

中国石油大学（北京）克拉玛依校区

2025-2026学年春季学期

《数理统计》测验试卷

考核方式：笔试（开卷）

班 级： _____

姓 名： _____

学 号： _____

题号	1	2	3	4	5	总分
分值	10	10	10	10	10	50
得分						

注意事项：

1. 试卷共 7 页（含封面），5 道题目，请勿漏答。
2. 你有 45 分钟时间完成测验。请勿拆开试卷。请勿在上表中书写任何内容。
3. 请将答案以整洁、连贯且符合逻辑的方式写在题后空白处。如果答案内容书写散乱、条理不清，将很难得到高分。
4. 缺少充分依据的答案不会给满分。无计算过程、解释或推导过程支持的正确答案不得分；但有基本正确的计算过程和解释支持的错误答案，可以得到部分分数。
5. 如果题后空白不够，可以使用纸张的背面，但请清楚标明。

1. 判断以下命题为“正确”或“错误”. 如果你判定为正确, 请简要解释你的依据; 如果你判定为错误, 请给出反例并作简要解释.

(a) (2分) 设 X_1, X_2, \dots, X_8 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本, 令

$$W = \sum_{i=1}^8 X_i, \quad Z = \sqrt{\sum_{i=1}^8 \left(X_i - \frac{W}{8}\right)^2}.$$

则 W 与 Z 相互独立.

(b) (2分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 $\theta \in \Theta$ 的一个矩估计量, 其中 Θ 是参数空间, 则对所有 $\theta \in \Theta$, 都有 $\mathbb{E}(T) = \theta$.

(c) (2分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 $\theta \in \Theta$ 的弱相合估计 (Θ 是参数空间), 即 T 依概率收敛于 θ . 则对所有 $n \geq 1$ 以及所有 $\theta \in \Theta$, 都有 $\mathbb{E}(T) = \theta$.

(d) (2分) 最大似然估计量最多只有一个. 换言之, 如果存在一个最大似然估计量, 那么它是唯一的.

(e) (2分) 设 $\mathcal{F} = \{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$ 是 C-R 正则分布族, θ 是未知参数, Θ 是参数空间.

$$I(\theta) = \mathbb{E} \left\{ \left[\frac{\partial \log f(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} < \infty$$

是 $f(x, \theta)$ 的 Fisher 信息量. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $f(x, \theta) \in \mathcal{F}$ 的一个简单随机样本,

统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的一个无偏估计量. 如果 $I(\theta) > 0$, 且

$$\mathbb{D}(T) = \frac{1}{n \cdot I(\theta)}, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则 T 一定是未知参数 θ 的最小方差无偏估计量.

2. (10 分) 总体 X 服从参数为 θ ($0 < \theta < 1$) 的 Bernoulli 分布, 即

$$\mathbb{P}(X = 1) = \theta, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \theta, \quad \text{其中 } \theta \text{ 未知.}$$

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自上述总体 X 的容量为 n 的简单随机样本. 证明 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 是 θ 的一个充分统计量.

3. (10分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

又设 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且与 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 求统计量

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的分布.

4. 设 θ 是实值未知参数, 假设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \theta \leq x \leq \theta + 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(a) (5 分) 求 θ 的矩估计.

(b) (5 分) 求 θ^2 的矩估计.

5. (10 分) 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (\theta > 0).$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自上述总体 X 的一个简单随机样本. 求 θ 的 MLE (最大似然估计量).