数理统计
第五章
参数假设检验

2026 年 5 月 20 日

目录

5.3.1 似然比检验的定义

似然比检验是 Neyman 和 Pearson 在 1928 年提出的构造假设检验的一般方法。

似然比检验是 Neyman 和 Pearson 在 1928 年提出的构造假设检验的一般方法。

它在假设检验中的地位，相当于最大似然估计在点估计中的地位。它可视为 Fisher 的最大似然原理在假设检验问题中的体现。

5.3.1 似然比检验的定义

似然比检验是 Neyman 和 Pearson 在 1928 年提出的构造假设检验的一般方法。

它在假设检验中的地位，相当于最大似然估计在点估计中的地位。它可视为 Fisher 的最大似然原理在假设检验问题中的体现。

由这种方法构造出来的检验，一般说有比较良好的性质，它的一个重要的有点就是适用面广，对分布族的形式没有什么特殊的要求。

5.3.1 似然比检验的定义

设有分布族$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$\Theta$为参数空间。令 $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ 为自上述分布族中抽取的简单样本，$f(\boldsymbol{x},\theta)$ 为样本的概率函数。要考虑检验问题：

5.3.1 似然比检验的定义

设有分布族$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$\Theta$为参数空间。令 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 为自上述分布族中抽取的简单样本，$f(\boldsymbol{x},\theta)$ 为样本的概率函数。要考虑检验问题：

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

设有分布族$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$\Theta$为参数空间。令 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 为自上述分布族中抽取的简单样本，$f(\boldsymbol{x},\theta)$ 为样本的概率函数。要考虑检验问题：

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

在有了样本 $\boldsymbol{x}$ 后，将 $f(\boldsymbol{x},\theta)$ 视为 θ 的函数，称为似然函数。

5.3.1 似然比检验的定义

设有分布族$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$，$\Theta$为参数空间。令 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 为自上述分布族中抽取的简单样本，$f(\boldsymbol{x},\theta)$ 为样本的概率函数。要考虑检验问题：

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

在有了样本 $\boldsymbol{x}$ 后，将 $f(\boldsymbol{x},\theta)$ 视为 θ 的函数，称为似然函数。

若 $f(\boldsymbol{x},\theta_1)<f(\boldsymbol{x},\theta_2)$，则认为真参数为 θ_2 的“似然性”较其为 θ_1 的“似然性”大。

由于假设检验在“$\theta \in \Theta_0$”与“$\theta \in \Theta_1$”这二者中选其一，自然考虑以下两个量：

由于假设检验在“$\theta \in \Theta_0$”与“$\theta \in \Theta_1$”这二者中选其一，自然考虑以下两个量：

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \theta),$$

$$L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_1} f(\boldsymbol{x}, \theta).$$

5.3.1 似然比检验的定义

由于假设检验在“$\theta \in \Theta_0$”与“$\theta \in \Theta_1$”这二者中选其一，自然考虑以下两个量：

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \theta),$$

$$L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_1} f(\boldsymbol{x}, \theta).$$

考虑其比值$L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，若此比值较大，则说明真参数在 Θ_1 内的“似然性”较大，因而倾向于拒绝假设“$\theta \in \Theta_0$”。

由于假设检验在“$\theta \in \Theta_0$”与“$\theta \in \Theta_1$”这二者中选其一，自然考虑以下两个量：

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} f(\boldsymbol{x}, \theta),$$

$$L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_1} f(\boldsymbol{x}, \theta).$$

考虑其比值$L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，若此比值较大，则说明真参数在 Θ_1 内的“似然性”较大，因而倾向于拒绝假设“$\theta \in \Theta_0$”。

反之，若此比值较小，倾向于接受假设"$\theta \in \Theta_0$"。

5.3.1 似然比检验的定义

若记 $\lambda(\boldsymbol{x}) = L_{\Theta}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，其中 $L_{\Theta}(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$。由于

若记 $\lambda(\boldsymbol{x}) = L_{\Theta}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，其中 $L_{\Theta}(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$。由于

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{L_{\Theta}(\boldsymbol{x})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})} = \max\left\{\frac{L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})}, 1\right\}$$

若记 $\lambda(\boldsymbol{x}) = L_\Theta(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，其中 $L_\Theta(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$。由于

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{L_\Theta(\boldsymbol{x})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})} = \max\left\{\frac{L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})}{L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})}, 1\right\}$$

与 $L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$ 同增或同减，可用 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 代替比值 $L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})/L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})$，这样做的好处是 $L_\Theta(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$ 的计算比 $L_{\Theta_1}(\boldsymbol{x})$ 要容易。

5.3.1 似然比检验的定义

定义 (5.3.1（似然比检验）)

设样本 $\boldsymbol{X}$ 有概率函数 $f(\boldsymbol{x},\theta)$, $\theta\in\Theta$，而 Θ_0 为参数空间 Θ 的真子集，考虑检验问题

