

数理统计

第四章

区间估计

2026 年 5 月 6 日

- ① 4.2 枢轴变量法——正态总体参数的置信区间
 - 4.2.3 两个正态总体参数的置信区间
- ② 4.3 枢轴变量法——非正态总体参数的置信区间

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

设 X_1, \dots, X_m 是自正态总体 $N(a, \sigma_1^2)$ 抽取的简单样本, Y_1, \dots, Y_n 是自正态总体 $N(b, \sigma_2^2)$ 抽取的简单样本, 且 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

设 X_1, \dots, X_m 是自正态总体 $N(a, \sigma_1^2)$ 抽取的简单样本, Y_1, \dots, Y_n 是自正态总体 $N(b, \sigma_2^2)$ 抽取的简单样本, 且 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

设 \bar{X} , \bar{Y} 和 S_1^2 , S_2^2 分别为这两组样本的样本均值和样本方差, 其中

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 / (m - 1), \quad S_2^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 / (n - 1)$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

设 X_1, \dots, X_m 是自正态总体 $N(a, \sigma_1^2)$ 抽取的简单样本, Y_1, \dots, Y_n 是自正态总体 $N(b, \sigma_2^2)$ 抽取的简单样本, 且 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

设 \bar{X} , \bar{Y} 和 S_1^2 , S_2^2 分别为这两组样本的样本均值和样本方差, 其中

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 / (m - 1), \quad S_2^2 = \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 / (n - 1)$$

下面讨论两个正态总体均值差和方差比的置信区间问题。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

1. 均值差 $b - a$ 的置信区间

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

1. 均值差 $b - a$ 的置信区间

(1) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时, 令

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

1. 均值差 $b - a$ 的置信区间

(1) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时, 令

$$\begin{aligned} S_{\omega}^2 &= \frac{1}{m+n-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] \\ &= \frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right], \end{aligned}$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

显然, $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $b - a$ 的无偏估计, 且由推论2.3.4知

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

显然, $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $b - a$ 的无偏估计, 且由推论2.3.4知

$$T_{\omega} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_{\omega}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2},$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

显然, $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $b - a$ 的无偏估计, 且由推论2.3.4知

$$T_{\omega} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_{\omega}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2},$$

T_{ω} 的表达式与 $b - a$ 有关, 但其分布与 $b - a$ 无关。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

显然, $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $b - a$ 的无偏估计, 且由推论2.3.4知

$$T_{\omega} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_{\omega}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2},$$

T_{ω} 的表达式与 $b - a$ 有关, 但其分布与 $b - a$ 无关。

取 T_{ω} 为枢轴变量, 故有

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

显然, $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $b - a$ 的无偏估计, 且由推论2.3.4知

$$T_{\omega} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_{\omega}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{m+n-2},$$

T_{ω} 的表达式与 $b - a$ 有关, 但其分布与 $b - a$ 无关。

取 T_{ω} 为枢轴变量, 故有

$$\begin{aligned} & P(|T_{\omega}| \leq t_{m+n-2}(\alpha/2)) \\ &= P\left(\left|\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_{\omega}}\right| \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \leq t_{m+n-2}(\alpha/2)\right) \\ &= 1 - \alpha, \end{aligned}$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

由上式括号中不等式的等价变形，可得 $b - a$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

由上式括号中不等式的等价变形，可得 $b - a$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \right. \\ \left. \bar{Y} - \bar{X} + S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right],$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

由上式括号中不等式的等价变形, 可得 $b - a$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \right. \\ \left. \bar{Y} - \bar{X} + S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right],$$

其单侧置信上、下限为 $\bar{Y} - \bar{X} \pm S_{\omega} t_{m+n-2}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, 其中“+”是置信上限。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.3

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.3

上面讨论的是两个正态总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 但未知的情形。如果两个正态总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，如何求其均值差 $b - a$ 的置信区间？（作业）

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.3

上面讨论的是两个正态总体方差 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 但未知的情形。如果两个正态总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，如何求其均值差 $b - a$ 的置信区间？（作业）

另一个问题：设两个正态总体的方差 σ_1^2 和 σ_2^2 未知、且不假定二者相等，但假定从两个正态总体中分别抽取样本的样本容量 $m = n$ ，此时如何求两个正态总体均值差 $b - a$ 的置信区间？（作业）

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间性

例 (4.2.5)

某公司利用两条自动化流水线罐装矿泉水。现从生产线上抽取样本 X_1, \dots, X_{12} 和 Y_1, \dots, Y_{17} ，它们是每瓶矿泉水的体积（单位：mL）。算得样本均值 $\bar{X} = 501.1$ ， $\bar{Y} = 499.7$ ；样本方差 $S_1^2 = 2.4$ ， $S_2^2 = 4.7$ 。假设这两天流水线所装的矿泉水的体积分别服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 和 $N(b, \sigma^2)$ ，试求 $b - a$ 置信系数为0.95的置信区间。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\bar{Y} - \bar{X} = -1.4$,

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\bar{Y} - \bar{X} = -1.4$,

$$S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{11 \times 2.4 + 16 \times 4.7}{12 + 17 - 2} = 3.763,$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\bar{Y} - \bar{X} = -1.4$,

$$S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{11 \times 2.4 + 16 \times 4.7}{12 + 17 - 2} = 3.763,$$

于是 $S_w = 1.94$, 查表求得 $t_{m+n-2}(\alpha/2) = t_{27}(0.025) = 2.05$, 算得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\bar{Y} - \bar{X} = -1.4$,

$$S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{11 \times 2.4 + 16 \times 4.7}{12 + 17 - 2} = 3.763,$$

于是 $S_w = 1.94$, 查表求得 $t_{m+n-2}(\alpha/2) = t_{27}(0.025) = 2.05$, 算得

$$S_w t_{m+n-2}(\alpha/2) \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 1.94 \times 2.05 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{17}} = 1.50.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

因此 $b - a$ 的95%的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

因此 $b - a$ 的 95% 的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + S_{\omega} t_{m+n-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right]$$
$$= [-2.9, 0.1].$$

□

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(2) 当 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知时, 求 $b - a$ 的置信区间问题。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(2) 当 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知时, 求 $b - a$ 的置信区间问题。

这是著名的Behrens-Fisher问题。它是Behrens在1929年从实际应用中提出的问题, 它的几种特殊情况已获得圆满解决, 但一般情况至今仍有文献在讨论。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(2) 当 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知时, 求 $b - a$ 的置信区间问题。

这是著名的Behrens-Fisher问题。它是Behrens在1929年从实际应用中提出的问题, 它的几种特殊情况已获得圆满解决, 但一般情况至今仍有文献在讨论。

Fisher 首先研究了这个问题, 并对一般情况给出近似解法。随后许多著名统计学家, 如Scheffe 和Welch等也研究了这个问题。但至今还得不出简单、精确的解法, 只提出一些近似的解法。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

下面给出两种近似的结果

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

下面给出两种近似的结果

(i) 当 m 与 n 都充分大时可用大样本方法, 由于

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

下面给出两种近似的结果

(i) 当 m 与 n 都充分大时可用大样本方法, 由于

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1),$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

下面给出两种近似的结果

(i) 当 m 与 n 都充分大时可用大样本方法, 由于

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1),$$

且当 $m \rightarrow \infty$ 时 $S_1^2 \xrightarrow{p} \sigma_1^2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $S_2^2 \xrightarrow{p} \sigma_2^2$, 利用Slutsky定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

下面给出两种近似的结果

(i) 当 m 与 n 都充分大时可用大样本方法, 由于

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1),$$

且当 $m \rightarrow \infty$ 时 $S_1^2 \xrightarrow{p} \sigma_1^2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $S_2^2 \xrightarrow{p} \sigma_2^2$, 利用Slutsky定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\tilde{U} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

因此，取 \tilde{U} 为枢轴变量。当 m, n 充分大时， $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

因此，取 \tilde{U} 为枢轴变量。当 m, n 充分大时， $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}} \right].$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

因此，取 \tilde{U} 为枢轴变量。当 m, n 充分大时， $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间是

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}} \right].$$

其单侧置信上、下限为 $\bar{Y} - \bar{X} \pm u_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}$ ，其中“+”号是置信上限。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(ii) *一般情形，即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知，且 m 和 n 都不是充分大的情形。令

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(ii) *一般情形，即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知，且 m 和 n 都不是充分大的情形。令

$$S_*^2 = \frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(ii) *一般情形，即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知，且 m 和 n 都不是充分大的情形。令

$$S_*^2 = \frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}.$$

取枢轴变量为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

(ii) *一般情形，即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 皆未知，且 m 和 n 都不是充分大的情形。令

$$S_*^2 = \frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}.$$

取枢轴变量为

$$T_* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_*}.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

