A_2), \cdots, \xi_n\in f_n^{-1}(A_n)\}$

$=P\{\xi_1\in f_1^{-1}(A_1)\}P\{\xi_2\in f_2^{-1}(A_2)\}\cdots P\{\xi_n\in f_n^{-1}(A_n)\}$

$=P\{f_1(\xi_1)\in A_1\}P\{f_2(\xi_2)\in A_2\}\cdots P\{f_n(\xi_n)\in A_n\}$

例：设 ξ, η 相互独立，均服从标准正态分布 $N(0,1)$，试证化为极坐标后，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 及 $\phi=\arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$（取值于 $[0,2\pi]$）是相互独立的随机变量

解：①
$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=r$$

②
$$\begin{cases} \xi\sim N(0,1) \\ \eta\sim N(0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \\ p_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \end{cases} \xrightarrow{\xi,\eta\text{相互独立}} p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

③ $q(r,\theta)=p(x,y)|J|=\cdots$

$q_\rho(r)=\int_0^{2\pi}q(r,\theta)d\theta=re^{-\frac{r^2}{2}} \quad r\geq0$

$q_\phi(\theta)=\int_0^{+\infty}q(r,\theta)dr=\frac{1}{2\pi} \quad 0\leq\theta\leq2\pi$

④ $q(r,\theta)=q_\rho(r)q_\phi(\theta)$ 相互独立

例：
$$\begin{cases} u_1\sim U[0,1] \\ u_2\sim U[0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{u_1}(x_1)=1 & x_1\in[0,1] \\ p_{u_2}(x_2)=1 & x_2\in[0,1] \end{cases} \xrightarrow[\text{相互独立}]{u_1,u_2} p(x_1,x_2)=p_{u_1}(x_1)p_{u_2}(x_2)=1$$

判定数学期望存在性 $\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot p_k < \infty$ ☆☆ ☆☆

§4.1 数学期望/均值

定义：ξ的分布律为 ξ x_1 x_2 $\cdots$ x_k $\cdots$

$P\{\xi=x_i\}$ p_1 p_2 $\cdots$ p_k $\cdots$

$E(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ ☆☆

△几种重要的离散型分布的期望.

①Bernoulli分布

X	0	1
p_i	$1-p$	p

$E(X) = 0\times(1-p)+1\times p = p$

②二项分布：$X\sim b(n,p) \Rightarrow p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$

$E(X)=np = \sum_{k=0}^{n} k\cdot p_k$

③Poisson分布：$X\sim P(\lambda) \Rightarrow P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$

$E(X)=\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}$

④几何分布 $\Rightarrow P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,3,\cdots$

$E(X)=\frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(1-p)^{k-1}p = -p\sum_{k=1}^{\infty}[(1-p)^k]' = -p\left[\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k\right]'$

$\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p}$

例：血液化验：N个人，比较两种方式.

①单独化验：N次 $\rightarrow N$

②分组化验：k人混合化验，阴性：一次；阳性：对k个人再单独化验，共k+1次

$\nearrow 1-p$ $\nearrow p$

思路：

ξ	1	$k+1$
p_i	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$E(\xi) = (k+1) - k\cdot(1-p)^k$

分组化验需的平均次数：$\frac{N}{k}E(\xi)$

例：博彩

定义：$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x)dx$

四连续型场合

△几种重要的连续型分布的期望

①均匀分布：$X\sim U[a,b]\Rightarrow p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & 其它\end{cases}$

$E(x)=\frac{a+b}{2}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p_X(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx$

②指数分布：$E\sim Exp(\lambda)\Rightarrow p_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$E(x)=\frac{1}{\lambda}=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$

③正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(x)=\mu$

（柯西分布）

④Cauchy分布 $\Rightarrow p_\xi(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\quad -\infty<x<+\infty\Rightarrow\xi$的数学期望不存在

见上页

$E(|\xi|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot p_\xi(x)dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\infty$

⑤Gamma分布：$X\sim\Gamma(r,\lambda)\Rightarrow p_X(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$E(x)=\frac{r}{\lambda}$

五、一般场合

适合所有随机变量的数学期望的定义

定义：$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dF(x)$ 　　与数分积分类似

①$F(x)$可微，则$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x)dx$

②$F(x)$为跳跃函数，则$E(\xi)=\sum_i x_i\cdot p_i$

③$\int_{-\infty}^{+\infty}[ag_1(x)+bg_2(x)]dF(x)=a\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(x)dF(x)+b\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(x)dF(x)$

