数理统计
第四章
区间估计

2026 年 4 月 29 日

目录

4.1.1 参数的区间估计问题

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \theta) : \theta \in \Theta\}$，其中$\Theta$是参数空间。

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，其中$\Theta$是参数空间。

$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为取自分布族中某总体$f(x,\theta)$的样本。

设有一个参数分布族$\mathcal{F}=\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，其中$\Theta$是参数空间。

$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为取自分布族中某总体$f(x,\theta)$的样本。

$g(\theta)$为定义在Θ上的一个已知函数，要利用样本$\boldsymbol{X}$对$g(\theta)$的值作出估计，就是参数估计问题。

4.1.1 参数的区间估计问题

参数估计有两类：点估计和区间估计。

4.1.1 参数的区间估计问题

参数估计有两类：点估计和区间估计。

在第三章讨论的点估计是用样本函数$\hat{g}(\boldsymbol{X})$去估计$g(\theta)$的，这种估计的缺点是：单从$\hat{g}(\boldsymbol{X})$所给出的估计值上，无法看出它的精度有多大。

参数估计有两类：点估计和区间估计。

在第三章讨论的点估计是用样本函数$\hat{g}(\boldsymbol{X})$去估计$g(\theta)$的，这种估计的缺点是：单从$\hat{g}(\boldsymbol{X})$所给出的估计值上，无法看出它的精度有多大。

当然可以定义某种指标，如估计的均方误差之类的去刻画它的精度，但更直接的方法是指出一个误差限$d(\boldsymbol{X})$，把估计写成$\hat{g}(\boldsymbol{X}) \pm d(\boldsymbol{X})$的形式。

4.1.1 参数的区间估计问题

参数估计有两类：点估计和区间估计。

在第三章讨论的点估计是用样本函数$\hat{g}(\boldsymbol{X})$去估计$g(\theta)$的，这种估计的缺点是：单从$\hat{g}(\boldsymbol{X})$所给出的估计值上，无法看出它的精度有多大。

当然可以定义某种指标，如估计的均方误差之类的去刻画它的精度，但更直接的方法是指出一个误差限$d(\boldsymbol{X})$，把估计写成$\hat{g}(\boldsymbol{X}) \pm d(\boldsymbol{X})$的形式。

在应用部门中常见到这种写法。这实际上就是一种区间估计，即估计$g(\theta)$的取值在区间$[\hat{g}(\boldsymbol{X}) - d(\boldsymbol{X}), \hat{g}(\boldsymbol{X}) + d(\boldsymbol{X})]$之内。

定义 (4.1.1（区间估计）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，$g(\theta)$是定义在参数空间$\Theta$上的一个已知函数，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从分布族$\mathcal{F}$中抽取的样本。

定义 (4.1.1（区间估计）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，$g(\theta)$是定义在参数空间$\Theta$上的一个已知函数，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从分布族$\mathcal{F}$中抽取的样本。

令$\hat{g}_1(\boldsymbol{X})$和$\hat{g}_2(\boldsymbol{X})$为定义在样本空间$\mathcal{X}$上，取值在$\Theta$上的两个统计量，且$\hat{g}_1(\boldsymbol{X}) \leq \hat{g}_2(\boldsymbol{X})$，则称随机区间

定义 (4.1.1（区间估计）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，$g(\theta)$是定义在参数空间$\Theta$上的一个已知函数，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从分布族$\mathcal{F}$中抽取的样本。

令$\hat{g}_1(\boldsymbol{X})$和$\hat{g}_2(\boldsymbol{X})$为定义在样本空间$\mathcal{X}$上，取值在$\Theta$上的两个统计量，且$\hat{g}_1(\boldsymbol{X}) \leq \hat{g}_2(\boldsymbol{X})$，则称随机区间

$$[\hat{g}_1(\boldsymbol{X}), \hat{g}_2(\boldsymbol{X})]$$

为$g(\theta)$的一个区间估计。

根据这个定义，从形式上看，任何一个满足条件$\hat{g}_1 \le \hat{g}_2$的统计量$\hat{g}_1$，$\hat{g}_2$都可以构成$g(\theta)$的一个区间估计$[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$。

根据这个定义，从形式上看，任何一个满足条件$\hat{g}_1 \leq \hat{g}_2$的统计量$\hat{g}_1$，$\hat{g}_2$都可以构成$g(\theta)$的一个区间估计$[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$。

既然一个未知参数的区间估计有很多种，如何从中挑选一个好的区间估计呢？

这就涉及评价一个区间估计优劣的标准问题。评价一个区间估计优劣的标准有两个要素：可靠度与精度（也称精确度）。

这就涉及评价一个区间估计优劣的标准问题。评价一个区间估计优劣的标准有两个要素：可靠度与精度（也称精确度）。

可靠度是指待估参数$g(\theta)$被包含在$[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$内可能性的大小。可能性越大，可靠度越高。