在一般情况下， T_* 已不服从 t 分布。但与具有适当自由度 r 的 t 分布很接近，其中 r 由下列公式确定：

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

在一般情况下， T_* 已不服从 t 分布。但与具有适当自由度 r 的 t 分布很接近，其中 r 由下列公式确定：

$$r = S_*^4 / \left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)} + \frac{S_2^4}{n^2(n-1)} \right].$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

在一般情况下， T_* 已不服从 t 分布。但与具有适当自由度 r 的 t 分布很接近，其中 r 由下列公式确定：

$$r = S_*^4 / \left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)} + \frac{S_2^4}{n^2(n-1)} \right].$$

r 一般不为整数，可取与其最接近的整数代替之。于是，近似地有

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

在一般情况下， T_* 已不服从 t 分布。但与具有适当自由度 r 的 t 分布很接近，其中 r 由下列公式确定：

$$r = S_*^4 / \left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)} + \frac{S_2^4}{n^2(n-1)} \right].$$

r 一般不为整数，可取与其最接近的整数代替之。于是，近似地有

$$T_* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (b - a)}{S_*} \sim t_r.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

取 T_* 为枢轴变量，运用与前面类似步骤可得 $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

取 T_* 为枢轴变量, 运用与前面类似步骤可得 $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{Y} - \bar{X} - t_r(\alpha/2)S_*, \bar{Y} - \bar{X} + t_r(\alpha/2)S_*].$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

取 T_* 为枢轴变量，运用与前面类似步骤可得 $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{Y} - \bar{X} - t_r(\alpha/2)S_*, \bar{Y} - \bar{X} + t_r(\alpha/2)S_*].$$

其单侧置信上、下限为 $\bar{Y} - \bar{X} \pm t_r(\alpha)S_*$ ，其中“+”号是置信上限。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

取 T_* 为枢轴变量，运用与前面类似步骤可得 $b - a$ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\bar{Y} - \bar{X} - t_r(\alpha/2)S_*, \bar{Y} - \bar{X} + t_r(\alpha/2)S_*].$$

其单侧置信上、下限为 $\bar{Y} - \bar{X} \pm t_r(\alpha)S_*$ ，其中“+”号是置信上限。

这是由Welch在1938年给出的Behrens-Fisher问题的一个近似解法。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

例 (4.2.6)

欲比较甲、乙两种棉花品质的优劣。

现假设用它们纺出的棉纱强度服从 $N(a, \sigma_1^2)$ 和 $N(b, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 。

试验者从这两批棉纱中分别抽取样本 X_1, \dots, X_{120} 和 Y_1, \dots, Y_{60} , 其样本均值和样本方差分别为

$$\bar{X} = 3.3.2, \bar{Y} = 3.76, S_1^2 = 2.18, S_2^2 = 5.76$$

试给出 $a - b$ 的95%的置信区间。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 120$ ， $n = 60$ 都比较大，采用大样本的近似方法求置信区间。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 120$ ， $n = 60$ 都比较大，采用大样本的近似方法求置信区间。

由数据算得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 120$ ， $n = 60$ 都比较大，采用大样本的近似方法求置信区间。

由数据算得

$$\bar{X} - \bar{Y} = -0.44,$$

$$\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n} = \sqrt{2.18/120 + 5.76/60} = 0.338.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 120$ ， $n = 60$ 都比较大，采用大样本的近似方法求置信区间。

由数据算得

$$\begin{aligned}\bar{X} - \bar{Y} &= -0.44, \\ \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n} &= \sqrt{2.18/120 + 5.76/60} = 0.338.\end{aligned}$$

查表求得 $u_{0.025} = 1.96$ ，算得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 120$ ， $n = 60$ 都比较大，采用大样本的近似方法求置信区间。

由数据算得

$$\begin{aligned}\bar{X} - \bar{Y} &= -0.44, \\ \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n} &= \sqrt{2.18/120 + 5.76/60} = 0.338.\end{aligned}$$

查表求得 $u_{0.025} = 1.96$ ，算得

$$u_{\alpha/2} \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n} = 1.96 \times 0.338 = 0.662,$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

可得 $a - b$ 的置信系数近似为0.95的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

可得 $a - b$ 的置信系数近似为 0.95 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}} \right]$$
$$= [-1.102, 0.222].$$



4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

例 (4.2.7)

某厂利用两条自动化流水线装番茄酱罐头，现分别从两条流水线上各随机抽取一组样本： X_1, \dots, X_6 ； Y_1, \dots, Y_7 。分别称重（单位：克）后，算得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

例 (4.2.7)

某厂利用两条自动化流水线装番茄酱罐头，现分别从两条流水线上各随机抽取一组样本： X_1, \dots, X_6 ； Y_1, \dots, Y_7 。分别称重（单位：克）后，算得

$$\bar{X} = 10.6, \bar{Y} = 10.1, S_1^2 = 0.0125, S_2^2 = 0.01.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

例 (4.2.7)

某厂利用两条自动化流水线装番茄酱罐头，现分别从两条流水线上各随机抽取一组样本： X_1, \dots, X_6 ； Y_1, \dots, Y_7 。分别称重（单位：克）后，算得

$$\bar{X} = 10.6, \bar{Y} = 10.1, S_1^2 = 0.0125, S_2^2 = 0.01.$$

假设这两条流水线上所装番茄酱的重量都服从正态分布，其均值分别为 a 和 b ，而方差 σ_1^2 和 σ_2^2 不等，求 $a - b$ 的置信水平近似为0.90的置信区间。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于方差 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 6$ 和 $n = 7$ 都比较小，故采用式

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由于方差 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ，故这是 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量 $m = 6$ 和 $n = 7$ 都比较小，故采用式

$$[\bar{X} - \bar{Y} - t_r(\alpha/2)S_*, \bar{X} - \bar{Y} + t_r(\alpha/2)S_*]$$

计算置信区间。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

经计算

$$S_*^2 = \frac{0.0125}{6} + \frac{0.01}{7} = 0.003512,$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

经计算

$$S_*^2 = \frac{0.0125}{6} + \frac{0.01}{7} = 0.003512,$$

$$S_* = 0.05926,$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

经计算

$$S_*^2 = \frac{0.0125}{6} + \frac{0.01}{7} = 0.003512,$$

$$S_* = 0.05926,$$

$$\begin{aligned} r &= 0.003512^2 / \left(\frac{0.0125^2}{6^2 \times 5} + \frac{0.01^2}{7^2 \times 6} \right) \\ &= 129.35 \approx 129. \end{aligned}$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

经计算

$$S_*^2 = \frac{0.0125}{6} + \frac{0.01}{7} = 0.003512,$$

$$S_* = 0.05926,$$

$$r = 0.003512^2 / \left(\frac{0.0125^2}{6^2 \times 5} + \frac{0.01^2}{7^2 \times 6} \right)$$

$$= 129.35 \approx 129.$$

已知 $\alpha = 0.10$, 查 t 分布表可得 $t_r(\alpha/2) = t_{129}(0.05) = 1.654$,

$\bar{X} - \bar{Y} = 0.5$ 。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故 $a - b$ 的置信水平近似为0.90的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故 $a - b$ 的置信水平近似为 0.90 的置信区间为

$$\begin{aligned} & [\bar{X} - \bar{Y} - t_r(\alpha/2)S_*, \bar{X} - \bar{Y} + t_r(\alpha/2)S_*] \\ & = [0.402, 0.598]. \end{aligned}$$



4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

2. 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

2. 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

首先考虑正态总体均值 a 和 b 未知的情形。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

2. 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

首先考虑正态总体均值 a 和 b 未知的情形。

令 S_1^2 和 S_2^2 由本小节开头的公式给出，显然

$$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{m-1}^2, \quad (n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi_{n-1}^2,$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

2. 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

首先考虑正态总体均值 a 和 b 未知的情形。

令 S_1^2 和 S_2^2 由本小节开头的公式给出，显然

$$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{m-1}^2, \quad (n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi_{n-1}^2,$$

且 S_1^2 , S_2^2 分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 的无偏估计。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

可知

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

可知

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1, n-1}.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

可知

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1, n-1}.$$

F 的表达式与 σ_1^2/σ_2^2 有关，但其分布与 σ_1^2/σ_2^2 无关，故取 F 为枢轴变量。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

找 d_1 和 d_2 , 使得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

找 d_1 和 d_2 , 使得

$$P\left(d_1 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq d_2\right) = 1 - \alpha.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

找 d_1 和 d_2 , 使得

$$P\left(d_1 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq d_2\right) = 1 - \alpha.$$

满足上述要求的 d_1 和 d_2 有无穷多对, 其中存在一对使区间估计精度最高。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