④$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)d[aF_1(x)+bF_2(x)]$ //

⑤$\int_a^b g(x)dF(x)=\int_a^c g(x)dF(x)+\int_c^b g(x)dF(x)\quad(a\le c\le b)$

⑥若$g(x)\ge 0$，$F(x)$单调不减，$b>a$，则$\int_a^b g(x)dF(x)\ge 0$

六、随机变量的数学期望

定理：$\eta=g(\xi) \Rightarrow E(\eta)=E[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dF_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_\xi(x)$ 成。

△离散型场合：$E[g(\xi)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\cdot p_\xi(x_i)$

ξ的分布列：

$\eta=g(\xi)$的分布列：

△连续型场合：$E[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_\xi(x)dx$

例：

七、多维场合

二维：$E(\eta)=E[g(\xi_1,\xi_2)]=\begin{cases}\text{离散型}: \sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}\\ \text{连续型}: \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)p_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy\end{cases}$

定义：$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的数学期望为$(E(\xi_1),E(\xi_2),\cdots,E(\xi_n))$

例：(ξ,η)的联合分布律为

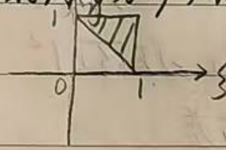
求$\zeta=\sin\frac{\pi(\xi+\eta)}{2}$的$E(\zeta)$

η \ ξ	0	1	2
0	0.10	0.15	0.15
1	0.25	0.20	0.15

解：$E(\zeta)=E\{\sin\frac{\pi(\xi+\eta)}{2}\}=0.10\times\sin\frac{\pi(0+0)}{2}+\cdots+0.15\times\sin\frac{\pi(2+1)}{2}=0.25$

例：(ξ,η)服从以$(0,1)$，$(1,0)$和$(1,1)$为顶点的三角形区域上的均匀分布，求$\zeta=\xi+\eta$的$E(\zeta)$

解：(ξ,η)的联合密度：$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S}=2 & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$



$E(\zeta)=E(\xi+\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)\,dxdy=\frac{4}{3}$

八、数学期望的基本性质

性质1：若$a\le\xi\le b$，则$a\le E(\xi)\le b$（若c为常数，则$E(c)=c$）

性质2（单调性）：$\xi\le\eta$ 几乎处处成立，则$E(\xi)\le E(\eta)$

性质3：$E(\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i+b)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(\xi_i)+b$

性质4：$E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=E(\xi_1)+E(\xi_2)+\cdots+E(\xi_n)$

性质5：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，则$E(\xi_1\cdot\xi_2\cdot\cdots\cdot\xi_n)=E(\xi_1)E(\xi_2)\cdots E(\xi_n)$

例：$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\xi_0\sim N(0,1)\Rightarrow E(\xi_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overbrace{x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}^{\text{奇函数}}dx=0$

令$\xi_0=\frac{\xi-\mu}{\sigma}$ 则$\xi=\mu+\sigma\xi_0$

$E(\xi)=\mu+\sigma E(\xi_0)=\mu$

(有放回抽样)　　(不放回抽样)

例. 二项分布 → 超几何分布

$E(\xi)=np$

§4.2 方差、相关系数、矩

一、方差

$D(\xi)=E\{[\xi-E(\xi)]^2\}$

$=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$

$E(2\xi E(\xi))=2E(\xi)E(\xi)$　常数

证：$D(\xi)=E\{\xi^2-2\xi E(\xi)+[E(\xi)]^2\}$

$=E(\xi^2)-2E(\xi)E(\xi)+[E(\xi)]^2$

$=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$

推论：(1) $E(\xi^2)=D(\xi)+[E(\xi)]^2$

(2) $E(\xi^2)\geq[E(\xi)]^2$

常见分布的方差

①Bernoulli 分布

x	0	1
p_i	$1-p$	p

$D(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=p-p^2$　　$E(x)=p$

$=p(1-p)$

②二项分布：$X\sim b(n,p)$

$D(x)=np(1-p)$ (证)　　$E(x)=np$

③Poisson 分布：$X\sim P(\lambda)$

$D(x)=\lambda$　　$E(x)=\lambda$

④均匀分布：$X\sim U[a,b]$　　$p_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leq x\leq b\\ 0 & 其它\end{cases}$　$\Rightarrow E(x)=\frac{a+b}{2}$