这就涉及评价一个区间估计优劣的标准问题。评价一个区间估计优劣的标准有两个要素：可靠度与精度（也称精确度）。

可靠度是指待估参数$g(\theta)$被包含在$[\hat{g}_1, \hat{g}_2]$内可能性的大小。可能性越大，可靠度越高。

精度可由随即区间的平均长度来度量。长度越短，精度越高。

不言而喻，希望所作的区间估计既有高的可靠度，又有高的精度。

不言而喻，希望所作的区间估计既有高的可靠度，又有高的精度。

但这二者往往是彼此矛盾的，不可能同时都很高。

不言而喻，希望所作的区间估计既有高的可靠度，又有高的精度。

但这二者往往是彼此矛盾的，不可能同时都很高。

当样本大小固定时，若精度提高了，可靠度就降低；反之，若可靠度提高，则精度就降低。

举例来说：有人要求对科大少年班学生入学的年龄做一个区间估计。

举例来说：有人要求对科大少年班学生入学的年龄做一个区间估计。

甲：估计少年班学生入学年龄为14-16周岁，这个估计区间精度很高（区间长度短），但可靠度小（概率小）。

4.1.1 参数的区间估计问题

举例来说：有人要求对科大少年班学生入学的年龄做一个区间估计。

甲：估计少年班学生入学年龄为14-16周岁，这个估计区间精度很高（区间长度短），但可靠度小（概率小）。

因为根据历年记载，少年班学生的入学年龄最小的是12岁，在该估计区间之外。

4.1.1 参数的区间估计问题

乙：估计少年班学生的入学年龄为10-18岁，这个可靠度很高（概率大）。

乙：估计少年班学生的入学年龄为10-18岁，这个可靠度很高（概率大）。

因为根据历年记载还没有超过这个范围，更何况少年班入学年龄上限是16岁，乙估计的精度较差（区间长度长）。

乙：估计少年班学生的入学年龄为10-18岁，这个可靠度很高（概率大）。

因为根据历年记载还没有超过这个范围，更何况少年班入学年龄上限是16岁，乙估计的精度较差（区间长度长）。

可见高可靠度和高精度往往不可兼得。

4.1.1 参数的区间估计问题

如何构造可靠度和精度尽可能高的区间估计呢？

如何构造可靠度和精度尽可能高的区间估计呢？

通常采用的方法是在保证一定可靠度的前提下（保证一定概率），选择精度尽可能高的区间估计（选择区间长度尽可能短的估计）。

如何构造可靠度和精度尽可能高的区间估计呢？

> 通常采用的方法是在保证一定可靠度的前提下（保证一定概率），选择精度尽可能高的区间估计（选择区间长度尽可能短的估计）。

这就是著名统计学家 Neyman 提出的一种妥协方案。

4.1.1 参数的区间估计问题

如何构造可靠度和精度尽可能高的区间估计呢？

通常采用的方法是在保证一定可靠度的前提下（保证一定概率），选择精度尽可能高的区间估计（选择区间长度尽可能短的估计）。

这就是著名统计学家 Neyman 提出的一种妥协方案。

当然，如果在应用中人们要求可靠度和精度都很高，则必须加大样本容量，也就是说要多做一些试验，才可能实现。

为方便记，以下假定被估计的$g(\theta)$就是θ自身，即$g(\theta) = \theta$。

为方便记，以下假定被估计的$g(\theta)$就是θ自身，即$g(\theta)=\theta$。

1. 置信度

为方便记，以下假定被估计的$g(\theta)$就是θ自身，即$g(\theta)=\theta$。

1. 置信度

设$\boldsymbol{X}$为样本，$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的一个区间估计。由于$\theta$是未知的，且样本是随机的，不能保证在任何情况下（即对任何具体的样本值），区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$必定包含$\theta$，而只能以一定的概率保证它。

为方便记，以下假定被估计的$g(\theta)$就是θ自身，即$g(\theta)=\theta$。

1. 置信度

设$\boldsymbol{X}$为样本，$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的一个区间估计。由于$\theta$是未知的，且样本是随机的，不能保证在任何情况下（即对任何具体的样本值），区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$必定包含$\theta$，而只能以一定的概率保证它。

希望随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率$P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2)$越大越好。这个概率就是前面所说的可靠度，数理统计学上称这个概率为置信度或置信水平。

定义 (4.1.2（置信水平，置信系数）)

设随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为参数$\theta$的一个区间估计，则$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率

定义 (4.1.2（置信水平，置信系数）)

设随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为参数$\theta$的一个区间估计，则$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率

$$P_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$$

定义 (4.1.2（置信水平，置信系数）)

设随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为参数$\theta$的一个区间估计，则$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率

$$P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2)$$

称为此区间估计的置信水平。

定义 (4.1.2（置信水平，置信系数）)

设随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$为参数$\theta$的一个区间估计，则$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率

$$P_\theta(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2)$$

称为此区间估计的置信水平。

置信水平在参数空间Θ上的下确界

定义 (4.1.2（置信水平，置信系数）)

设随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$为参数$\theta$的一个区间估计，则$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$包含$\theta$的概率

$$P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2)$$

称为此区间估计的置信水平。

置信水平在参数空间Θ上的下确界

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2)$$

称为该区间估计的置信系数。

4.1.2 置信区间

显然一个区间估计的置信水平越大越好。

4.1.2 置信区间

显然一个区间估计的置信水平越大越好。

为了计算置信水平或置信系数，需要利用有关统计量的精确分布或渐近分布。

显然一个区间估计的置信水平越大越好。

为了计算置信水平或置信系数，需要利用有关统计量的精确分布或渐近分布。

可见，抽样分布（统计量的概率分布）在评价和构造区间估计中发挥着重要的作用。

$\boxed{\text{可靠度=置信度=置信水平}}$

2.精度

2.精度

精度的标准不止一个。其中最常见的一个标准，即随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的平均长度

$$E_\theta(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1).$$

2.精度

精度的标准不止一个。其中最常见的一个标准，即随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$的平均长度

$$E_\theta(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1).$$

平均长度越短，精度越高，这也是符合实际的一项要求。

例 (4.1.1)

设样本$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，其中$\mu \in \mathcal{R}$，$\sigma^2 > 0$。$\mu$和$\sigma^2$的估计量分别是样本均值$\bar{X}$和样本方差$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$，用$[\bar{X} - kS/\sqrt{n}, \ \bar{X} + kS/\sqrt{n}]$作为总体均值$\mu$的区间估计。考虑其置信度和精度。

解

解

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

解

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$P_\theta(\bar{X} - kS/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + kS/\sqrt{n})$$

$$=$$

解

记$\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$
\begin{aligned}
&P_\theta(\bar{X}-kS/\sqrt{n}\le\mu\le\bar{X}+kS/\sqrt{n})\\
=\ &P_\theta(|\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S|\le k)\\
=\ &
\end{aligned}
$$

解

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$
\begin{aligned}
&P_\theta(\bar{X} - kS/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + kS/\sqrt{n}) \\
=\ &P_\theta(|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S| \le k) \\
=\ &P(|T| \le k),
\end{aligned}
$$