找 d_1 和 d_2 , 使得

$$P\left(d_1 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq d_2\right) = 1 - \alpha.$$

满足上述要求的 d_1 和 d_2 有无穷多对, 其中存在一对使区间估计精度最高。

但这样一对 d_1 和 d_2 常常无显示表达, 需要通过数值方法求得, 使用不方便。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

通常的做法是构造等尾的置信区间，即令 d_1 和 d_2 满足下列要求：

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

通常的做法是构造等尾的置信区间，即令 d_1 和 d_2 满足下列要求：

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < d_1\right) = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > d_2\right) = \frac{\alpha}{2},$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

通常的做法是构造等尾的置信区间，即令 d_1 和 d_2 满足下列要求：

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < d_1\right) = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > d_2\right) = \frac{\alpha}{2},$$

查自由度为 $m-1$, $n-1$ 的 F 分布上侧分位数表易得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

通常的做法是构造等尾的置信区间，即令 d_1 和 d_2 满足下列要求：

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < d_1\right) = \frac{\alpha}{2}, \quad P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > d_2\right) = \frac{\alpha}{2},$$

查自由度为 $m-1$, $n-1$ 的 F 分布上侧分位数表易得

$$d_1 = F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2),$$

$$d_2 = F_{m-1, n-1}(\alpha/2).$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故有

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故有

$$P\left(F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2) \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故有

$$P\left(F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2) \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha.$$

最后利用不等式的等价变形，得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

故有

$$P\left(F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2) \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\right) = 1 - \alpha.$$

最后利用不等式的等价变形，得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}(\alpha/2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)} \right].$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

由于当 α 较小时（如 $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ ）， $F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2)$ 在 F 分布表中无法查到，利用 F 分布的如下性质

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

由于当 α 较小时（如 $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ ）， $F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2)$ 在 F 分布表中无法查到，利用 F 分布的如下性质

$$F_{m,n}(1 - \alpha/2) = \frac{1}{F_{n,m}(\alpha/2)},$$

可以通过查 $F_{n,m}(\alpha/2)$ 将其算得。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

同理可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下、上限分别为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

同理可得到 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下、上限分别为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1, n-1}(\alpha)},$$
$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1, n-1}(1 - \alpha)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot F_{n-1, m-1}(\alpha).$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.4

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.4

上面讨论的是两个正态总体均值 a 和 b 未知时, 方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间问题。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

注 4.2.4

上面讨论的是两个正态总体均值 a 和 b 未知时，方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间问题。

还有另外一个问题，就是当两个正态总体均值 a 和 b 已知时，方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信区间如何求？（作业）

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

例 (4.2.8)

求例 4.2.6 中方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为90%的置信区间。

已知 $X_i \sim i.i.d.N(a, \sigma_1^2)$, $i = 1, \dots, m$,

$Y_j \sim i.i.d.N(b, \sigma_2^2)$, $j = 1, \dots, n$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 。

分别抽取样本 X_1, \dots, X_{120} 和 Y_1, \dots, Y_{60} , 其均值分别

为 $\bar{X} = 3.3.2$, $\bar{Y} = 3.76$, $S_1^2 = 2.18$, $S_2^2 = 5.76$ 。

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由题知 $S_1^2/S_2^2 = 2.18/5.76 = 0.378$ ，查表求得

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由题知 $S_1^2/S_2^2 = 2.18/5.76 = 0.378$ ，查表求得

$$F_{m-1, n-1}(\alpha/2) = F_{119, 59}(0.05) = 1.47,$$

$$F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2) = 1/F_{n-1, m-1}(\alpha/2) = 1/F_{59, 119}(0.05) = 1/1.43.$$

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由题知 $S_1^2/S_2^2 = 2.18/5.76 = 0.378$ ，查表求得

$$F_{m-1, n-1}(\alpha/2) = F_{119, 59}(0.05) = 1.47,$$

$$F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2) = 1/F_{n-1, m-1}(\alpha/2) = 1/F_{59, 119}(0.05) = 1/1.43.$$

则 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 90% 的置信区间为

4.2.3 两个正态总体参数的置信区间

解

由题知 $S_1^2/S_2^2 = 2.18/5.76 = 0.378$ ，查表求得

$$F_{m-1, n-1}(\alpha/2) = F_{119, 59}(0.05) = 1.47,$$

$$F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2) = 1/F_{n-1, m-1}(\alpha/2) = 1/F_{59, 119}(0.05) = 1/1.43.$$

则 σ_1^2/σ_2^2 的置信系数为 90% 的置信区间为

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{m-1, n-1}(\alpha/2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{n-1, m-1}(\alpha/2) \right]$$
$$=[0.257, 0.541].$$

- ① 4.2 枢轴变量法——正态总体参数的置信区间

- ② 4.3 枢轴变量法——非正态总体参数的置信区间
 - 4.3.1 小样本方法
 - 4.3.2 大样本方法

4.3.1 小样本方法

若枢轴变量的精确分布易求得，可用小样本方法获得精确的置信区间；

4.3.1 小样本方法

若枢轴变量的精确分布易求得，可用小样本方法获得**精确**的置信区间；

若枢轴变量的精确分布不易求得，或若其精确分布虽可以求得，但表达式很复杂，使用不方便，则可用枢轴变量的极限分布来构造有关参数**近似**的置信区间。

4.3.1 小样本方法

4.3 节将分别介绍：

4.3.1 小样本方法

4.3 节将分别介绍：

(1) 小样本方法中的指数分布参数的置信区间、均匀分布参数的置信区间；

4.3.1 小样本方法

4.3 节将分别介绍：

(1) 小样本方法中的指数分布参数的置信区间、均匀分布参数的置信区间；

(2) 大样本方法中的Cauchy分布位置参数的置信区间、二项分布参数 p 的置信区间，和泊松分布参数 λ 的置信区间。

4.3.1 小样本方法

1. 指数分布参数的置信区间

4.3.1 小样本方法

1. 指数分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为从指数分布 $Exp(\lambda)$ 中抽取的简单样本，其密度函数为

4.3.1 小样本方法

1. 指数分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为从指数分布 $Exp(\lambda)$ 中抽取的简单样本，其密度函数为

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x), \lambda > 0,$$

4.3.1 小样本方法

1. 指数分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为从指数分布 $Exp(\lambda)$ 中抽取的简单样本，其密度函数为

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x), \lambda > 0,$$

现要求 λ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

4.3.1 小样本方法

因为 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 是 $1/\lambda$ 的一个无偏估计（且是UMVUE，例3.5.3），设想 λ 的置信区间可通过 \bar{X} 表示。

4.3.1 小样本方法

因为 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 是 $1/\lambda$ 的一个无偏估计（且是UMVUE，例3.5.3），设想 λ 的置信区间可通过 \bar{X} 表示。

枢轴变量可取为 $T = 2\lambda n\bar{X}$ ，由推论2.3.1可知

4.3.1 小样本方法

因为 $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ 是 $1/\lambda$ 的一个无偏估计（且是UMVUE，例3.5.3），设想 λ 的置信区间可通过 \bar{X} 表示。

枢轴变量可取为 $T = 2\lambda n\bar{X}$ ，由推论2.3.1可知

$$2\lambda n\bar{X} = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{2n}^2.$$

4.3.1 小样本方法

确定 a, b 使得

4.3.1 小样本方法

确定 a, b 使得

$$P(a \leq 2\lambda n \bar{X} \leq b) = 1 - \alpha.$$

4.3.1 小样本方法

确定 a, b 使得

$$P(a \leq 2\lambda n \bar{X} \leq b) = 1 - \alpha.$$

使上式成立的 a, b 有很多对，其中存在一对，使置信区间的长度最短。

4.3.1 小样本方法

确定 a, b 使得

$$P(a \leq 2\lambda n \bar{X} \leq b) = 1 - \alpha.$$

使上式成立的 a, b 有很多对，其中存在一对，使置信区间的长度最短。

但这样一对 a, b 无显示表达，需用数值方法求得，应用上也不方便。

4.3.1 小样本方法

通常采用下列等尾的置信区间。令

4.3.1 小样本方法

通常采用下列等尾的置信区间。令

$$P(2\lambda n\bar{X} < a) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(2\lambda n\bar{X} > b) = \frac{\alpha}{2}.$$

4.3.1 小样本方法

通常采用下列等尾的置信区间。令

$$P(2\lambda n\bar{X} < a) = \frac{\alpha}{2}, \quad P(2\lambda n\bar{X} > b) = \frac{\alpha}{2}.$$

易知, $a = \chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)$, $b = \chi_{2n}^2(\alpha/2)$ 。

4.3.1 小样本方法

通常采用下列等尾的置信区间。令

$$P(2\lambda n\bar{X} < a) = \frac{\alpha}{2}, P(2\lambda n\bar{X} > b) = \frac{\alpha}{2}.$$