$D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$ ☆

⑤指数分布：$X\sim Exp(\lambda)$

$D(x)=\frac{1}{\lambda^2}$　　$E(x)=\frac{1}{\lambda}$

⑥正态分布：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$D(x)=\sigma^2$　　$E(x)=\mu$

$X\sim N(0,1)$　$E(x)=\mu=0$　$D(x)=\sigma^2=1$

方差的基本性质

① C为常数，则$D(C)=0$

② $D(\xi+C)=D(\xi)$

③ $D(C\xi)=C^2D(\xi)$ ☆

④ 若$C\neq E(\xi)$，则$D(\xi)<E[(\xi-C)^2]$

$D(\xi)=E\{[\xi-E(\xi)]^2\}$

$=E\{[\xi-C-(E(\xi)-C)]^2\}$

$=E[(\xi-C)^2]-[E(\xi)-C]^2$

$<E[(\xi-C)^2]$

⑤ $D(\xi)=0 \Leftrightarrow P\{\xi=C\}=1$ ☆

⑥ 若ξ, η相互独立，则$D(\xi\pm\eta)=D(\xi)+D(\eta)$

$D(\xi+\eta)=E[(\xi+\eta)^2]-[E(\xi+\eta)]^2=E[\xi^2+2\xi\eta+\eta^2]-[E(\xi)+E(\eta)]^2$ ☆☆

$=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2+\underbrace{2E(\xi\eta)-2E(\xi)E(\eta)}_{=0}+E(\eta^2)-[E(\eta)]^2=D(\xi)+D(\eta)+2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

$=D(\xi)+D(\eta)$

推广：若$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$相互独立，则$D(C_1\xi_1+C_2\xi_2+\cdots+C_n\xi_n)=C_1^2D(\xi_1)+C_2^2D(\xi_2)+\cdots+C_n^2D(\xi_n)$

例 (ppt 18)

随机变量的标准化

$\xi^*=\dfrac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}$ ☆ 为ξ的标准化随机变量.

目的：将$E(\xi)$变换为0，$D(\xi)$变换为1

二、切比雪夫不等式 (Chebyshev)

存在有限$D(\xi)$与$E(\xi)$

$\forall\varepsilon>0$ 有 $P\{|\xi-E(\xi)|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$ ☆☆

$\left(D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(\xi)]^2\,dF_\xi(x)\right)$ $F_\xi(x)$为ξ的分布函数

等价形式：$P\{|\xi-E(\xi)|<\varepsilon\}\geq1-\dfrac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$ / $P\left\{\left|\dfrac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\right|\geq\delta\right\}\leq\dfrac{1}{\delta^2}$

特别：若$D(\xi)=0$，则$\forall\varepsilon>0$，恒有

$P\{|\xi-E(\xi)|\geq\varepsilon\}=0\Rightarrow P\{\xi\neq E(\xi)\}=0\Rightarrow P\{\xi=E(\xi)\}=1$（$E(\xi)$→常数）

方差为0的随机变量为常数 ☆

$P\{|\xi-E(\xi)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$

3σ法则：$\sigma^2\triangleq D(\xi)$，$\sigma=\sqrt{D(\xi)}$，$\mu\triangleq E(\xi)$

$P\{|\xi-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow\begin{cases}P\{|\xi-\mu|\leq\sigma\}\geq 0 & \varepsilon=\sigma\\ P\{|\xi-\mu|\leq 2\sigma\}\geq 0.75 & \varepsilon=2\sigma\\ P\{|\xi-\mu|\leq 3\sigma\}\geq 0.8889 & \varepsilon=3\sigma\end{cases}$

三、相关系数

$=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)$

定义：$cov(\xi,\eta)\triangleq E\{[\xi-E(\xi)][\eta-E(\eta)]\}$　（ξ与η的协方差）

$cov(\xi,\eta)>0$ 正相关　$cov(\xi,\eta)<0$ 负相关　$cov(\xi,\eta)=0$ 不相关

协方差的性质

① $cov(X,X)=D(X)$

② $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

③ $cov(aX,bY)=ab\,cov(X,Y)$

④ $cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$

⑤ 若X、Y相互独立，则$cov(X,Y)=0$

⑥ C为常数，则$cov(X,C)=0$

$cov(a+\xi,b+\eta)$
$=cov(\xi,\eta)$

和的方差公式

① $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$

证 $D(X-Y)=E\{[(X-Y)-E(X-Y)]^2\}=E\{[(X-E(X))-(Y-E(Y))]^2\}$

$=E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]-2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$=D(X)+D(Y)-2cov(X,Y)$