解

记$\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$
\begin{aligned}
&P_\theta(\bar{X}-kS/\sqrt{n}\le\mu\le\bar{X}+kS/\sqrt{n})\\
=&P_\theta(|\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S|\le k)\\
=&P(|T|\le k),
\end{aligned}
$$

其中$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S\sim t_{n-1}$，其分布与$\theta$无关，因而区间估计的置信系数为$P(|T|\le k)$。

解

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，上述区间估计的置信度为

$$
\begin{aligned}
& P_\theta(\bar{X} - kS/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + kS/\sqrt{n}) \\
= & P_\theta(|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S| \leq k) \\
= & P(|T| \leq k),
\end{aligned}
$$

其中$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$，其分布与$\theta$无关，因而区间估计的置信系数为$P(|T| \leq k)$。显然$k$越大，区间的置信系数越大，区间就越可靠。

由于$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，所以区间的平均长度为

由于$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，所以区间的平均长度为

$$\ell_k = \frac{2kE(S)}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}k\sigma\Gamma(n/2)}{\sqrt{n(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}.$$

由于$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，所以区间的平均长度为

$$\ell_k = \frac{2kE(S)}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}k\sigma\Gamma(n/2)}{\sqrt{n(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}.$$

显然，k越大，区间也越长，精度就越差。 □

由于$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，所以区间的平均长度为

$$\ell_k = \frac{2kE(S)}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{2}k\sigma\Gamma(n/2)}{\sqrt{n(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}.$$

显然，k越大，区间也越长，精度就越差。 $\square$

注：这里$E(S) \neq \sqrt{E(S^2)}$，计算$E(S)$需先计算S的概率密度函数，再计算其期望$E(S)$。

4.1.2 置信区间

由上例可见，在样本容量n给定后，为了提高置信度，需要增加k值，从而放大了区间，降低了精度。

4.1.2 置信区间

由上例可见，在样本容量n给定后，为了提高置信度，需要增加k值，从而放大了区间，降低了精度。

反过来，为了提高精度，需要减小k值，从而缩短了区间，降低了置信度。

由上例可见，在样本容量n给定后，为了提高置信度，需要增加k值，从而放大了区间，降低了精度。

反过来，为了提高精度，需要减小k值，从而缩短了区间，降低了置信度。

置信度与精度互相制约着。

4.1.2 置信区间

如前所述，面对这一矛盾，著名统计学家 Neyman 建议采取如下方案：

如前所述，面对这一矛盾，著名统计学家 Neyman 建议采取如下方案：

> 在保证置信系数达到指定要求的前提下，尽可能提高精度。

4.1.2 置信区间

如前所述，面对这一矛盾，著名统计学家 Neyman 建议采取如下方案：

在保证置信系数达到指定要求的前提下，尽可能提高精度。

即保证一定概率，找区间长度最短的估计。

4.1.2 置信区间

如前所述，面对这一矛盾，著名统计学家 Neyman 建议采取如下方案：

> 在保证置信系数达到指定要求的前提下，尽可能提高精度。

即保证一定概率，找区间长度最短的估计。

这一建议导致引入如下置信区间的概念，由于是 Neyman 建议的，通常也称置信区间为 Neyman 置信区间。

定义 (4.1.3（置信区间）)

设$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是参数$\theta$的一个区间估计，若对于给定的$0 < \alpha < 1$，有

定义 (4.1.3（置信区间）)

设$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是参数$\theta$的一个区间估计，若对于给定的$0 < \alpha < 1$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})) \geq 1 - \alpha,\ \theta \in \Theta,$$

定义 (4.1.3（置信区间）)

设$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是参数$\theta$的一个区间估计，若对于给定的$0 < \alpha < 1$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})) \geq 1 - \alpha,\ \theta \in \Theta,$$

则称$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的置信水平（Confidence level）为$1 - \alpha$的置信区间（Confidence Interval）。

定义 (4.1.3（置信区间）)

设$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是参数$\theta$的一个区间估计，若对于给定的$0 < \alpha < 1$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})) \geq 1 - \alpha,\ \theta \in \Theta,$$

则称$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的置信水平（Confidence level）为$1 - \alpha$的置信区间（Confidence Interval）。

而

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X}))$$

定义 (4.1.3（置信区间）)

设$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是参数$\theta$的一个区间估计，若对于给定的$0<\alpha<1$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})) \ge 1-\alpha,\ \theta \in \Theta,$$

则称$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的置信水平（Confidence level）为$1-\alpha$的置信区间（Confidence Interval）。

而

$$\inf_{\theta\in\Theta} P_\theta(\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X}))$$

称为$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$的置信系数。

置信区间有如下频率解释：

置信区间有如下频率解释：

设$\alpha = 0.05$，则$1-\alpha = 0.95$。若把置信区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$反复使用多次，如使用100次，平均大约有95次随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$包含真参数$\theta$，平均大约有5次随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$不包含$\theta$。当使用次数充分大时，频率接近于置信系数。

4.1.3 置信限

在一些实际问题中，人们感兴趣的有时仅仅是未知参数的置信上限或置信下限。

4.1.3 置信限

在一些实际问题中，人们感兴趣的有时仅仅是未知参数的置信上限或置信下限。

例如，一种新材料的强度，关心它最低不少于多少（置信下限）；

4.1.3 置信限

在一些实际问题中，人们感兴趣的有时仅仅是未知参数的置信上限或置信下限。

例如，一种新材料的强度，关心它最低不少于多少（置信下限）；
一个工厂的废品率，关心它最高不超过多少等（置信上限）。

4.1.3 置信限

在一些实际问题中，人们感兴趣的有时仅仅是未知参数的置信上限或置信下限。

例如，一种新材料的强度，关心它最低不少于多少（置信下限）；
一个工厂的废品率，关心它最高不超过多少等（置信上限）。

这也是一种区间估计，称之为置信下限或置信上限，定义如下。

定义（（置信限））

设$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，若对给定的$0 < \alpha < 1$，有

定义（（置信限））

设$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，若对给定的$0<\alpha<1$，有

$$P_\theta(\theta \leq \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \geq 1-\alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta,$$