易知, $a = \chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)$, $b = \chi_{2n}^2(\alpha/2)$ 。

这样求出的 a, b 虽不能使置信区间的精度最高, 但差别不大, 且表达式简单, 可通过查 χ^2 分布的上侧 α 分位数表求得, 应用上很方便。

4.3.1 小样本方法

故有

4.3.1 小样本方法

故有

$$P(\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2) \leq 2\lambda n\bar{X} \leq \chi_{2n}^2(\alpha/2)) = 1 - \alpha.$$

4.3.1 小样本方法

故有

$$P(\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2) \leq 2\lambda n\bar{X} \leq \chi_{2n}^2(\alpha/2)) = 1 - \alpha.$$

利用不等式的等价变形，可得 λ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.1 小样本方法

故有

$$P(\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2) \leq 2\lambda n\bar{X} \leq \chi_{2n}^2(\alpha/2)) = 1 - \alpha.$$

利用不等式的等价变形, 可得 λ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)}{2n\bar{X}}, \frac{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}{2n\bar{X}} \right],$$

4.3.1 小样本方法

故有

$$P(\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2) \leq 2\lambda n\bar{X} \leq \chi_{2n}^2(\alpha/2)) = 1 - \alpha.$$

利用不等式的等价变形, 可得 λ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)}{2n\bar{X}}, \frac{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}{2n\bar{X}} \right],$$

其单侧置信上、下限分别为 $\chi_{2n}^2(\alpha)/(2n\bar{X})$ 和 $\chi_{2n}^2(1 - \alpha)/(2n\bar{X})$ 。

4.3.1 小样本方法

同理，可求得 $g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.1 小样本方法

同理，可求得 $g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}, \frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)} \right].$$

4.3.1 小样本方法

同理，可求得 $g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}, \frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)} \right].$$

其单侧置信上、下限分别为 $2n\bar{X}/\chi_{2n}^2(1 - \alpha)$ 和 $2n\bar{X}/\chi_{2n}^2(\alpha)$ 。

4.3.1 小样本方法

例 (4.3.1)

设某电子产品的寿命服从指数分布 $Exp(\lambda)$ ，现从此分布的一批产品中抽取容量为9的样本，测的寿命（单位：千小时）为

15, 45, 50, 53, 60, 65, 70, 83, 90.

求平均寿命 $1/\lambda$ 的置信系数为90%的置信区间和置信上、下限。

4.3.1 小样本方法

解

$n = 9$, $\alpha = 0.05$, 由样本算得 $\bar{X} = 59$, $2n\bar{X} = 1062$ 。查表求得

4.3.1 小样本方法

解

$n = 9$, $\alpha = 0.05$, 由样本算得 $\bar{X} = 59$, $2n\bar{X} = 1062$ 。查表求得

$$\chi_{18}^2(0.05) = 28.869, \chi_{18}^2(0.95) = 9.390,$$

$$\chi_{18}^2(0.10) = 25.989, \chi_{18}^2(0.90) = 10.865.$$

4.3.1 小样本方法

可知 $g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信水平为90%的置信区间为

4.3.1 小样本方法

可知 $g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信水平为90%的置信区间为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}, \frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(1-\alpha/2)} \right] \\ &= \left[\frac{1062}{\chi_{18}^2(0.05)}, \frac{1062}{\chi_{18}^2(0.95)} \right] = [36.787, 113.099]. \end{aligned}$$

4.3.1 小样本方法

$g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信系数为90%的置信上、下限 \hat{g}_U 和 \hat{g}_L 分别为

4.3.1 小样本方法

$g(\lambda) = 1/\lambda$ 的置信系数为90%的置信上、下限 \hat{g}_U 和 \hat{g}_L 分别为

$$\hat{g}_U = \frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(1-\alpha)} = \frac{1062}{\chi_{18}^2(0.90)} = 97.745 \text{ (千小时)},$$

$$\hat{g}_L = \frac{2n\bar{X}}{\chi_{2n}^2(\alpha)} = \frac{1062}{\chi_{18}^2(0.10)} = 40.863 \text{ (千小时)}.$$

□

4.3.1 小样本方法

2. 均匀分布参数的置信区间

4.3.1 小样本方法

2. 均匀分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 中抽取的简单样本，要求 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

4.3.1 小样本方法

2. 均匀分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 中抽取的简单样本，要求 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

设 $T(\mathbf{X}) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ，由例2.6.6知 $T(\mathbf{X})$ 为充分统计量。

4.3.1 小样本方法

2. 均匀分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 中抽取的简单样本，要求 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

设 $T(\mathbf{X}) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ，由例2.6.6知 $T(\mathbf{X})$ 为充分统计量。

由例 3.3.5 知， $(n + 1)T/n$ 是 θ 的无偏估计（也是 θ 的UMVUE）。

4.3.1 小样本方法

2. 均匀分布参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 中抽取的简单样本，要求 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

设 $T(\mathbf{X}) = X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ，由例2.6.6知 $T(\mathbf{X})$ 为充分统计量。

由例 3.3.5 知， $(n + 1)T/n$ 是 θ 的无偏估计（也是 θ 的UMVUE）。

设想枢轴变量一定与 T 有关。

4.3.1 小样本方法

由于 $Y_i = X_i/\theta \sim U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, 故 $Y_{(n)} = T/\theta$ 的密度函数为 $f(y) = ny^{n-1}I_{(0,1)}(y)$, 与 θ 无关, 是 y 的单调递增函数。

4.3.1 小样本方法

由于 $Y_i = X_i/\theta \sim U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, 故 $Y_{(n)} = T/\theta$ 的密度函数为 $f(y) = ny^{n-1}I_{(0,1)}(y)$, 与 θ 无关, 是 y 的单调递增函数。

取 $Z = 1/Y_{(n)} = \theta/T$ 为枢轴变量, 其表达式与 θ 有关, 其密度函数为

4.3.1 小样本方法

由于 $Y_i = X_i/\theta \sim U(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, 故 $Y_{(n)} = T/\theta$ 的密度函数为 $f(y) = ny^{n-1}I_{(0,1)}(y)$, 与 θ 无关, 是 y 的单调递增函数。

取 $Z = 1/Y_{(n)} = \theta/T$ 为枢轴变量, 其表达式与 θ 有关, 其密度函数为

$$\frac{\theta}{T} \sim g(z) = nz^{-(n+1)}I_{(1,\infty)}(z),$$

与 θ 无关, 是 z 的单调递减函数。

4.3.1 小样本方法

确定 $d_1, d_2, 1 \leq d_1 < d_2 \leq \infty$, 使得

4.3.1 小样本方法

确定 $d_1, d_2, 1 \leq d_1 < d_2 \leq \infty$, 使得

$$\begin{aligned} P_{\theta}(d_1 \leq Z \leq d_2) &= P_{\theta} \left(d_1 \leq \frac{\theta}{T} \leq d_2 \right) = P(d_1 T \leq \theta \leq d_2 T) \\ &= \int_{d_1}^{d_2} n z^{-n-1} dz = \frac{1}{d_1^n} - \frac{1}{d_2^n} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

4.3.1 小样本方法

确定 $d_1, d_2, 1 \leq d_1 < d_2 \leq \infty$, 使得

$$\begin{aligned} P_{\theta}(d_1 \leq Z \leq d_2) &= P_{\theta} \left(d_1 \leq \frac{\theta}{T} \leq d_2 \right) = P(d_1 T \leq \theta \leq d_2 T) \\ &= \int_{d_1}^{d_2} n z^{-n-1} dz = \frac{1}{d_1^n} - \frac{1}{d_2^n} = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

于是 $[d_1 T, d_2 T]$ 为 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

4.3.1 小样本方法

由上式中被积函数 $g(z) = nz^{-n-1}I_{(1,\infty)}$ 单调降的性质，要使区间估计的精度最高，宜取 $d_1 = 1$ 。再解方程 $1 - 1/d_2^n = 1 - \alpha$ 得到 $d_2 = \frac{1}{(\alpha)^{1/n}}$ 。

4.3.1 小样本方法

由上式中被积函数 $g(z) = nz^{-n-1}I_{(1,\infty)}$ 单调降的性质，要使区间估计的精度最高，宜取 $d_1 = 1$ 。再解方程 $1 - 1/d_2^n = 1 - \alpha$ 得到 $d_2 = \frac{1}{(\alpha)^{1/n}}$ 。

因此， θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.1 小样本方法

由上式中被积函数 $g(z) = nz^{-n-1}I_{(1,\infty)}$ 单调降的性质，要使区间估计的精度最高，宜取 $d_1 = 1$ 。再解方程 $1 - 1/d_2^n = 1 - \alpha$ 得到 $d_2 = \frac{1}{(\alpha)^{1/n}}$ 。