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

则统计量

$$\lambda(\boldsymbol{x})=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f(\boldsymbol{x},\theta)}$$

称为关于该检验问题的似然比。

定义 (5.3.1（似然比检验）（续）)

而由下述定义的检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \lambda(\boldsymbol{x})>c,\\ r, & \lambda(\boldsymbol{x})=c,\\ 0, & \lambda(\boldsymbol{x})<c,\end{cases}$$

其中 c，r（$0\le r\le 1$）为待定常数，称为该检验问题的一个似然比检验（likelihood ratio test, LRT），有些文献中也称其为广义似然比检验。

定义 (5.3.1（似然比检验）（续）)

若样本分布为连续分布时，令

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \lambda(\boldsymbol{x}) > c, \\ 0, & \lambda(\boldsymbol{x}) \leq c. \end{cases}$$

检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的常数 c 和 r 的选择是要使检验具有给定的水平 α。

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

5.3.1 似然比检验的定义

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

（1）求似然函数 $f(\boldsymbol{x}, \theta)$，并明确参数空间 Θ 和 Θ_0 是什么；

5.3.1 似然比检验的定义

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

（1）求似然函数 $f(\boldsymbol{x},\theta)$，并明确参数空间 Θ 和 Θ_0 是什么；

（2）算出 $L_\Theta(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$ 和 $L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f(\boldsymbol{x},\theta)$；

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

（1）求似然函数 $f(\boldsymbol{x},\theta)$，并明确参数空间 Θ 和 Θ_0 是什么；

（2）算出 $L_{\Theta}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$ 和 $L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f(\boldsymbol{x},\theta)$；

（3）求出$\lambda(\boldsymbol{x})$ 或与其等价的统计量的分布；

5.3.1 似然比检验的定义

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

（1）求似然函数 $f(\boldsymbol{x},\theta)$，并明确参数空间 Θ 和 Θ_0 是什么；

（2）算出 $L_\Theta(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta}f(\boldsymbol{x},\theta)$ 和 $L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}f(\boldsymbol{x},\theta)$；

（3）求出$\lambda(\boldsymbol{x})$ 或与其等价的统计量的分布；

（4）确定 c 和 r 使检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 具有给定的检验水平 α。

根据上面所说，找似然比检验有以下步骤：

（1）求似然函数 $f(\boldsymbol{x},\theta)$，并明确参数空间 Θ 和 Θ_0 是什么；

（2）算出 $L_\Theta(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\theta)$ 和 $L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} f(\boldsymbol{x},\theta)$；

（3）求出$\lambda(\boldsymbol{x})$ 或与其等价的统计量的分布；

（4）确定 c 和 r 使检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 具有给定的检验水平 α。

其中最关键的是第（3）步。一般 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 的表达式复杂，求其分布不易。

但若 $\lambda(\boldsymbol{x})=g(T(\boldsymbol{x}))$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调上升（或下降）函数，则上述检验函数显然等价于

但若 $\lambda(\boldsymbol{x}) = g(T(\boldsymbol{x}))$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调上升（或下降）函数，则上述检验函数显然等价于

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{x}) > c', \\ r, & T(\boldsymbol{x}) = c', \\ 0, & T(\boldsymbol{x}) < c'. \end{cases}$$

但若 $\lambda(\boldsymbol{x}) = g(T(\boldsymbol{x}))$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调上升（或下降）函数，则上述检验函数显然等价于

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{x}) > c', \\ r, & T(\boldsymbol{x}) = c', \\ 0, & T(\boldsymbol{x}) < c'. \end{cases}$$

因此代替求 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 的分布，只要求出 $T(\boldsymbol{X})$ 的分布即可（若 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调下降函数，则将 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的不等式反向）。

但若 $\lambda(\boldsymbol{x}) = g(T(\boldsymbol{x}))$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调上升（或下降）函数，则上述检验函数显然等价于

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{x}) > c', \\ r, & T(\boldsymbol{x}) = c', \\ 0, & T(\boldsymbol{x}) < c'. \end{cases}$$

因此代替求 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 的分布，只要求出 $T(\boldsymbol{X})$ 的分布即可（若 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的单调下降函数，则将 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的不等式反向）。

如果 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 分布无法求得，可用其极限分布近似代替。

例 (5.3.1)

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 是从正态分布族 $\{N(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<\infty,\ \sigma^2>0\}$ 中抽取的随机样本。求下列检验问题的水平为 α 的似然比检验：

$$H_0:\ \mu=\mu_0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq\mu_0.$$

解:

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

解：

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

解:

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

在这里，参数空间为

解:

记 $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\},$$

在这里，参数空间为

$$\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma^2):\ -\infty<\mu<\infty,\ \sigma^2>0\}.$$