② 推广：$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i,j}cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+\sum_{i\neq j}cov(X_i,X_j)$

$=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}cov(X_i,X_j)$

协方差矩阵：

$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\sigma_{ij}=cov(\xi_i,\xi_j)$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$ 记为$D(\xi)$

Σ为对称矩阵 且非负定矩阵. $\det\Sigma=|\Sigma|\geq 0$

$\rho\triangleq\dfrac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}$ 为ξ与η的相关系数.

而$\xi^*=\dfrac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}$，$\eta^*=\dfrac{\eta-E(\eta)}{\sqrt{D(\eta)}}$

ξ与η的相关系数是其标准化的随机变量ξ^*与η^*的协方差

$$cov(\xi^*,\eta^*)=cov\left(\frac{\xi-E(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}},\frac{\eta-E(\eta)}{\sqrt{D(\eta)}}\right)=\frac{cov(\xi-E(\xi),\eta-E(\eta))}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=\rho$$

例：设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)$服从多项分布，求各分量之间的相关系数

$$P\{\xi_1=k_1,\xi_2=k_2,\cdots,\xi_r=k_r\}=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$$

$$\rho_{ij}=\frac{cov(\xi_i,\xi_j)}{\sqrt{D(\xi_i)}\sqrt{D(\xi_j)}}=-\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}$$

相关系数的性质

定理：(Cauchy-Schwarz不等式)

对ξ与η，若$E(\xi^2)<+\infty$，$E(\eta^2)<+\infty$，则有$|E(\xi\eta)|^2\leq E(\xi^2)\cdot E(\eta^2)$

当且仅当存在某一常数c使得$P\{\eta=c\xi\}=1$成立

性质1：$|\rho|\leq 1$

$\rho=0$则ξ与η线性不相关

不相关性就线性关系而言，独立性就一般关系而言

$\rho_{\xi\eta}$ | ρ

性质2：$cov(\xi,\eta)=0 \xLeftrightarrow{\rho=0}$ ξ与η不相关 $\Leftrightarrow E(\xi\cdot\eta)=E(\xi)E(\eta) \Leftrightarrow D(\xi+\eta)=D(\xi)+$

性质3：ξ与η独立，则ξ与η不相关 可能存在其它关系

例：

性质4：X与Y服从二元正态分布，则X与Y的独立性和不相关性是等价的

性质5：ξ与η都是二值变量 → 只有两种可能取值的随机变量

推论1：对事件A与B：

$$\rho_{AB}=\rho_{I_A I_B}=\frac{P(AB)-P(A)\cdot P(B)}{\sqrt{P(A)\cdot P(\bar{A})\cdot P(B)\cdot P(\bar{B})}}$$

A与B独立 $\Leftrightarrow \rho_{AB}=0$

推论2：$|P(AB)-P(A)P(B)|\le \frac{1}{4}$

四矩

常见矩 $\begin{cases}\text{原点矩}\\ \text{中心矩}\end{cases}$

定义：对$k\in N^+$，$m_k=E(\xi^k)$，$k=1,2,3\cdots$ $\rightarrow E(|\xi|^k)$

ξ的k阶原点矩 ($E(\xi)$：一阶原点矩) k阶原点绝对矩

定义：对$k\in N^+$，$c_k=E\{[\xi-E(\xi)]^k\}$，$k=2,3,\cdots$ $\rightarrow E(|\xi-E(\xi)|^k)$ 使用较少

ξ的k阶中心矩 ($D(\xi)$：二阶中心矩) k阶中心绝对矩

定理：中心矩和原点矩可以相互表示

可定义混合矩：

$E\{[\xi-E(\xi)]^k[\eta-E(\eta)]^l\}$ 称为k+l阶混合中心矩，协方差是二阶混合中心矩

例：设$\xi\sim N(0,\sigma^2)$，求ξ的k阶原点矩和k阶中心矩

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<+\infty \Rightarrow E(\xi)=0$

$$c_k=E[(\xi-E(\xi))^k]=E(\xi^k)=m_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\begin{cases}0 & k\text{为奇数}\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx & \end{cases}$$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\cdot\Gamma(\frac{k+1}{2})$ k为偶数