因此， θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[d_1T, d_2T] = \left[T, \frac{T}{\alpha^{1/n}} \right].$$

□

4.3.2 大样本方法

4.3.1小节介绍的区间估计方法属于小样本方法。

4.3.2 大样本方法

4.3.1小节介绍的区间估计方法属于小样本方法。

它的特点是导出区间估计的枢轴变量的精确分布是容易求得的，可用小样本方法获得置信水平为 $1 - \alpha$ 的精确的置信区间。

4.3.2 大样本方法

4.3.1小节介绍的区间估计方法属于小样本方法。

它的特点是导出区间估计的枢轴变量的精确分布是容易求得的，可用小样本方法获得置信水平为 $1 - \alpha$ 的精确的置信区间。

但若枢轴变量的精确分布不易求得，或者，若其精确分布虽可求得，但表达式复杂、使用不便，则可用大样本方法获得枢轴变量的渐近分布，从而获得置信水平近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间。

4.3.2 大样本方法

获得枢轴变量的极限分布的主要方法是基于**中心极限定理**。

4.3.2 大样本方法

获得枢轴变量的极限分布的主要方法是基于**中心极限定理**。

但不同的统计模型中构造区间估计的枢轴变量所基于的中心极限定理可能是不完全相同的。

4.3.2 大样本方法

获得枢轴变量的极限分布的主要方法是基于中心极限定理。

但不同的统计模型中构造区间估计的枢轴变量所基于的中心极限定理可能是不完全相同的。

Cauchy分布中，位置参数的置信区间是基于样本中位数的极限定理。

4.3.2 大样本方法

1. Cauchy分布位置参数的置信区间

4.3.2 大样本方法

1. Cauchy分布位置参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为从Cauchy分布 $C(\theta, 1)$ 中抽取的简单样本，此分布的密度函数为

4.3.2 大样本方法

1. Cauchy分布位置参数的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为从Cauchy分布 $C(\theta, 1)$ 中抽取的简单样本，此分布的密度函数为

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\pi[1 + (x - \theta)^2]}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty,$$

现要求位置参数 θ 的置信区间。

4.3.2 大样本方法

以 m_n 记 X_1, \dots, X_n 的样本中位数, θ 是总体的中位数, 因此 m_n 作为 θ 的点估计是合适的。

4.3.2 大样本方法

以 m_n 记 X_1, \dots, X_n 的样本中位数, θ 是总体的中位数, 因此 m_n 作为 θ 的点估计是合适的。

由于Cauchy分布关于 θ 对称, 故 $m_n - \theta$ 的分布与从 $\theta = 0$ 的Cauchy分布

4.3.2 大样本方法

以 m_n 记 X_1, \dots, X_n 的样本中位数, θ 是总体的中位数, 因此 m_n 作为 θ 的点估计是合适的。

由于Cauchy分布关于 θ 对称, 故 $m_n - \theta$ 的分布与从 $\theta = 0$ 的Cauchy分布

$$f(x; \theta = 0) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

中抽取的大小为 n 的样本中位数的分布相同。

4.3.2 大样本方法

以 m_n 记 X_1, \dots, X_n 的样本中位数, θ 是总体的中位数, 因此 m_n 作为 θ 的点估计是合适的。

由于Cauchy分布关于 θ 对称, 故 $m_n - \theta$ 的分布与从 $\theta = 0$ 的Cauchy分布

$$f(x; \theta = 0) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

中抽取的大小为 n 的样本中位数的分布相同。

因此 $m_n - \theta$ 的分布也与 θ 无关, 可作为枢轴变量, 其分布密度记为 $f_n(x)$ 。

4.3.2 大样本方法

当 n 为奇数时 $f_n(x)$ 的表达式利用定理2.4.3中单个次序统计量的密度函数的表达式

4.3.2 大样本方法

当 n 为奇数时 $f_n(x)$ 的表达式利用定理2.4.3中单个次序统计量的密度函数的表达式

$$f_n(x) = \frac{n+1}{2} \binom{n}{\frac{n+1}{2}} [F(x)]^{\frac{n+1}{2}-1} [1-F(x)]^{n-\frac{n+1}{2}} f(x)$$

直接写出来。

4.3.2 大样本方法

当 n 为奇数时 $f_n(x)$ 的表达式利用定理2.4.3中单个次序统计量的密度函数的表达式

$$f_n(x) = \frac{n+1}{2} \binom{n}{\frac{n+1}{2}} [F(x)]^{\frac{n+1}{2}-1} [1-F(x)]^{n-\frac{n+1}{2}} f(x)$$

直接写出来。

当 n 为偶数时，要复杂些。

4.3.2 大样本方法

在找到 $f_n(x)$ 后，要确定 c ，使得

4.3.2 大样本方法

在找到 $f_n(x)$ 后，要确定 c ，使得

$$P_{\theta}(|m_n - \theta| \leq c) = \int_{-c}^c f_n(x) dx = 1 - \alpha,$$

4.3.2 大样本方法

在找到 $f_n(x)$ 后，要确定 c ，使得

$$P_{\theta}(|m_n - \theta| \leq c) = \int_{-c}^c f_n(x) dx = 1 - \alpha,$$

由此得出 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $[m_n - c, m_n + c]$ 。

4.3.2 大样本方法

在找到 $f_n(x)$ 后，要确定 c ，使得

$$P_\theta(|m_n - \theta| \leq c) = \int_{-c}^c f_n(x) dx = 1 - \alpha,$$

由此得出 θ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间为 $[m_n - c, m_n + c]$ 。

但是，因为 $f_n(x)$ 表达式很复杂，要由上式决定 c 不容易。

4.3.2 大样本方法

记 $\xi_{1/2} = \theta$ 为总体中位数，并注意到 $f(\xi_{1/2}) = 1/\pi$ 。

4.3.2 大样本方法

记 $\xi_{1/2} = \theta$ 为总体中位数，并注意到 $f(\xi_{1/2}) = 1/\pi$ 。

根据例2.5.3*可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有

4.3.2 大样本方法

记 $\xi_{1/2} = \theta$ 为总体中位数，并注意到 $f(\xi_{1/2}) = 1/\pi$ 。

根据例2.5.3*可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$2\sqrt{n}f(\xi_{1/2})(m_n - \xi_{1/2}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1),$$

4.3.2 大样本方法

记 $\xi_{1/2} = \theta$ 为总体中位数，并注意到 $f(\xi_{1/2}) = 1/\pi$ 。

根据例2.5.3*可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n}f(\xi_{1/2})(m_n - \xi_{1/2}) &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \\ \implies \frac{2\sqrt{n}(m_n - \theta)}{\pi} &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \end{aligned}$$

4.3.2 大样本方法

记 $\xi_{1/2} = \theta$ 为总体中位数，并注意到 $f(\xi_{1/2}) = 1/\pi$ 。

根据例2.5.3*可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n}f(\xi_{1/2})(m_n - \xi_{1/2}) &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \\ \implies \frac{2\sqrt{n}(m_n - \theta)}{\pi} &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \end{aligned}$$

近似分布与 θ 无关，因此以 $\frac{2\sqrt{n}(m_n - \theta)}{\pi}$ 作为枢轴变量。

4.3.2 大样本方法

近似地有

4.3.2 大样本方法

近似地有

$$P\left(\frac{2\sqrt{n}|m_n - \theta|}{\pi} \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

此处 $u_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上侧 $\alpha/2$ 分位数。

4.3.2 大样本方法

近似地有

$$P\left(\frac{2\sqrt{n}|m_n - \theta|}{\pi} \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

此处 $u_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上侧 $\alpha/2$ 分位数。

利用不等式的等价变形可知，当 n 充分大时， θ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.2 大样本方法

近似地有

$$P\left(\frac{2\sqrt{n}|m_n - \theta|}{\pi} \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

此处 $u_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上侧 $\alpha/2$ 分位数。

利用不等式的等价变形可知，当 n 充分大时， θ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[m_n - \frac{\pi u_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, m_n + \frac{\pi u_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right],$$

4.3.2 大样本方法

近似地有

$$P\left(\frac{2\sqrt{n}|m_n - \theta|}{\pi} \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

此处 $u_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上侧 $\alpha/2$ 分位数。

利用不等式的等价变形可知，当 n 充分大时， θ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[m_n - \frac{\pi u_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, m_n + \frac{\pi u_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right],$$

其单侧置信上、下限为 $m_n \pm \pi u_{\alpha}/(2\sqrt{n})$ ，其中“+”是置信上限。

4.3.2 大样本方法

3. 比率 p 的置信区间

4.3.2 大样本方法

3. 比率 p 的置信区间

比率 p 的置信区间的构造是基于二项分布的中心极限定理。

4.3.2 大样本方法

3. 比率 p 的置信区间

比率 p 的置信区间的构造是基于二项分布的中心极限定理。

定理 (De Moivre-Laplace 积分极限定理 (回顾))