定义（（置信限））

设$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，若对给定的$0 < \alpha < 1$，有

$$P_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \ge 1 - \alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta,$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta) \ge 1 - \alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta$$

定义（（置信限））

设$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，若对给定的$0<\alpha<1$，有

$$P_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \ge 1-\alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta,$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta) \ge 1-\alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta$$

则分别称$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$分别是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的（单侧）置信上限和置信下限。

定义（（置信限））

设$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，在参数空间$\Theta$上取值的两个统计量，若对给定的$0 < \alpha < 1$，有

$$P_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) \ge 1 - \alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta,$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta) \ge 1 - \alpha, \text{ 一切}\theta \in \Theta$$

则分别称$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$分别是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的（单侧）置信上限和置信下限。

上式左端概率在参数空间Θ上的下确界分别称为置信上、下限的置信系数。

4.1.3 置信限

显然，对置信上限$\hat{\theta}_U$而言，若$E(\hat{\theta}_U)$越小，其精度越高；对置信下限$\hat{\theta}_L$而言，若$E(\hat{\theta}_L)$越大，则置信下限的精度越高。

显然，对置信上限$\hat{\theta}_U$而言，若$E(\hat{\theta}_U)$越小，其精度越高；对置信下限$\hat{\theta}_L$而言，若$E(\hat{\theta}_L)$越大，则置信下限的精度越高。

容易看出，单侧置信上、下限都是置信区间的特例。

4.1.3 置信限

显然，对置信上限$\hat{\theta}_U$而言，若$E(\hat{\theta}_U)$越小，其精度越高；对置信下限$\hat{\theta}_L$而言，若$E(\hat{\theta}_L)$越大，则置信下限的精度越高。

容易看出，单侧置信上、下限都是置信区间的特例。

因此寻求置信区间的方法可以毫不困难地用来寻求单侧置信上、下限。

4.1.3 置信限

显然，对置信上限$\hat{\theta}_U$而言，若$E(\hat{\theta}_U)$越小，其精度越高；对置信下限$\hat{\theta}_L$而言，若$E(\hat{\theta}_L)$越大，则置信下限的精度越高。

容易看出，单侧置信上、下限都是置信区间的特例。

因此寻求置信区间的方法可以毫不困难地用来寻求单侧置信上、下限。

单侧置信限与双侧置信限（置信区间）之间存在着一个简单的联系，下述的引理说明，在有了单侧置信上、下限后，不难求得置信区间。

引理 (4.1.1)

设$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})$和$\hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$分别是参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha_1$和$1-\alpha_2$的单侧置信下限和置信上限，且对任何样本$\boldsymbol{X}$都有$\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leq \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})$，则$[\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})]$是$\theta$的置信水平为$1-(\alpha_1+\alpha_2)$的双侧置信区间。

证明

证明

在引理的假设下，以下三个事件：

证明

在引理的假设下，以下三个事件：

$$\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\}$$

证明

在引理的假设下，以下三个事件：

$$\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\}$$

是互不相容的，“三个事件之并”为“必然事件”。

证明

在引理的假设下，以下三个事件：

$$\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\}$$

是互不相容的，“三个事件之并”为“必然事件”。再考虑到

证明

在引理的假设下，以下三个事件：

$$\{\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})\},\ \{\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})\}$$

是互不相容的，“三个事件之并”为“必然事件”。再考虑到

$$P_\theta(\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) = 1 - P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta) < \alpha_1,$$
$$P_\theta(\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) = 1 - P_\theta(\theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) < \alpha_2$$

4.1.3 置信限

因此有

因此有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) = 1 - P_\theta(\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) - P_\theta(\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}))$$
$$\ge 1 - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

因此有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X})) = 1 - P_\theta(\theta < \hat{\theta}_L(\boldsymbol{X})) - P_\theta(\theta > \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}))$$
$$\ge 1 - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

由定义4.1.3可知，$(\hat{\theta}_L(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_U(\boldsymbol{X}))$是$\theta$的置信水平为$1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$的双侧置信区间。 $\square$

4.1.4 置信域

如果将一维参数θ推广到k维（$k \geq 2$）的情形，就得到如下定义的置信域。

如果将一维参数θ推广到k维（$k \geq 2$）的情形，就得到如下定义的置信域。

定义 (4.1.5（置信域）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta)\}$，$\Theta$是参数空间，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$，$k \geq 2$。$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是来自分布族$\mathcal{F}$的样本。若统计量$S(\boldsymbol{X})$满足

4.1.4 置信域

如果将一维参数θ推广到k维（$k \geq 2$）的情形，就得到如下定义的置信域。

定义 (4.1.5（置信域）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta)\}$，$\Theta$是参数空间，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$，$k \geq 2$。$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是来自分布族$\mathcal{F}$的样本。若统计量$S(\boldsymbol{X})$满足

（1）对任一样本$\boldsymbol{X}$，$S(\boldsymbol{X})$是Θ的一个子集；

4.1.4 置信域

如果将一维参数θ推广到k维（$k \geq 2$）的情形，就得到如下定义的置信域。

定义 (4.1.5（置信域）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta)\}$，$\Theta$是参数空间，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$，$k \geq 2$。$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是来自分布族$\mathcal{F}$的样本。若统计量$S(\boldsymbol{X})$满足

（1）对任一样本$\boldsymbol{X}$，$S(\boldsymbol{X})$是Θ的一个子集；

（2）对给定的$0 < \alpha < 1$，$P_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\boldsymbol{X})) \geq 1 - \alpha$，一切$\boldsymbol{\theta} \in \Theta$，

如果将一维参数θ推广到k维（$k \geq 2$）的情形，就得到如下定义的置信域。

定义 (4.1.5（置信域）)

设有一个参数分布族$\mathcal{F} = \{f(x, \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta)\}$，$\Theta$是参数空间，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$，$k \geq 2$。$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是来自分布族$\mathcal{F}$的样本。若统计量$S(\boldsymbol{X})$满足