$=\sigma^k(k-1)(k-3)\cdots3\cdot1$

推广：设$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$c_k=\begin{cases}0 & k\text{为奇数}\\ \sigma^k(k-1)(k-3)\cdots3\cdot1 & k\text{为偶数}\end{cases}$$

$$m_k=E(\xi^k)=E\{[(\xi-m_1)+m_1]^k\}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}c_{k-i}\mu^i$$

五、条件数学期望(具有数学期望的所有性质)

离散型

$$E(\xi|\eta=y_j)=\sum_i x_i P\{\xi=x_i|\eta=y_j\}=\sum_i x_i\frac{p(x_i,y_j)}{p_2(y_j)}$$ ☆☆

连续型

$$E(\eta|\xi=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p(y|x)dy$$ ☆ $\rightarrow p_\xi(x)$

例：设ξ,η服从二元正态分布 $(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$(\eta|\xi=x)\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

$$\Rightarrow E(\eta|\xi=x)(=\mu)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$\Rightarrow E(\eta|\xi)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\xi-\mu_1)\sim N(\mu_2,\rho^2\sigma_2^2)\ ?$$

$p(x,y)=p_\eta(y)\cdot p_{\xi|\eta}(x|y)$

定理：(重期望公式)(ξ,η)，且$E\xi$存在，则有 $E(\xi)=E[E(\xi|\eta)]$ ☆

应用：

$$E(\xi)=\sum_j E(\xi|\eta=y_j)\cdot P\{\eta=y_j\}$$

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\xi|\eta=y)\cdot p_\eta(y)dy$$

提供了在大范围求平均的思想方法：两次平均法.

互相唯一确定.

只与 有关

§4.5 特征函数(完全决定分布函数) 可称为:某一分布函数的特征函数

一、特征函数的定义

定义: $\zeta=\xi+i\eta$ 复随机变量.

若(ξ_1,η_1)与(ξ_2,η_2)相互独立 则 $\zeta_1=\xi_1+i\eta_1$与$\zeta_2=\xi_2+i\eta_2$相互独立

△ $E(\zeta)=E(\xi)+iE(\eta)$

△ $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$相互独立,则$E(\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_n)=E(\zeta_1)E(\zeta_2)\cdots E(\zeta_n)$

△ 若$g(x)$是一元Borel可测函数, $\eta=g(\xi)$,则

$$E(e^{it\eta})=E(e^{it\cdot g(\xi)})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\cdot g(x)}dF_\xi(x)=\begin{cases}\sum_k e^{it\cdot g(x_k)}\cdot p_k & \text{离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\cdot g(x)}p_\xi(x)dx & \text{连续型}\end{cases}$$

△ Euler公式: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

必写

定义: 若ξ的分布函数为$F_\xi(x)$,则称$f_\xi(t)=E(e^{it\xi})=\begin{cases}\sum_k e^{itx_k}\cdot \underbrace{p_k}_{\text{概率}}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\cdot x}\underbrace{p_\xi(x)dx}_{dF_\xi(x)}\end{cases}$ 为ξ的特征函数

$=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\cdot e^{itx_j}$

复值函数 $f_\xi(t)$

△ 因$|e^{itx}|=1$,对任意$t\in R$有意义 ?

一些重要分布的特征函数

① 退化分布 $I_c(x)$: $f(t)=E(e^{it\xi})=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\cdot e^{itx_j}=e^{itc}$

② 二项分布 $b(n,p)$: $f(t)=(pe^{it}+1-p)^n$

③ Poisson分布 $P(\lambda)$: $f(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

④ Γ分布 $\Gamma(r,\lambda)$: $f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$

$r=1$时为指数分布$Exp(\lambda)$: $f(t)=(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$

$r=\frac{n}{2}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, χ_n^2分布: $f(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

二、特征函数的性质

性质1：$|f(t)| \le f(0)=1$，$f(-t)=\overline{f(t)}$

性质2：$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$一致连续

性质3：对$\forall n \in N^+$，以及$\forall t_1,t_2,\cdots,t_n \in R$，$\forall \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \underset{\text{复数}}{C}$，均有$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_k-t_j)\lambda_k\bar{\lambda}_j \ge 0$