若 μ_n 是 n 次 *Bernoulli* 试验中事件 A 出现的次数, $0 < p < 1$, 则对任意有限区间 $[a, b]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 一致地有

4.3.2 大样本方法

3. 比率 p 的置信区间

比率 p 的置信区间的构造是基于二项分布的中心极限定理。

定理 (De Moivre-Laplace 积分极限定理 (回顾))

若 μ_n 是 n 次 Bernoulli 试验中事件 A 出现的次数, $0 < p < 1$, 则对任意有限区间 $[a, b]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 一致地有

$$P \left\{ a \leq \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b \right\} \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4.3.2 大样本方法

比率是指特定的一部分个体（人或物）在总体中所占的比例。

4.3.2 大样本方法

比率是指特定的一部分个体（人或物）在总体中所占的比例。

如产品的不合格率、发射导弹的成功率、疾病的治愈率、射击的命中率和人口死亡率等都涉及比率的问题，是实际问题中常遇到的一种参数。

4.3.2 大样本方法

比率是指特定的一部分个体（人或物）在总体中所占的比例。

如产品的不合格率、发射导弹的成功率、疾病的治愈率、射击的命中率和人口死亡率等都涉及比率的问题，是实际问题中常遇到的一种参数。

比率 p 可以看作两点分布 $B(1, p)$ 中的一个参数。

4.3.2 大样本方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本。

4.3.2 大样本方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本。

令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，则随机变量 S_n 服从二项分布 $B(n, p)$ 。

4.3.2 大样本方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本。

令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，则随机变量 S_n 服从二项分布 $B(n, p)$ 。

现要求 p 的置信区间，利用中心极限定理，有

4.3.2 大样本方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本。

令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，则随机变量 S_n 服从二项分布 $B(n, p)$ 。

现要求 p 的置信区间，利用中心极限定理，有

$$T = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

4.3.2 大样本方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自两点分布 $B(1, p)$ 中抽取的简单样本。

令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ，则随机变量 S_n 服从二项分布 $B(n, p)$ 。

现要求 p 的置信区间，利用中心极限定理，有

$$T = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

这表明当 n 充分大时，随机变量 T 的极限分布是 $N(0, 1)$ ，与未知参数 p 无关。取这样的 T 为枢轴变量。

4.3.2 大样本方法

因此 n 充分大时有

4.3.2 大样本方法

因此 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

4.3.2 大样本方法

因此 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

求解上式括号中的不等式，令 $\hat{p} = \bar{X}$ ， $\gamma = u_{\alpha/2}$ ，可得到 p 的二次三项式为

4.3.2 大样本方法

因此 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

求解上式括号中的不等式，令 $\hat{p} = \bar{X}$ ， $\gamma = u_{\alpha/2}$ ，可得到 p 的二次三项式为

$$(n + \gamma^2)p^2 - (2n\hat{p} + \gamma^2)p + n\hat{p}^2 \leq 0.$$

4.3.2 大样本方法

上式左端 p 的判别式

4.3.2 大样本方法

上式左端 p 的判别式

$$\Delta = (2n\hat{p} + \gamma^2)^2 - 4(n + \gamma^2)n\hat{p}^2 = \gamma^4 + 4n\gamma^2\hat{p}(1 - \hat{p}) > 0,$$

4.3.2 大样本方法

上式左端 p 的判别式

$$\Delta = (2n\hat{p} + \gamma^2)^2 - 4(n + \gamma^2)n\hat{p}^2 = \gamma^4 + 4n\gamma^2\hat{p}(1 - \hat{p}) > 0,$$

且平方项系数为正，故存在两个不相等的实根 c_1, c_2 ，它们是

4.3.2 大样本方法

上式左端 p 的判别式

$$\Delta = (2n\hat{p} + \gamma^2)^2 - 4(n + \gamma^2)n\hat{p}^2 = \gamma^4 + 4n\gamma^2\hat{p}(1 - \hat{p}) > 0,$$

且平方项系数为正，故存在两个不相等的实根 c_1, c_2 ，它们是

$$c_1, c_2 = \frac{n}{n + \gamma^2} \left[\hat{p} + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}} \right],$$

其中 c_2 相应于“+”号。

4.3.2 大样本方法

上式左端 p 的判别式

$$\Delta = (2n\hat{p} + \gamma^2)^2 - 4(n + \gamma^2)n\hat{p}^2 = \gamma^4 + 4n\gamma^2\hat{p}(1 - \hat{p}) > 0,$$

且平方项系数为正，故存在两个不相等的实根 c_1, c_2 ，它们是

$$c_1, c_2 = \frac{n}{n + \gamma^2} \left[\hat{p} + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}} \right],$$

其中 c_2 相应于“+”号。因此 $[c_1(\mathbf{X}), c_2(\mathbf{X})]$ 就是 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间。称此置信区间为**得分区间** (score interval)。

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

已知 $\hat{p} = \bar{X} \xrightarrow{p} p$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

已知 $\hat{p} = \bar{X} \xrightarrow{p} p$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{p} 1, \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

已知 $\hat{p} = \bar{X} \xrightarrow{p} p$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{p} 1, \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

由Slutsky定理,

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

已知 $\hat{p} = \bar{X} \xrightarrow{p} p$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{p} 1, \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

由Slutsky定理,

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1),$$

4.3.2 大样本方法

在实际中采用更简单的方法。

已知 $\hat{p} = \bar{X} \xrightarrow{p} p$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{p} 1, \quad \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

由Slutsky定理,

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1),$$

可取 T 作为枢轴变量, 其极限分布与 p 无关。

4.3.2 大样本方法

令

4.3.2 大样本方法

令

$$P \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \right| \leq u_{\alpha/2} \right) \approx 1 - \alpha.$$

4.3.2 大样本方法

令

$$P \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \right| \leq u_{\alpha/2} \right) \approx 1 - \alpha.$$

利用不等式等价变形，得到 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.2 大样本方法

令

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\hat{p} - p)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

利用不等式等价变形，得到 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}],$$

其单侧置信上、下限为 $\hat{p} \pm u_{\alpha} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$ ，其中“+”号是置信上限。

4.3.2 大样本方法

这是以 \hat{p} 为对称中心的置信区间，称为Wald置信区间，其效果要比得分区间差。

4.3.2 大样本方法

这是以 \hat{p} 为对称中心的置信区间，称为Wald置信区间，其效果要比得分区间差。

因为它经过了二次近似，对 n 的要求更高了，一般要求

4.3.2 大样本方法

这是以 \hat{p} 为对称中心的置信区间，称为Wald置信区间，其效果要比得分区间差。

因为它经过了二次近似，对 n 的要求更高了，一般要求

$$n\hat{p} > 10 \text{ 和 } n(1 - \hat{p}) > 10$$

成立。

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.3)

网络钓鱼是一种通过欺骗性垃圾邮件或者网页，意图引诱人们给出敏感信息（如密码、银行卡号码等）的一种违法攻击方式。

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.3)

网络钓鱼是一种通过欺骗性垃圾邮件或者网页，意图引诱人们给出敏感信息（如密码、银行卡号码等）的一种违法攻击方式。

2017 年发表的一篇研究论文描述了一项试验，向 320 名参与者展示一些网页，并要求他们识别哪些是合法的，哪些是钓鱼欺诈性的。

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.3)

网络钓鱼是一种通过欺骗性垃圾邮件或者网页，意图引诱人们给出敏感信息（如密码、银行卡号码等）的一种违法攻击方式。

2017 年发表的一篇研究论文描述了一项试验，向 320 名参与者展示一些网页，并要求他们识别哪些是合法的，哪些是钓鱼欺诈性的。

在研究的一个阶段内，有 157 名参与者将一个钓鱼网站误认为是安全的。

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.3)

网络钓鱼是一种通过欺骗性垃圾邮件或者网页，意图引诱人们给出敏感信息（如密码、银行卡号码等）的一种违法攻击方式。

2017 年发表的一篇研究论文描述了一项试验，向 320 名参与者展示一些网页，并要求他们识别哪些是合法的，哪些是钓鱼欺诈性的。

在研究的一个阶段内，有 157 名参与者将一个钓鱼网站误认为是安全的。

记 p 为参与试验人数中错误识别钓鱼网站的比例，求 p 的 95% 的置信区间。

4.3.2 大样本方法

解

4.3.2 大样本方法

解

记每名参与者识别钓鱼网站为 X_i , $i = 1, \dots, n$ 。当 $X_i = 1$ 时, 参与者将一个钓鱼网站误认为是安全的; 当 $X_i = 0$ 时, 参与者正确识别钓鱼网站。