（1）对任一样本$\boldsymbol{X}$，$S(\boldsymbol{X})$是Θ的一个子集；

（2）对给定的$0 < \alpha < 1$，$P_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\boldsymbol{X})) \geq 1 - \alpha$，一切$\boldsymbol{\theta} \in \Theta$，

则称$S(\boldsymbol{X})$是$\boldsymbol{\theta}$的置信水平为$1-\alpha$的**置信域**或**置信集**，

而$\inf\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} P_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} \in S(\boldsymbol{X}))$称为**置信系数**。

在多维场合，置信域$S(\boldsymbol{X})$的形状可以是各种各样的，但实用上只限于一些规则的几何图像，如其各面与坐标平面平行的长方体、球、椭球等。

4.1.4 置信域

在多维场合，置信域$S(\boldsymbol{X})$的形状可以是各种各样的，但实用上只限于一些规则的几何图像，如其各面与坐标平面平行的长方体、球、椭球等。

特别当置信集是长方体（其面与坐标平面平行）时，它又称为联合区间估计。

目前应用最广泛的区间估计的形式是Neyman的置信区间。4.2节和4.3节将介绍这一方法。

目前应用最广泛的区间估计的形式是Neyman的置信区间。4.2节和4.3节将介绍这一方法。

这一方法的关键是基于点估计去构造枢轴变量，因此也称为枢轴变量法。

4.1.5 构造区间估计的方法

目前应用最广泛的区间估计的形式是Neyman的置信区间。4.2节和4.3节将介绍这一方法。

这一方法的关键是基于点估计去构造枢轴变量，因此也称为枢轴变量法。

其核心思想就是寻求点估计$T=T(\boldsymbol{X})$和参数θ的函数（称为枢轴变量）$\varphi(T,\theta)$，使其分布完全已知，进而利用分位数就可以确定置信区间。

4.1.5 构造区间估计的方法

另外一种构造区间估计的重要方法是利用假设检验来构造置信区间。

4.1.5 构造区间估计的方法

另外一种构造区间估计的重要方法是利用假设检验来构造置信区间。

它与枢轴变量法同属于一个理论体系，即Neyman的关于置信区间和假设检验的理论。

目录

构造枢轴变量的基本要点，就是在参数的点估计基础上，去寻求满足要求的置信区间。

4.2.1 引言

构造枢轴变量的基本要点，就是在参数的点估计基础上，去寻求满足要求的置信区间。

下面举一个例子，说明是如何基于点估计去构造置信区间的。

例 (4.2.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，此处$\sigma^2$已知，求$\mu$的置信系数为$1 - \alpha$的置信区间。

解

解

显然，μ的一个良好的点估计是$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$（矩估计，MLE；无偏估计，UMVUE），其分布为$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，将其标准化得

解

显然，μ的一个良好的点估计是$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$（矩估计，MLE；无偏估计，UMVUE），其分布为$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，将其标准化得

$$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1),$$

解

显然，μ的一个良好的点估计是$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$（矩估计，MLE；无偏估计，UMVUE），其分布为$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，将其标准化得

$$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1),$$

其分布与μ无关。

4.2.1 引言

由正态分布的对称性，可得

由正态分布的对称性，可得

$$P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right|<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

4.2.1 引言

由正态分布的对称性，可得

$$P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right|<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

此处$u_{\alpha/2}$为标准正态分布的上侧$\alpha/2$分位数。

由正态分布的对称性，可得

$$P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right|<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

此处$u_{\alpha/2}$为标准正态分布的上侧$\alpha/2$分位数。

经不等式等价变形，可知

由正态分布的对称性，可得

$$P_\mu\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right|<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha,$$

此处$u_{\alpha/2}$为标准正态分布的上侧$\alpha/2$分位数。

经不等式等价变形，可知

$$P_\mu\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha.$$

因此$[\bar{X}-\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n},\bar{X}+\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$为$\mu$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。令

因此$[\bar{X}-\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X}+\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$为$\mu$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。令

$$d=\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n},$$

因此$[\bar{X}-\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X}+\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$为$\mu$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。令

$$d=\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n},$$

由于$\bar{X}$的分布关于μ对称且为单峰，故在指定置信系数下，这种形式的置信区间$[\bar{X}-d, \bar{X}+d]$长度最短。 □

采用枢轴变量法构造置信区间的步骤如下：

采用枢轴变量法构造置信区间的步骤如下:

（1）找待估参数μ的一个良好点估计。

采用枢轴变量法构造置信区间的步骤如下：

（1）找待估参数μ的一个良好点估计。

此例中这个点估计是$T(\boldsymbol{X}) = \bar{X}$。

（2）构造一个$T = T(\boldsymbol{X})$和μ的函数$\varphi(T, \mu)$，使其满足

（2）构造一个$T=T(\boldsymbol{X})$和μ的函数$\varphi(T,\mu)$，使其满足

（i）其表达式与待估参数μ有关，

（2）构造一个$T = T(\boldsymbol{X})$和μ的函数$\varphi(T, \mu)$，使其满足

（i）其表达式与待估参数μ有关，

（ii）其分布与待估参数μ无关，

（2）构造一个$T = T(\boldsymbol{X})$和μ的函数$\varphi(T,\mu)$，使其满足

（i）其表达式与待估参数μ有关，

（ii）其分布与待估参数μ无关，

则称随机变量$\varphi(T,\mu)$为**枢轴变量**。

（2）构造一个$T=T(\boldsymbol{X})$和μ的函数$\varphi(T,\mu)$，使其满足

（i）其表达式与待估参数μ有关，

（ii）其分布与待估参数μ无关，

则称随机变量$\varphi(T,\mu)$为**枢轴变量**。

本例中这一变量即为$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$，它的表达式与$\mu$有关，但其分布$N(0,1)$与$\mu$无关。因此$U$为枢轴变量。

（3）对给定的$0<\alpha<1$，决定两个常数a和b（选择a,b使区间长度$b-a$尽可能短，本例中a,b分别为$-u_{\frac{\alpha}{2}}$和$+u_{\frac{\alpha}{2}}$），使得