5.3.2 若干例子

零假设 H_0 对应的 Θ 的子集为

零假设 H_0 对应的 Θ 的子集为

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) : \ \mu = \mu_0, \ \sigma^2 > 0\}.$$

零假设 H_0 对应的 Θ 的子集为

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) : \ \mu = \mu_0, \ \sigma^2 > 0\}.$$

在 Θ 上，μ 和 σ^2 的最大似然估计（MLE）分别为

零假设 H_0 对应的 Θ 的子集为

$$\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2):\ \mu = \mu_0,\ \sigma^2 > 0\}.$$

在 Θ 上，μ 和 σ^2 的最大似然估计（MLE）分别为

$$\hat{\mu} = \bar{X},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2;$$

在 Θ_0 上，σ^2 的 MLE 为

在 Θ_0 上，σ^2 的 MLE 为

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

在 Θ_0 上，σ^2 的 MLE 为

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

故有

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\right)^{-n/2},$$

在 Θ_0 上，σ^2 的 MLE 为

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2.$$

故有

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x},\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\right)^{-n/2},$$

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = f(\boldsymbol{x},\mu_0,\tilde{\sigma}^2) = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)\right)^{-n/2}.$$

从而有

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 \right]^{-n/2}$$

$$=$$

从而有

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right]^{-n/2}$$

$$= \left[1 + n(\bar{x} - \mu_0)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right]^{n/2}$$

$$=$$

从而有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right]^{-n/2} \\ &= \left[1+n(\bar{x}-\mu_0)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{n/2} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}[T(\boldsymbol{x})]^2\right)^{n/2}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}) &= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right]^{-n/2} \\ &= \left[1+n(\bar{x}-\mu_0)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{n/2} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}[T(\boldsymbol{x})]^2\right)^{n/2}.\end{aligned}$$

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $|T(\boldsymbol{x})|$ 的严格增函数，故检验的拒绝域

$D=\{\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n):\ \lambda(\boldsymbol{X})>c'\}=\{\boldsymbol{X}:\ |T|>c\}$，其中

$T=T(\boldsymbol{X})=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$，而 $S^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$。

令

$$P(|T| > c|H_0) = \alpha.$$

利用下列事实：当 H_0 成立时 $T \sim t_{n-1}$，则可知 $c = t_{n-1}(\alpha/2)$。因此

令

$$P(|T|>c|H_0)=\alpha.$$

利用下列事实：当 H_0 成立时 $T\sim t_{n-1}$，则可知 $c=t_{n-1}(\alpha/2)$。因此

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & |T(\boldsymbol{x})|>t_{n-1}(\alpha/2),\\ 0, & |T(\boldsymbol{x})|\le t_{n-1}(\alpha/2)\end{cases}$$

令

$$P(|T| > c|H_0) = \alpha.$$

利用下列事实：当 H_0 成立时 $T \sim t_{n-1}$，则可知 $c = t_{n-1}(\alpha/2)$。因此

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & |T(\boldsymbol{x})| > t_{n-1}(\alpha/2), \\ 0, & |T(\boldsymbol{x})| \leq t_{n-1}(\alpha/2) \end{cases}$$

是检验问题的一个水平为 α 的似然比检验。 $\square$

例 (5.3.2)

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ 是从正态分布族 $\{N(\mu,\sigma^2):-\infty<\mu<\infty,\ \sigma^2>0\}$ 中抽取的随机样本。

求下列检验：

$$H_0:\ \mu\leq\mu_0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu>\mu_0$$

的水平为 α 的似然比检验。

解

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

解

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

解

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

$L_\Theta(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\boldsymbol{x}, \mu, \sigma^2)$ 与例5.3.1 完全相同。但参数空间 Θ_0 为

解

记 $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，则 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数为

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

$L_\Theta(\boldsymbol{x}) = \sup\limits_{\theta \in \Theta} f(\boldsymbol{x}, \mu, \sigma^2)$ 与例5.3.1 完全相同。但参数空间 Θ_0 为

$$\Theta_0 = \{\theta = (\mu, \sigma^2) : \ \mu \leq \mu_0, \ \sigma^2 > 0\}.$$

故

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\theta\in\Theta_0} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$=$$

故

$$
\begin{aligned}
L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) &= \sup_{\theta\in\Theta_0} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \\
&= \sup_{\theta\in\Theta_0} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 - \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) &= \sup_{\theta\in\Theta_0} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \\
&= \sup_{\theta\in\Theta_0} (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 - \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

$g(\mu)=\exp\{-n(\bar{x}-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$。当 σ^2 固定，$\mu\le\bar{x}$ 时，$g'(\mu)\ge 0$，故 $g(\mu)$ 关于 μ 单调增；当 $\mu\ge\bar{x}$ 时，$g'(\mu)\le 0$，故 $g(\mu)$ 关于 μ 单调降。