性质4：ξ_1与ξ_2相互独立，则$f_{\xi_1+\xi_2}(t)=f_{\xi_1}(t)\cdot f_{\xi_2}(t)$ ⇒ 推广到n个

性质5：ξ的n阶矩存在，则$f_\xi(t)$可微分n次，且当$k\le n$时：$f^{(k)}(0)=i^k E(\xi^k)$

$f(t)=1+(it)E(\xi)+\frac{(it)^2}{2!}E(\xi^2)+\cdots+\frac{(it)^n}{n!}E(\xi^n)+o(t^n)$

性质6：设$\eta=a\xi+b$，则$f_\eta(t)=e^{ibt}\cdot f_\xi(at)$ ☆☆

证：$f_\eta(t)=E(e^{it\eta})=E(e^{it(a\xi+b)})=E(e^{ita\xi}\cdot e^{itb})=\underset{\text{常数}}{e^{itb}}\cdot E(e^{i(ta)\xi})=e^{ibt}f_\xi(at)$

例：求$\underset{\text{正态分布}}{N(\mu,\sigma^2)}$的特征函数。

$f(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ ☆ → $E(\xi)=\mu$，$D(\xi)=\sigma^2$

三、逆转公式与唯一性定理 → $F(x)$由$f(t)$唯一确定

定理（逆转公式）$F(x)$，$f(t)$且x_1、x_2为$F(x)$的连续点

则$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}f(t)\,dt$

定理：若$f(t)$绝对可积，则$F(x)$的导数存在并连续，并且$F'(x)=p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)\,dt$ ☆☆

四、分布函数的再生性 ☆

1：两个具有同一类型分布的独立随机变量之和的分布仍是这种类型的分布，且对应的参数等于两个随机变量相应参数之和

①二项分布：$\xi_1 \sim b(m,p)$，$\xi_2 \sim b(n,p)$ 且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立

则 $\xi_1+\xi_2 \sim b(m+n,p)$

②Poisson分布：$\xi_1 \sim P(\lambda_1)$，$\xi_2 \sim P(\lambda_2)$ 且 ξ_1 与 ξ_2 相互独立

则 $\xi_1+\xi_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$　　可分解：充要条件

③正态分布：$\xi_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\xi_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 ……

则 $\xi_1+\xi_2 \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

④(Gamma分布)：$\xi_1 \sim \Gamma(r_1,\lambda)$，$\xi_2 \sim \Gamma(r_2,\lambda)$ 且 ……

则 $\xi_1+\xi_2 \sim \Gamma(r_1+r_2,\lambda)$

五、多元特征函数

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)}\,dF(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

Chebyshev 不等式：$P\{|\xi-E(\xi)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$

$E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)$

$D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)$

在偶然性与必然之间架起桥梁

§5.1 的Bernoulli试验场合的极限定理.

大数定律 $y_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}$，如果∃常数 a，使 $\forall\varepsilon>0$，恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|y_n-a|<\varepsilon\}=1$

中心极限定理：$E(\xi_i)$，$D(\xi_i)$ 存在，令 $\zeta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)}}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{\zeta_n<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

二、大数定律

chebyshev 不等式

① Bernoulli：设 μ_n 为A发生次数（事件），$p=P\{A\}$，则 $\forall\varepsilon>0$

$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}D(\frac{\mu_n}{n})=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{p(1-p)}{n}$

$\mu_n\sim b(n,p)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$ / $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|\geq\varepsilon\}=0$

$\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}\to0$ $(n\to\infty)$

② Chebyshev 大数定律：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 两两不相关，并 $D(\xi_1)\leq C$，$D(\xi_2)\leq C$，$\cdots$，$D(\xi_n)\leq C$，$\cdots$

则对 $\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)|<\varepsilon\}=1$

无

③ 若，$\frac{1}{n^2}\cdot D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)\to0$，对 $\forall\varepsilon>0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)|<\varepsilon\}=1$

Markov 大数定理律

特殊情形况

推论：(独立同分布下的大数定律)：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，

且 $E(\xi_i)=\mu$，$D(\xi_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots$

$=n\mu$

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mu|<\varepsilon\}=1$ ✓

④ Poisson 大数定律.