（3）对给定的$0 < \alpha < 1$，决定两个常数a和b（选择a, b使区间长度$b - a$尽可能短，本例中a, b分别为$-u_{\frac{\alpha}{2}}$和$+u_{\frac{\alpha}{2}}$），使得

$$P_\mu(a \leq \varphi(T, \mu) \leq b) = 1 - \alpha.$$

（3）对给定的$0 < \alpha < 1$，决定两个常数a和b（选择a, b使区间长度$b - a$尽可能短，本例中a, b分别为$-u_{\frac{\alpha}{2}}$和$+u_{\frac{\alpha}{2}}$），使得

$$P_\mu(a \leq \varphi(T, \mu) \leq b) = 1 - \alpha.$$

解括号中的不等式得到$\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}) \leq \mu \leq \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})$，则有

（3）对给定的$0 < \alpha < 1$，决定两个常数a和b（选择a, b使区间长度$b - a$尽可能短，本例中a, b分别为$-u_{\frac{\alpha}{2}}$和$+u_{\frac{\alpha}{2}}$），使得

$$P_\mu(a \le \varphi(T, \mu) \le b) = 1 - \alpha.$$

解括号中的不等式得到$\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}) \le \mu \le \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})$，则有

$$P_\mu(\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}) \le \mu \le \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})) = 1 - \alpha.$$

（3）对给定的$0 < \alpha < 1$，决定两个常数a和b（选择a, b使区间长度$b - a$尽可能短，本例中a, b分别为$-u_{\frac{\alpha}{2}}$和$+u_{\frac{\alpha}{2}}$），使得

$$P_\mu(a \le \varphi(T, \mu) \le b) = 1 - \alpha.$$

解括号中的不等式得到$\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}) \le \mu \le \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})$，则有

$$P_\mu(\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}) \le \mu \le \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})) = 1 - \alpha.$$

这表明$[\hat{\mu}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\mu}_2(\boldsymbol{X})]$是$\mu$的置信水平为$1 - \alpha$的置信区间。类似的步骤可以获得$\mu$的置信水平为$1 - \alpha$的单侧置信上、下限。 $\square$

假设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本。记

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

假设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本。记

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i - \bar{X})^2,$$

即$\bar{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差。

1. σ^2已知时，正态总体均值μ的置信区间

1. σ^2已知时，正态总体均值μ的置信区间

μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

1. σ^2已知时，正态总体均值μ的置信区间

μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}],$$

1. σ^2已知时，正态总体均值μ的置信区间

μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}],$$

其单侧置信上、下限分别为$\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha}$和$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha}$。

1. σ^2已知时，正态总体均值μ的置信区间

μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}],$$

其单侧置信上、下限分别为$\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}$和$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha}$。

由上式可知，置信区间的长度（置信区间的上限减去下限）为$\ell_n = 2\sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

由$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$可以看出，

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

由$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$可以看出，

（1）样本容量n越大，该区间越短，精度就越高。

由$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$可以看出，

（1）样本容量n越大，该区间越短，精度就越高。

（2）σ越大，则ℓ_n越大，精度越低。这是因为方差越大，随机影响也就越大，精度就会低下来。

由$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$可以看出，

（1）样本容量n越大，该区间越短，精度就越高。

（2）σ越大，则ℓ_n越大，精度越低。这是因为方差越大，随机影响也就越大，精度就会低下来。

（3）置信系数$1-\alpha$越大，则α越小，从而$u_{\alpha/2}$就越大，ℓ_n越长，精度就越低。

由$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$可以看出，

（1）样本容量n越大，该区间越短，精度就越高。

（2）σ越大，则ℓ_n越大，精度越低。这是因为方差越大，随机影响也就越大，精度就会低下来。

（3）置信系数$1-\alpha$越大，则α越小，从而$u_{\alpha/2}$就越大，ℓ_n越长，精度就越低。

由此可见，在σ和α固定的情形下，要提高精度，只有增加样本容量。

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

例如，置信系数$1-\alpha$固定，要使上述置信区间长度$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \le \ell_0$，$\ell_0$为给定的常数，则

例如，置信系数$1-\alpha$固定，要使上述置信区间长度$\ell_n = \frac{2\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \ell_0$，$\ell_0$为给定的常数，则

$$n \geq [(2\sigma u_{\alpha/2}/\ell_0)^2] + 1,$$

其中$[x]$表示实数x的整数部分。

例 (4.2.2)

假设国庆期间大学生的娱乐支出服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$。如果希望以大学生娱乐支出均值的置信系数90%的置信区间误差幅度为100元（对称置信区间的“误差”定义为其长度的一半），试在下述情形下计算至少要调查多少位大学生？

例 (4.2.2)

假设国庆期间大学生的娱乐支出服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。如果希望以大学生娱乐支出均值的置信系数90%的置信区间误差幅度为100元（对称置信区间的“误差”定义为其长度的一半），试在下述情形下计算至少要调查多少位大学生？

（1）σ=200元；

例 (4.2.2)

假设国庆期间大学生的娱乐支出服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。如果希望以大学生娱乐支出均值的置信系数90%的置信区间误差幅度为100元（对称置信区间的“误差”定义为其长度的一半），试在下述情形下计算至少要调查多少位大学生？

（1）σ=200元；

（2）根据经验，大约96%的大学生娱乐支出在100元到1700元之间。

解

（1）由于$\sigma = 200$，$u_{0.05} = 1.645$已知，我们已经知道μ的$(1-\alpha)$置信区间为$\bar{X} \pm \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。因此误差幅度$d = \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。从而由

解

（1）由于$\sigma = 200$，$u_{0.05} = 1.645$已知，我们已经知道μ的$(1-\alpha)$置信区间为$\bar{X} \pm \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。因此误差幅度$d = \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。从而由

$$\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \le 100$$

得到

解

（1）由于$\sigma = 200$，$u_{0.05} = 1.645$已知，我们已经知道μ的$(1-\alpha)$置信区间为$\bar{X} \pm \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。因此误差幅度$d = \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。从而由

$$\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq 100$$

得到

$$n \geq \left(\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{100}\right)^2 = \left(\frac{200 \times 1.645}{100}\right)^2 \approx 10.82.$$