因此，

（1）当 $\bar{x} > \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \mu_0$ 处达到最大，故有

因此，

（1）当 $\bar{x} > \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \mu_0$ 处达到最大，故有

$$\min_{\mu \le \mu_0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2.$$

因此，

（1）当 $\bar{x} > \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \mu_0$ 处达到最大，故有

$$\min_{\mu \le \mu_0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2.$$

（2）当 $\bar{x} \le \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \bar{x}$ 处达到最大，故有

因此，

（1）当 $\bar{x} > \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \mu_0$ 处达到最大，故有

$$\min_{\mu \le \mu_0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2.$$

（2）当 $\bar{x} \le \mu_0$ 时，若 H_0 成立，$g(\mu)$ 在 $\mu = \bar{x}$ 处达到最大，故有

$$\min_{\mu \le \mu_0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

因此有

因此有

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} L_{\Theta}(\boldsymbol{x}), & \bar{x} \le \mu_0, \\ \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2\right)^{-n/2}, & \bar{x} > \mu_0. \end{cases}$$

因此有

$$L_{\Theta_0}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} L_{\Theta}(\boldsymbol{x}), & \bar{x} \le \mu_0, \\ \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{-n/2} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)^{-n/2}, & \bar{x} > \mu_0. \end{cases}$$

故

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \le \mu_0, \\ \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 / \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{\frac{n}{2}} = \left(1+\frac{1}{n-1}[T(\boldsymbol{x})]^2\right)^{\frac{n}{2}}, & \bar{x} > \mu_0. \end{cases}$$

5.3.2 若干例子

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X} : T > c\}.$$

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X} : T > c\}.$$

此处 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$，而 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$。

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X} : T > c\}.$$

此处 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$，而 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$。
由于检验水平 α 给定，c 由下式确定：

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n):\ \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X}:\ T > c\}.$$

此处 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$，而 $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$。
由于检验水平 α 给定，c 由下式确定：

$$P(T > c|\mu = \mu_0) = \alpha.$$

由于 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为 $T(\boldsymbol{x})$ 的严格增函数，因此似然比检验的拒绝域为

$$D = \{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \lambda(\boldsymbol{X}) > c'\} = \{\boldsymbol{X} : T > c\}.$$

此处 $T = T(\boldsymbol{X}) = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$，而 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$。由于检验水平 α 给定，c 由下式确定：

$$P(T > c|\mu = \mu_0) = \alpha.$$

当 $\mu = \mu_0$ 时，$T \sim t_{n-1}$，故知 $c = t_{n-1}(\alpha)$。

类似在 5.2 节中所述，上述检验的功效函数 $\beta_\varphi(\mu)$ 是 μ 的单调增函数，故有

类似在 5.2 节中所述，上述检验的功效函数 $\beta_\varphi(\mu)$ 是 μ 的单调增函数，故有

$$\beta_\varphi(\mu) \le \beta_\varphi(\mu_0) = \alpha, \quad \mu \le \mu_0.$$

类似在 5.2 节中所述，上述检验的功效函数 $\beta_\varphi(\mu)$ 是 μ 的单调增函数，故有

$$\beta_\varphi(\mu) \le \beta_\varphi(\mu_0) = \alpha, \quad \mu \le \mu_0.$$

因此

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & T(\boldsymbol{x}) > t_{n-1}(\alpha), \\ 0, & T(\boldsymbol{x}) \le t_{n-1}(\alpha). \end{cases}$$

为该检验问题的水平为 α 的似然比检验。 $\square$

在似然比检验的定义 5.3.1 中，为了确定检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的 c 和 r，就需要知道似然比 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 在零假设成立时的分布。

在似然比检验的定义 5.3.1 中，为了确定检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的 c 和 r，就需要知道似然比 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 在零假设成立时的分布。

在一些简单的例子中，似然比的精确分布可以求得。但在许多情况下，似然比有很多复杂的形状，其精确分布无法求得。

在似然比检验的定义 5.3.1 中，为了确定检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的 c 和 r，就需要知道似然比 $\lambda(\boldsymbol{X})$ 在零假设成立时的分布。

在一些简单的例子中，似然比的精确分布可以求得。但在许多情况下，似然比有很多复杂的形状，其精确分布无法求得。

在1938年，威尔克斯（S. S. Wilks）证明了：若 $X_1, \ldots, X_n$ 是简单样本，当 $n \to \infty$ 时，在零假设成立的条件下，似然比有一个简单的极限分布。利用该极限分布可以近似决定检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 中的 c 和 r。