4.3.2 大样本方法

解

记每名参与者识别钓鱼网站为 X_i , $i = 1, \dots, n$ 。当 $X_i = 1$ 时, 参与者将一个钓鱼网站误认为是安全的; 当 $X_i = 0$ 时, 参与者正确识别钓鱼网站。

X_i 服从二点分布 $B(1, p)$, 且 X_1, \dots, X_n 相互独立。

4.3.2 大样本方法

解

记每名参与者识别钓鱼网站为 X_i , $i = 1, \dots, n$ 。当 $X_i = 1$ 时, 参与者将一个钓鱼网站误认为是安全的; 当 $X_i = 0$ 时, 参与者正确识别钓鱼网站。

X_i 服从二点分布 $B(1, p)$, 且 X_1, \dots, X_n 相互独立。

错误识别钓鱼网站的人数 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, 其中 $n = 320$,
 $S_n = 157$, p 的点估计 $\hat{p} = \bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{157}{320} = 0.491$ 。

4.3.2 大样本方法

已知 $\alpha = 0.05$ ，查标准正态分布表得 $\gamma = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ 。

4.3.2 大样本方法

已知 $\alpha = 0.05$ ，查标准正态分布表得 $\gamma = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ 。

则 p 的置信系数近似为95%的置信区间（得分区间）为

4.3.2 大样本方法

已知 $\alpha = 0.05$ ，查标准正态分布表得 $\gamma = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ 。

则 p 的置信系数近似为95%的置信区间（得分区间）为

$$\frac{n}{n + \gamma^2} \left[\hat{p} + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}} \right]$$

=

4.3.2 大样本方法

已知 $\alpha = 0.05$ ，查标准正态分布表得 $\gamma = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ 。

则 p 的置信系数近似为95%的置信区间（得分区间）为

$$\begin{aligned} & \frac{n}{n + \gamma^2} \left[\hat{p} + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}} \right] \\ &= \frac{320}{320 + 1.96^2} \left[0.491 + \frac{1.96^2}{2 \times 320} \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.491(1 - 0.491)}{320} + \frac{1.96^2}{4 \times 320^2}} \right] \\ &= [0.4367, 0.5456]. \end{aligned}$$

4.3.2 大样本方法

经计算 $n\hat{p} = 157 > 10$, $n(1 - \hat{p}) = 163 > 10$, 可得到 p 的置信系数近似为 95% 的置信区间 (Wald 置信区间) 为

4.3.2 大样本方法

经计算 $n\hat{p} = 157 > 10$, $n(1 - \hat{p}) = 163 > 10$, 可得到 p 的置信系数近似为 95% 的置信区间 (Wald 置信区间) 为

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}]$$

=

4.3.2 大样本方法

经计算 $n\hat{p} = 157 > 10$, $n(1 - \hat{p}) = 163 > 10$, 可得到 p 的置信系数近似为 95% 的置信区间 (Wald 置信区间) 为

$$\begin{aligned} & [\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}] \\ = & [0.491 - 1.96\sqrt{0.491(1 - 0.491)/320}, \\ & 0.491 + 1.96\sqrt{0.491(1 - 0.491)/320}] \\ = & [0.4362, 0.5458]. \end{aligned}$$

4.3.2 大样本方法

因此，在95%的置信系数下，由得分区间知，参与试验的人员中有43.67%至54.56%未能识别该钓鱼网站。

4.3.2 大样本方法

因此，在95%的置信系数下，由得分区间知，参与试验的人员中有43.67%至54.56%未能识别该钓鱼网站。

由Wald置信区间知，参与试验的人员中有43.62%至54.58%未能识别该钓鱼网站。 □

4.3.2 大样本方法

在大样本场合，还有另外一个问题（**样本量的计算**）：

4.3.2 大样本方法

在大样本场合，还有另外一个问题（**样本量的计算**）：

为使比率 p 的区间估计达到指定的精度（即给定置信区间的长度），至少需要多少样本？

4.3.2 大样本方法

在大样本场合，还有另外一个问题（**样本量的计算**）：

为使比率 p 的区间估计达到指定的精度（即给定置信区间的长度），至少需要多少样本？

若基于得分区间

4.3.2 大样本方法

在大样本场合，还有另外一个问题（**样本量的计算**）：

为使比率 p 的区间估计达到指定的精度（即给定置信区间的长度），至少需要多少样本？

若基于得分区间

$$c_1, c_2 = \frac{n}{n + \gamma^2} \left[\hat{p} + \frac{\gamma^2}{2n} \pm \gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n} + \frac{\gamma^2}{4n^2}} \right],$$

指定置信区间的长度，确定样本量 n 的表达式较复杂。

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}].$$

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}].$$

那么，在 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间中，为使区间估计的长度不超过 w ，需满足

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}].$$

那么，在 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间中，为使区间估计的长度不超过 w ，需满足

$$2u_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n} \leq w,$$

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}].$$

那么，在 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间中，为使区间估计的长度不超过 w ，需满足

$$2u_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n} \leq w,$$

解不等式得

4.3.2 大样本方法

一个简便的方法是基于Wald置信区间

$$[\hat{p} - u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}].$$

那么，在 p 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间中，为使区间估计的长度不超过 w ，需满足

$$2u_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n} \leq w,$$

解不等式得

$$n \geq 4u_{\alpha/2}^2\hat{p}(1 - \hat{p})/w^2. \quad (1)$$

4.3.2 大样本方法

取 $n = [4u_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1$ ，这里 $[\cdot]$ 表示取整。

4.3.2 大样本方法

取 $n = [4u_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1$ ，这里 $[\cdot]$ 表示取整。

可见这种确定样本量的方法包含了 \hat{p} ，因此需要在试验后利用样本得到。这导致无法在试验前就确定好样本量。

4.3.2 大样本方法

取 $n = [4u_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1$, 这里 $[\cdot]$ 表示取整。

可见这种确定样本量的方法包含了 \hat{p} , 因此需要在试验后利用样本得到。这导致无法在试验前就确定好样本量。

如果试验者基于其他试验可以给出一个先验估计 p_0 , 则可以使用 p_0 代替 \hat{p} 来确定样本量 n 。

4.3.2 大样本方法

另外一种常用的保守做法是考虑到在 $0 < x < 1$ 时总有 $x(1-x) \leq 1/4$, 即 $\hat{p}(1-\hat{p})$ 的最大值在 $\hat{p} = 0.5$ 处达到, 且最大值为 $1/4$ 。

4.3.2 大样本方法

另外一种常用的保守做法是考虑到在 $0 < x < 1$ 时总有 $x(1-x) \leq 1/4$, 即 $\hat{p}(1-\hat{p})$ 的最大值在 $\hat{p} = 0.5$ 处达到, 且最大值为 $1/4$ 。

因此可得样本容量

4.3.2 大样本方法

另外一种常用的保守做法是考虑到在 $0 < x < 1$ 时总有 $x(1-x) \leq 1/4$, 即 $\hat{p}(1-\hat{p})$ 的最大值在 $\hat{p} = 0.5$ 处达到, 且最大值为 $1/4$ 。

因此可得样本容量

$$n \geq 4u_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})/w^2 \geq u_{\alpha/2}^2/w^2. \quad (2)$$

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.4)

如果要求例4.3.3中置信系数为95%的置信区间的长度不超过0.08, 样本容量 n 至少为多少? 已知在例4.3.3中, $n = 320$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = 157$, 且 $S_n \sim B(n, p)$ 。

4.3.2 大样本方法

解

取 $w = 0.08$, $\alpha = 0.05$, $\hat{p} = S_n/n = 0.491$, 查表

得 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$, 采用式 (1) 计算得

4.3.2 大样本方法

解

取 $w = 0.08$, $\alpha = 0.05$, $\hat{p} = S_n/n = 0.491$, 查表

得 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$, 采用式 (1) 计算得

$$\begin{aligned}n &= [4u_{\alpha/2}\hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1 \\ &= [4 \times 1.96^2 \times 0.491(1 - 0.491)/0.08^2] + 1 = 601,\end{aligned}$$

4.3.2 大样本方法

解

取 $w = 0.08$, $\alpha = 0.05$, $\hat{p} = S_n/n = 0.491$, 查表

得 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$, 采用式 (1) 计算得

$$\begin{aligned}n &= [4u_{\alpha/2}\hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1 \\ &= [4 \times 1.96^2 \times 0.491(1 - 0.491)/0.08^2] + 1 = 601,\end{aligned}$$