解

（1）由于$\sigma = 200$，$u_{0.05} = 1.645$已知，我们已经知道μ的$(1-\alpha)$置信区间为$\bar{X} \pm \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。因此误差幅度$d = \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}$。从而由

$$\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq 100$$

得到

$$n \geq \left(\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{100}\right)^2 = \left(\frac{200 \times 1.645}{100}\right)^2 \approx 10.82.$$

即至少需要调查11位大学生才可满足要求。

（2）由于σ^2未知，因此需要估计σ^2。注意此时在试验前，还没有观测到样本，因此也不能使用样本方差进行估计。

（2）由于σ^2未知，因此需要估计σ^2。注意此时在试验前，还没有观测到样本，因此也不能使用样本方差进行估计。

由题意，经验表明大约96%的大学生娱乐支出在100元到1700元之间。由于正态分布的等尾性，我们可以认为2%的大学生支出不超过100元，98%的大学生支出不超过1700元。

查标准正态分布表可知98%分位数与2%分位数之差约为4σ，因此标准差的一个粗糙估计可取为

查标准正态分布表可知98%分位数与2%分位数之差约为4σ，因此标准差的一个粗糙估计可取为

$$\hat{\sigma} = \frac{\{\text{样本}98\%\text{分位数}\} - \{\text{样本}2\%\text{分位数}\}}{4} = \frac{1700 - 100}{4} = 400.$$

从而样本量

查标准正态分布表可知98%分位数与2%分位数之差约为4σ，因此标准差的一个粗糙估计可取为

$$\hat{\sigma} = \frac{\{\text{样本}98\%\text{分位数}\} - \{\text{样本}2\%\text{分位数}\}}{4} = \frac{1700 - 100}{4} = 400.$$

从而样本量

$$n \geq \left(\frac{\hat{\sigma} u_{\alpha/2}}{100}\right)^2 = \left(\frac{400 \times 1.645}{100}\right)^2 \approx 43.30.$$

查标准正态分布表可知98%分位数与2%分位数之差约为4σ，因此标准差的一个粗糙估计可取为

$$\hat{\sigma} = \frac{\{\text{样本98\%分位数}\} - \{\text{样本2\%分位数}\}}{4} = \frac{1700 - 100}{4} = 400.$$

从而样本量

$$n \geq \left(\frac{\hat{\sigma} u_{\alpha/2}}{100}\right)^2 = \left(\frac{400 \times 1.645}{100}\right)^2 \approx 43.30.$$

即为达到要求至少需要调查44位大学生。这里体现了利用已知信息的统计思想。 □

2. σ^2未知时，正态总体均值μ的置信区间

2. σ^2未知时，正态总体均值μ的置信区间

在这种情况下，μ的良好的点估计仍为$\bar{X}$。由于σ^2未知，随机变量$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$在此不能作为枢轴变量，将其中的$\sigma$用$S$代替，得到

2. σ^2未知时，正态总体均值μ的置信区间

在这种情况下，μ的良好的点估计仍为$\bar{X}$。由于σ^2未知，随机变量$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$在此不能作为枢轴变量，将其中的$\sigma$用$S$代替，得到

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}.$$

2. σ^2未知时，正态总体均值μ的置信区间

在这种情况下，μ的良好的点估计仍为$\bar{X}$。由于σ^2未知，随机变量$U=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma$在此不能作为枢轴变量，将其中的$\sigma$用$S$代替，得到

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}.$$

已知$T\sim t_{n-1}$，可见T的表达式与μ有关，而其分布与μ无关，故取T为枢轴变量。

由于t分布关于原点对称，令

由于t分布关于原点对称，令

$$P(|T| \leq c) = P\left(-c \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \leq c\right) = 1 - \alpha,$$

由于t分布关于原点对称，令

$$P(|T| \le c) = P\left(-c \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \le c\right) = 1-\alpha,$$

则$c = t_{n-1}(\alpha/2)$。将括号中的不等式经过等价变形得μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

由于t分布关于原点对称，令

$$P(|T| \le c) = P\left(-c \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \le c\right) = 1 - \alpha,$$

则$c = t_{n-1}(\alpha/2)$。将括号中的不等式经过等价变形得μ的置信系数为$1 - \alpha$的置信区间为

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)],$$

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

由于t分布关于原点对称，令

$$P(|T| \le c) = P\left(-c \le \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \le c\right) = 1-\alpha,$$

则$c = t_{n-1}(\alpha/2)$。将括号中的不等式经过等价变形得μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)],$$

其单侧置信上、下限分别为$\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$和$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$。

例 (4.2.3)

为测得某种溶液中的甲醛浓度，取样得4个独立测定值的平均值$\bar{X}=8.34\%$，样本标准差$S=0.03\%$，并设测量值近似服从正态分布，求总体均值μ的95%的置信区间。

解

解

因为$1-\alpha=0.95$，$n=4$，查表得$t_{n-1}(\alpha/2)=t_3(0.025)=3.182$，故有$St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}=0.03\%\times 3.182/2=0.0477\%$，$\bar{X}=8.34\%$，$\mu$的置信系数为$95\%$的置信区间为

解

因为$1-\alpha=0.95$，$n=4$，查表得$t_{n-1}(\alpha/2)=t_3(0.025)=3.182$，故有$St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}=0.03\%\times 3.182/2=0.0477\%$，$\bar{X}=8.34\%$，$\mu$的置信系数为95%的置信区间为

$$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)]=[8.292\%,8.388\%].$$

□

注 4.2.1

注 4.2.1

说这是一个置信系数为95%的置信区间，不是说μ有95%的概率落在这个区间内（因为μ不是随机变量，μ是一个未知的真值），而是说**把这个置信区间重复使用多次，如使用100次，大约有95次能盖住真参数μ，大约有5次不能盖住μ**（置信系数为95%的置信区间的含义）。