Wilks 定理的确切陈述需要列出一大堆关于总体概率分布的假定，其证明也很复杂。

5.3.3* 似然比的渐近分布

Wilks 定理的确切陈述需要列出一大堆关于总体概率分布的假定，其证明也很复杂。

略去这些陈述，只强调其中一个至关重要的点，即要求参数空间 Θ 的维数要高于零假设成立时 Θ_0 的维数。

Wilks 定理的确切陈述需要列出一大堆关于总体概率分布的假定，其证明也很复杂。

略去这些陈述，只强调其中一个至关重要的点，即要求参数空间 Θ 的维数要高于零假设成立时 Θ_0 的维数。

如样本 $X_1, \ldots, X_n\ i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，$H_0:\ \mu = \mu_0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu \neq \mu_0$，则 $\Theta = \{\theta = (\mu, \sigma^2):\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0\}$ 是 R_2 中的上半平面，Θ 的维数是 2；而 $\Theta_0 = \{\theta = (\mu, \sigma^2):\ \mu = \mu_0,\ \sigma^2 > 0\}$，它是 Θ 中的一条直线，其维数是 1。

5.3.3* 似然比的渐近分布

定理 (5.3.1)

设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自总体密度 $f(x, \boldsymbol{\theta})$ 的简单样本，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为参数，总体密度函数 f 满足一定的正则条件。对检验问题

定理 (5.3.1)

设 $X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体密度 $f(x, \boldsymbol{\theta})$ 的简单样本，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为参数，总体密度函数 f 满足一定的正则条件。对检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \;\; vs \;\; H_1: \theta \in \Theta_1,$$

定理 (5.3.1)

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体密度 $f(x,\boldsymbol{\theta})$ 的简单样本，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为参数，总体密度函数 f 满足一定的正则条件。对检验问题

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

记参数空间 Θ 的维数为 k，Θ_0 的维数为 s，若 $k-s=d>0$，则在零假设 H_0 成立的条件下，当样本的大小 $n\to\infty$ 时有

5.3.3* 似然比的渐近分布

定理 (5.3.1)

设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体密度 $f(x,\boldsymbol{\theta})$ 的简单样本，其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为参数，总体密度函数 f 满足一定的正则条件。对检验问题

$$H_0:\ \theta\in\Theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta\in\Theta_1,$$

记参数空间 Θ 的维数为 k，Θ_0 的维数为 s，若 $k-s=d>0$，则在零假设 H_0 成立的条件下，当样本的大小 $n\to\infty$ 时有

$$2\ln\lambda(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\mathcal{L}}\chi^2_d.$$

目录

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

假设检验与区间估计这两个统计推断的形式表面上看好像完全不同，而实际上两者之间有着非常密切的关系。

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

假设检验与区间估计这两个统计推断的形式表面上看好像完全不同，而实际上两者之间有着非常密切的关系。

由单参数假设检验问题的水平为α的双边检验和单边检验，可以分别得到该参数的置信系数为$1-\alpha$的置信区间和置信限，反之亦然。

由双边假设检验得到置信区间:

由双边假设检验得到置信区间：

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$是从总体$\{f(x,\theta):\theta\in\Theta\}$中抽取的简单样本，目的是求参数$\theta$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。

由双边假设检验得到置信区间：

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从总体$\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$中抽取的简单样本，目的是求参数$\theta$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。考虑双边检验问题

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \theta \neq \theta_0.$$

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

由双边假设检验得到置信区间：

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从总体$\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$中抽取的简单样本，目的是求参数$\theta$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。考虑双边检验问题

$$H_0:\ \theta = \theta_0\ \ vs\ \ H_1:\ \theta \neq \theta_0.$$

求出此检验的水平为α的接受域$\bar{D}$，则有

由双边假设检验得到置信区间：

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从总体$\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$中抽取的简单样本，目的是求参数$\theta$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。考虑双边检验问题

$$H_0 : \ \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1 : \ \theta \neq \theta_0.$$

求出此检验的水平为α的接受域$\bar{D}$，则有

$$P(\bar{D}|H_0) = 1 - \alpha, \tag{1}$$

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

由双边假设检验得到置信区间：

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从总体$\{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$中抽取的简单样本，目的是求参数$\theta$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。考虑双边检验问题

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \theta \neq \theta_0.$$

求出此检验的水平为α的接受域$\bar{D}$，则有

$$P(\bar{D}|H_0) = 1-\alpha, \tag{1}$$

解由$\bar{D}$确定的不等式，得到如下不等式：$\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \leq \theta_0 \leq \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})$。

由于式（1）是在$H_0:\ \theta=\theta_0$下成立的，改θ_0为θ得到

$$\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}) \le \theta \le \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X}),$$

则$[\hat{\theta}_1(\boldsymbol{X}), \hat{\theta}_2(\boldsymbol{X})]$即为所求的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。

由单边假设检验得到置信限:

由单边假设检验得到置信限:

要求θ的置信上、下限，就需要分别考虑单边检验

由单边假设检验得到置信限：

要求θ的置信上、下限，就需要分别考虑单边检验

$$H_0'' : \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ H_1'' : \theta < \theta_0$$

和

由单边假设检验得到置信限:

要求θ的置信上、下限，就需要分别考虑单边检验

$$H_0'' : \theta \geq \theta_0 \ \ vs \ \ H_1'' : \theta < \theta_0$$

和

$$H_0' : \theta \leq \theta_0 \ \ vs \ \ H_1' : \theta > \theta_0$$

的检验问题。例子如下。

例 (5.5.1)

设$X_1, \ldots, X_n$为自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$抽取的随机样本。μ，σ^2皆未知，要分别求μ和σ^2的置信系数为$1-\alpha$的置信区间和置信上、下限。

解

先考虑μ的置信区间和置信上、下限的问题。5.2节已给出检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

的水平为α的检验的接受域$\bar{D} = \{(X_1, \ldots, X_n): \ |T| \leq t_{n-1}(\alpha/2)\}$，其中$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$。

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，故有

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S}\right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)\middle|H_0\right) = 1 - \alpha.$$

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)\middle|H_0\right) = 1-\alpha.$$

由于上述等式是在条件H_0成立，即$\mu = \mu_0$时获得的，所以将下面出现的所有μ_0用μ代替是等价的。解上式中括号里的不等式得

记$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S}\right| \leq t_{n-1}(\alpha/2) \middle| H_0\right) = 1 - \alpha.$$

由于上述等式是在条件H_0成立，即$\mu = \mu_0$时获得的，所以将下面出现的所有μ_0用μ代替是等价的。解上式中括号里的不等式得

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2).$$

因此

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2),\ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right]$$

即为μ的置信系数为$1-\alpha$的置信区间。

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

$$H_0': \ \mu \leq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1': \ \mu > \mu_0.$$

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

$$H_0': \ \mu \le \mu_0 \ \ vs \ \ H_1': \ \mu > \mu_0.$$

在5.2节中已给出水平为α的接受域$\bar{D} = \{(X_1, \ldots, X_n): \ T \le t_{n-1}(\alpha)\}$，故有

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

$$H_0' : \mu \le \mu_0 \;\; vs \;\; H_1' : \mu > \mu_0.$$

在5.2节中已给出水平为α的接受域$\bar{D} = \{(X_1, \ldots, X_n) : T \le t_{n-1}(\alpha)\}$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \le t_{n-1}(\alpha) \middle| \mu = \mu_0 \right) = 1 - \alpha.$$

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

$$H_0' : \mu \leq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1' : \mu > \mu_0.$$

在5.2节中已给出水平为α的接受域$\bar{D} = \{(X_1, \ldots, X_n) : T \leq t_{n-1}(\alpha)\}$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq t_{n-1}(\alpha) \middle| \mu = \mu_0 \right) = 1 - \alpha.$$

改 μ_0 为 μ，再解括号中的不等式得

若要求μ的置信下限，则考虑检验问题

$$H_0': \ \mu \leq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1': \ \mu > \mu_0.$$

在5.2节中已给出水平为α的接受域$\bar{D} = \{(X_1, \ldots, X_n): \ T \leq t_{n-1}(\alpha)\}$，故有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \leq t_{n-1}(\alpha) \Big| \mu = \mu_0\right) = 1 - \alpha.$$

改 μ_0 为 μ，再解括号中的不等式得

$$\bar{X} - St_{n-1}(\alpha)/\sqrt{n} \leq \mu < \infty.$$

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

因此 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\bar{X}-St_{n-1}(\alpha)/\sqrt{n}$。

因此 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信下限为 $\bar{X}-St_{n-1}(\alpha)/\sqrt{n}$。

同理，可求 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信上限为 $\bar{X}+St_{n-1}(\alpha)/\sqrt{n}$。

$\square$

例 (5.5.2)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_m)$和$\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$分别自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$中抽取的简单样本，且样本$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$独立。令$\mu=\mu_2-\mu_1$，求$\mu$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间和置信上、下限。

解

5.2节已求出了检验问题

解

5.2节已求出了检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

的两样本t检验的接受域

解

5.2节已求出了检验问题

$$H_0:\ \mu=\mu_0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq\mu_0$$

的两样本t检验的接受域

$$\bar{D}=\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):\ |T_w|\leq t_{n+m-2}(\alpha/2)\}.$$

解

5.2节已求出了检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

的两样本t检验的接受域

$$\bar{D} = \{(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}): \ |T_w| \leq t_{n+m-2}(\alpha/2)\}.$$

检验统计量为

$$T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}.$$

此处$S_w^2 = [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2]/(n+m-2)$，而$S_1^2$和$S_2^2$分别为两组样本的样本方差。若记$\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$，则有

此处$S_w^2 = [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2]/(n+m-2)$，而$S_1^2$和$S_2^2$分别为两组样本的样本方差。若记$\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$，则有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(|T_w| \le t_{m+n-2}(\alpha/2)|H_0) = 1 - \alpha.$$