或者, 采用式 (2) 计算得

4.3.2 大样本方法

解

取 $w = 0.08$, $\alpha = 0.05$, $\hat{p} = S_n/n = 0.491$, 查表

得 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$, 采用式 (1) 计算得

$$\begin{aligned}n &= [4u_{\alpha/2}\hat{p}(1 - \hat{p})/w^2] + 1 \\&= [4 \times 1.96^2 \times 0.491(1 - 0.491)/0.08^2] + 1 = 601,\end{aligned}$$

或者, 采用式 (2) 计算得

$$n = [u_{\alpha/2}^2/w^2] + 1 = [1.96^2/0.08^2] + 1 = 601.$$

故取样本容量 $n = 601$ 即可满足要求。

4.3.2 大样本方法

4*. 基于独立同分布样本中心极限定理的近似置信区间

4.3.2 大样本方法

4*. 基于独立同分布样本中心极限定理的近似置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自总体 F 中抽取的 *i.i.d.* 样本。

4.3.2 大样本方法

4*. 基于独立同分布样本中心极限定理的近似置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自总体 F 中抽取的 *i.i.d.* 样本。

只要假定总体均值 θ_F 和方差 σ_F^2 存在，则无论总体分布是什么（总体分布形式已知或未知），由独立同分布场合的中心极限定理，其样本均值 \bar{X} 有渐近正态分布（教材2.5节，公式2.5.2），即

4.3.2 大样本方法

4*. 基于独立同分布样本中心极限定理的近似置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自总体 F 中抽取的 *i.i.d.* 样本。

只要假定总体均值 θ_F 和方差 σ_F^2 存在，则无论总体分布是什么（总体分布形式已知或未知），由独立同分布场合的中心极限定理，其样本均值 \bar{X} 有渐近正态分布（教材2.5节，公式2.5.2），即

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)/\sigma_F \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

4.3.2 大样本方法

要求 θ_F 的置信区间，由于 σ_F 未知，近似地用样本标准差 S 代替上式中的 σ_F 。

4.3.2 大样本方法

要求 θ_F 的置信区间, 由于 σ_F 未知, 近似地用样本标准差 S 代替上式中的 σ_F 。

利用Slutsky定理, 可构造变量 $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)/S$ 作为枢轴变量, 它的极限分布是标准的正态分布 $N(0, 1)$, 与 θ_F 无关。即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

4.3.2 大样本方法

要求 θ_F 的置信区间, 由于 σ_F 未知, 近似地用样本标准差 S 代替上式中的 σ_F 。

利用Slutsky定理, 可构造变量 $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)/S$ 作为枢轴变量, 它的极限分布是标准的正态分布 $N(0, 1)$, 与 θ_F 无关。即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{S} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{\sigma_F} \frac{\sigma_F}{S} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

4.3.2 大样本方法

令

4.3.2 大样本方法

令

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{S}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

4.3.2 大样本方法

令

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{S}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

解上式子括号中的不等式，得到 θ_F 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.2 大样本方法

令

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{S}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

解上式子括号中的不等式，得到 θ_F 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right],$$

4.3.2 大样本方法

令

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_F)}{S}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha,$$

解上式子括号中的不等式，得到 θ_F 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right],$$

其单侧置信上、下限为 $\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\alpha}$ ，其中“+”是置信上限。

4.3.2 大样本方法

例 (4.3.5)

某鸟类学家调查了某林区50个鸟窝，发现窝中鸟蛋个数的数据如下：

3, 7, 3, 3, 3, 4, 1, 4, 2, 3, 2, 0, 2, 2, 1, 2, 4, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 3, 1,
0, 0, 2, 1, 1, 4, 3, 1, 2, 0, 1, 4, 3, 3, 3, 5, 1, 3, 1, 3, 2, 7, 2, 1, 3.

假定鸟蛋的个数 X 服从Poisson分布 $P(\lambda)$ ， $\lambda > 0$ 。试求平均每窝鸟蛋个数的置信系数为0.95的置信区间。

4.3.2 大样本方法

解

4.3.2 大样本方法

解

由假设知平均每窝鸟蛋个数为 $E_\lambda(X) = Var_\lambda(X) = \lambda$ 。

4.3.2 大样本方法

解

由假设知平均每窝鸟蛋个数为 $E_\lambda(X) = Var_\lambda(X) = \lambda$ 。

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自总体 X 中抽取的简单样本， \bar{X} 为样本均值，由中心极限定理得

4.3.2 大样本方法

解

由假设知平均每窝鸟蛋个数为 $E_\lambda(X) = Var_\lambda(X) = \lambda$ 。

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 为自总体 X 中抽取的简单样本， \bar{X} 为样本均值，由中心极限定理得

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1), \text{ 当 } n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

4.3.2 大样本方法

令随机变量 T 作为枢轴变量。记 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ，当 n 充分大时有

4.3.2 大样本方法

令随机变量 T 作为枢轴变量。记 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ，当 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

4.3.2 大样本方法

令随机变量 T 作为枢轴变量。记 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ，当 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

解上式括号中的不等式，得到 λ 的二次三项式

4.3.2 大样本方法

令随机变量 T 作为枢轴变量。记 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ，当 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

解上式括号中的不等式，得到 λ 的二次三项式

$$n\lambda^2 - (2n\bar{X} + u_{\alpha/2}^2)\lambda + n\bar{X}^2 \leq 0,$$

4.3.2 大样本方法

令随机变量 T 作为枢轴变量。记 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ ，当 n 充分大时有

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right| \leq u_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

解上式括号中的不等式，得到 λ 的二次三项式

$$n\lambda^2 - (2n\bar{X} + u_{\alpha/2}^2)\lambda + n\bar{X}^2 \leq 0,$$

其判别式 $\Delta = u^4 + 4n\bar{X}u^2 > 0$ ，且平方项系数为正，故满足上述不等式的 λ 介于两个不相等的正根之间。

4.3.2 大样本方法

记这两个根为 d_1 和 d_2 ，且 $d_1 < d_2$ ，它们是

4.3.2 大样本方法

记这两个根为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 < d_2$, 它们是

$$d_1, d_2 = \hat{\lambda} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2} + \frac{\hat{\lambda}}{n}}, d_2 \text{ 相应于 “+” 号.}$$

4.3.2 大样本方法

记这两个根为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 < d_2$, 它们是

$$d_1, d_2 = \hat{\lambda} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2} + \frac{\hat{\lambda}}{n}}, d_2 \text{ 相应于 “+” 号.}$$

由鸟蛋数据可知: $n = 50$, $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2.3$, $u_{0.025} = 1.96$ 。

4.3.2 大样本方法

记这两个根为 d_1 和 d_2 ，且 $d_1 < d_2$ ，它们是

$$d_1, d_2 = \hat{\lambda} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2} + \frac{\hat{\lambda}}{n}}, d_2 \text{ 相应于 “+” 号.}$$

由鸟蛋数据可知： $n = 50$ ， $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2.3$ ， $u_{0.025} = 1.96$ 。

将这些数据代入上式可得到 λ 的置信系数为0.95的置信区间 $[d_1, d_2] = [1.916, 2.760]$ 。

4.3.2 大样本方法

实用上，可采用下列更简单的办法：由Slutsky定理可推出

4.3.2 大样本方法

实用上，可采用下列更简单的办法：由Slutsky定理可推出

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

4.3.2 大样本方法

实用上，可采用下列更简单的办法：由Slutsky定理可推出

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

令 T 为枢轴变量，给定置信系数 $1 - \alpha$ ，则由

4.3.2 大样本方法

实用上, 可采用下列更简单的办法: 由Slutsky定理可推出

$$T = \frac{\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

令 T 为枢轴变量, 给定置信系数 $1 - \alpha$, 则由

$$P(|T| \leq u_{\alpha/2}) = P(|\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)|/\sqrt{\hat{\lambda}} \leq u_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha,$$

4.3.2 大样本方法

可推出 λ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

4.3.2 大样本方法

可推出 λ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{\lambda} - u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n}, \hat{\lambda} + u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right].$$

4.3.2 大样本方法

可推出 λ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{\lambda} - u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n}, \hat{\lambda} + u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right].$$

由鸟蛋数据可知： $n = 50$ ， $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2.3$ ， $u_{0.025} = 1.96$ 。将这些数据代入上式，可得到 λ 的置信系数为0.95的置信区间 $[1.880, 2.720]$ 。

4.3.2 大样本方法

可推出 λ 的置信系数近似为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{\lambda} - u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n}, \hat{\lambda} + u_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right].$$

由鸟蛋数据可知： $n = 50$ ， $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2.3$ ， $u_{0.025} = 1.96$ 。将这些数据代入上式，可得到 λ 的置信系数为0.95的置信区间 $[1.880, 2.720]$ 。

可见两种方法差别不大。当然后一种方法精度要差一些，因为后一方法经过了两次近似。 □