注 4.2.1

说这是一个置信系数为95%的置信区间，不是说μ有95%的概率落在这个区间内（因为μ不是随机变量，μ是一个未知的真值），而是说**把这个置信区间重复使用多次，如使用100次，大约有95次能盖住真参数μ，大约有5次不能盖住μ**（置信系数为95%的置信区间的含义）。

一旦算出具体的区间，如区间估计$[8.292\%, 8.388\%]$，它就是一个具体的确定的区间，μ是个未知常数，该区间是否盖住了μ，只有两个答案："是"或"不是"，没有概率可言。即不能说有95%的机会盖住μ了。

3. 正态总体方差σ^2的置信区间

3. 正态总体方差σ^2的置信区间

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，其中$\mu$和$\sigma^2$皆未知。此时$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$是$\sigma^2$的良好估计，且是无偏的。

3. 正态总体方差σ^2的置信区间

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，其中$\mu$和$\sigma^2$皆未知。此时$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$是$\sigma^2$的良好估计，且是无偏的。

已知$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$。取

3. 正态总体方差σ^2的置信区间

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，其中$\mu$和$\sigma^2$皆未知。此时$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$是$\sigma^2$的良好估计，且是无偏的。

已知$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$。取

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

为枢轴变量，其表达式与σ^2有关，而其分布与σ^2无关。

找d_1和d_2，使得

找d_1和d_2，使得

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(d_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq d_2\right) = 1-\alpha.$$

找d_1和d_2，使得

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(d_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq d_2\right) = 1-\alpha.$$

满足上式要求的d_1和d_2有无穷多对，其中有一对d_1和d_2使区间长度最短，但这样一对d_1和d_2常常需要用数值方法（除非枢轴变量为对称分布），不易求得，应用不方便。

通常的做法是**构造等尾的置信区间**，即令d_1和d_2满足下列要求：

通常的做法是**构造等尾的置信区间**，即令d_1和d_2满足下列要求：

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<d_1\right)=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>d_2\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

通常的做法是**构造等尾的置信区间**，即令d_1和d_2满足下列要求：

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<d_1\right)=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>d_2\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

由χ^2分布的上侧分位数表可知$d_1=\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$, $d_2=\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$，故有

通常的做法是**构造等尾的置信区间**，即令d_1和d_2满足下列要求：

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<d_1\right)=\frac{\alpha}{2},\quad P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>d_2\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

由χ^2分布的上侧分位数表可知$d_1=\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$, $d_2=\chi^2_{n-1}(\alpha/2)$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{n-1}(\alpha/2)\right)=1-\alpha.$$

最后再利用不等式的等价变形，得出σ^2的置信系数为$1-\alpha$等尾的置信区间

最后再利用不等式的等价变形，得出σ^2的置信系数为$1-\alpha$等尾的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right].$$

最后再利用不等式的等价变形，得出σ^2的置信系数为$1-\alpha$等尾的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right].$$

若把这个随机区间的两个端点开平方，得到σ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

最后再利用不等式的等价变形，得出σ^2的置信系数为$1-\alpha$等尾的置信区间

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right].$$

若把这个随机区间的两个端点开平方，得到σ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right)^{1/2},\ \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right)^{1/2}\right].$$

类似地，可得σ^2的置信系数为$1-\alpha$的单侧置信下、上限为$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(\alpha)$和$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$。

类似地，可得σ^2的置信系数为$1-\alpha$的单侧置信下、上限为$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(\alpha)$和$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$。

注 4.2.2

类似地，可得σ^2的置信系数为$1-\alpha$的单侧置信下、上限为$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(\alpha)$和$(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(1-\alpha)$。

注 4.2.2

上述等尾的置信区间不是最短的，但对正态总体参数的区间估计而言，其精度也不是很差，而且比较容易求得，因此实用中常采用这种置信区间。

4.2.2 单个正态总体参数的置信区间

当正态总体均值μ已知时，方差σ^2的置信区间如何求？（作业）

例 (4.2.4)

求例 4.2.3 中总体方差σ^2及σ的置信系数为95%的置信区间。

例 (4.2.4)

求例 4.2.3 中总体方差σ^2及σ的置信系数为95%的置信区间。

在例4.2.3中，为测得某种溶液中的甲醛浓度，取样得4个独立测定值的平均值$\bar{X} = 8.34\%$，样本标准差$S = 0.03\%$，并设测量值近似服从正态分布。

解

解

如同例4.2.3，$n-1=3$，$\alpha/2=0.025$，$1-\alpha/2=0.975$。查表求得$\chi_3^2(0.025)=9.348$，$\chi_3^2(0.975)=0.216$，$S^2=0.0009$，则σ^2的置信系数为95%的置信区间为

解

如同例4.2.3，$n-1=3$，$\alpha/2=0.025$，$1-\alpha/2=0.975$。查表求得$\chi_3^2(0.025)=9.348$，$\chi_3^2(0.975)=0.216$，$S^2=0.0009$，则σ^2的置信系数为95%的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}\right] = [0.00029, 0.0125],$$

解

如同例4.2.3，$n-1=3$，$\alpha/2=0.025$，$1-\alpha/2=0.975$。查表求得$\chi_3^2(0.025)=9.348$，$\chi_3^2(0.975)=0.216$，$S^2=0.0009$，则σ^2的置信系数为95%的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}\right]=[0.00029, 0.0125],$$

σ的置信系数为95%的置信区间为

解

如同例4.2.3，$n-1=3$，$\alpha/2=0.025$，$1-\alpha/2=0.975$。查表求得$\chi_3^2(0.025)=9.348$，$\chi_3^2(0.975)=0.216$，$S^2=0.0009$，则σ^2的置信系数为95%的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}\right]=[0.00029, 0.0125],$$

σ的置信系数为95%的置信区间为

$$\left[\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}\right)^{1/2}, \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)}\right)^{1/2}\right]=[0.017, 0.112].$$