改μ_0为μ，解上式中括号里的不等式得到

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

此处$S_w^2=[(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2]/(n+m-2)$，而$S_1^2$和$S_2^2$分别为两组样本的样本方差。若记$\boldsymbol{\theta}=(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)$，则有

$$P_{\boldsymbol{\theta}}(|T_w|\leq t_{m+n-2}(\alpha/2)|H_0)=1-\alpha.$$

改μ_0为μ，解上式中括号里的不等式得到

$$\begin{aligned}&\bar{Y}-\bar{X}-S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\\ &\leq\mu\leq\bar{Y}-\bar{X}+S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

因此$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1 - \alpha$的置信区间为

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

因此$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\right].$$

因此$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

类似的方法求得$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信下、上限分别为

因此$\mu=\mu_2-\mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\bar{Y}-\bar{X}-S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, \bar{Y}-\bar{X}+S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

类似的方法求得$\mu=\mu_2-\mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信下、上限分别为

$$\bar{Y}-\bar{X}-S_w t_{n+m-2}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

和

5.5.1 如何由假设检验得到置信区间

因此$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\bar{Y} - \bar{X} - S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, \bar{Y} - \bar{X} + S_w t_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

类似的方法求得$\mu = \mu_2 - \mu_1$的置信系数为$1-\alpha$的置信下、上限分别为

$$\bar{Y} - \bar{X} - S_w t_{n+m-2}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$$

和

$$\bar{Y} - \bar{X} + S_w t_{n+m-2}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}.$$

□

若用某种方法建立了 θ 的置信水平为$1-\alpha$的区间估计$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$，对给定的$\theta_0$不难求出检验问题$H_0: \ \theta = \theta_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \theta \neq \theta_0$的一个水平为$\alpha$的检验。

若用某种方法建立了 θ 的置信水平为$1-\alpha$的区间估计$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$，对给定的$\theta_0$不难求出检验问题$H_0: \theta=\theta_0 \;\; vs \;\; H_1: \theta\neq\theta_0$的一个水平为$\alpha$的检验。

事实上，一个简单方法就是若$\theta_0\in[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$，则接受 H_0，否则就拒绝 H_0。

5.5.2 如何由置信区间得到假设检验

用类似的方法可由置信系数为$1-\alpha$的置信上、下限求出检验问题

$$H_0':\ \theta \geq \theta_0\ \ vs\ \ H_1':\ \theta < \theta_0$$

和

5.5.2 如何由置信区间得到假设检验

用类似的方法可由置信系数为$1-\alpha$的置信上、下限求出检验问题

$$H_0': \theta \geq \theta_0 \;\; vs \;\; H_1': \theta < \theta_0$$

和

$$H_0'': \theta \leq \theta_0 \;\; vs \;\; H_1'': \theta > \theta_0$$

的水平为α的检验。

5.5.2 如何由置信区间得到假设检验

总体：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$　　简单随机样本：$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

	μ 的区间估计 (双侧)	μ 的假设检验 $(H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0)$
σ^2 已知	$\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{\sigma/\sqrt{n}} > u_{\frac{\alpha}{2}} \\ 0, & \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$
σ^2 未知	$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 0, & \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$
	μ 换为 μ_0，构造否定域 $\Longrightarrow$	$\Longleftarrow$ μ_0 换为 μ，解不等式

5.5.2 如何由置信区间得到假设检验

总体：$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 简单随机样本：$\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$

	μ 的区间估计 (单侧)	μ 的假设检验 $H_0: \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$	μ 的假设检验 $H_0: \mu \ge \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$
σ^2 已知	$\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, +\infty\right)$ $\left(-\infty, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha\right]$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_\alpha \end{cases}$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_\alpha \\ 0, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge -u_\alpha \end{cases}$
σ^2 未知	$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha), +\infty\right)$ $\left(-\infty, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)\right]$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1}(\alpha) \\ 0, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1}(\alpha) \end{cases}$	$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha) \\ 0, & \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \ge -t_{n-1}(\alpha) \end{cases}$

μ 换为 μ_0，构造否定域 $\Longrightarrow$ $\Longleftarrow$ μ_0 换为 μ，解不等式

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

与点估计和假设检验比较，区间估计这一推断形式有一个显著的特点，即它的精度（一般可用区间的长度刻画）和可靠度（用其置信系数刻画）一目了然。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

与点估计和假设检验比较，区间估计这一推断形式有一个显著的特点，即它的精度（一般可用区间的长度刻画）和可靠度（用其置信系数刻画）一目了然。

点估计不具备这个特点，才促使人们考虑区间估计。

与点估计和假设检验比较，区间估计这一推断形式有一个显著的特点，即它的精度（一般可用区间的长度刻画）和可靠度（用其置信系数刻画）一目了然。

点估计不具备这个特点，才促使人们考虑区间估计。

而且区间估计可以在精度、可靠度和样本大小n之间进行调整，以达到预先指定的要求。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

与点估计和假设检验比较，区间估计这一推断形式有一个显著的特点，即它的精度（一般可用区间的长度刻画）和可靠度（用其置信系数刻画）一目了然。

点估计不具备这个特点，才促使人们考虑区间估计。

而且区间估计可以在精度、可靠度和样本大小n之间进行调整，以达到预先指定的要求。

而假设检验提供的信息不如区间估计确切。

设从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取一定大小的样本取检验假设

$H_0: \ \mu = 0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq 0$。

设从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取一定大小的样本取检验假设

$H_0:\ \mu=0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 0$。

结论是原假设H_0被接受了。如在5.1节中所述，这并不意味着“证明”了$\mu=0$。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

设从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取一定大小的样本取检验假设

$H_0: \ \mu = 0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq 0$。

结论是原假设H_0被接受了。如在5.1节中所述，这并不意味着“证明”了$\mu = 0$。

假如只知道$\mu = 0$被接受了，甚至无法估量真正的μ值与0相差有多大。

但如果被告知 μ 的置信系数 95% 的区间估计为 $[-0.05, 0.07]$ 或者是 $[-15, 20]$。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

但如果被告知 μ 的置信系数 95% 的区间估计为 $[-0.05, 0.07]$ 或者是 $[-15, 20]$。

则在前一个场合，μ 与 0 相距最大不超过 0.07，这么小一个值在实用上可能无关紧要。这时就有一定的把握（概率 0.95）说 μ “事实上”可以认为是 0，而不只是接受 “$\mu = 0$” 了。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

但如果被告知 μ 的置信系数 95% 的区间估计为 $[-0.05, 0.07]$ 或者是 $[-15, 20]$。

则在前一个场合，μ 与 0 相距最大不超过 0.07，这么小一个值在实用上可能无关紧要。这时就有一定的把握（概率 0.95）说 μ “事实上”可以认为是 0，而不只是接受 “$\mu = 0$” 了。

若在后一场合，虽然 $\mu = 0$ 这个假设也被接受（因为0这个点在区间$[-15, 20]$内），但因μ的可能范围很大，实际上只能说对 μ “知之甚少”。

反之，若得到“$\mu = 0$ 被拒绝”。从这句话也只知道有比较显著的证据认为$\mu \neq 0$，但还无法指导其实际意义如何。

反之，若得到“$\mu = 0$ 被拒绝”。从这句话也只知道有比较显著的证据认为$\mu \neq 0$，但还无法指导其实际意义如何。

但如果被告知：μ 的区间估计为$[0.01,\ 0.02]$ 或 $[-40,\ -30]$。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

反之，若得到“$\mu = 0$ 被拒绝”。从这句话也只知道有比较显著的证据认为$\mu \neq 0$，但还无法指导其实际意义如何。

但如果被告知：μ 的区间估计为$[0.01,\ 0.02]$ 或 $[-40,\ -30]$。

在前一场合，虽然 $\mu = 0$ 被拒绝（因为 0 不在区间 $[0.01,\ 0.02]$ 内），但 μ 与 0 的最大差距不过 0.02，这么小一个值可能实际上与 0 无异。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

反之，若得到“$\mu=0$ 被拒绝”。从这句话也只知道有比较显著的证据认为$\mu\neq 0$，但还无法指导其实际意义如何。

但如果被告知：μ 的区间估计为$[0.01,\ 0.02]$ 或 $[-40,\ -30]$。

在前一场合，虽然 $\mu=0$ 被拒绝（因为 0 不在区间 $[0.01,\ 0.02]$ 内），但 μ 与 0 的最大差距不过 0.02，这么小一个值可能实际上与 0 无异。

因此，虽然在统计上拒绝了 $\mu=0$，但事实上可以认为 $\mu=0$。在后一个场合 μ 的值与 0 相距至少是 30，不仅要拒绝 $\mu=0$，从实际上看 μ 也显著异于 0。

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

这些分析说明，区间估计所提供的信息比假设检验更为确切。这也提醒：

这些分析说明，区间估计所提供的信息比假设检验更为确切。这也提醒：

（1）对假设检验结果的实际含义的解释要十分小心；

5.5.4 假设检验和区间估计的比较

这些分析说明，区间估计所提供的信息比假设检验更为确切。这也提醒：

（1）对假设检验结果的实际含义的解释要十分小心；

（2）在得到假设检验结果时，最好也将被检验参数的区间估计求出来作为参考。

假设检验的可能结论只有两个：接受或者是拒绝原假设。

5.5.5 检验的 p 值

假设检验的可能结论只有两个：接受或者是拒绝原假设。

作出这一结论的根据有多大，则往往不易清楚地显示出来。

5.5.5 检验的 p 值

假设检验的可能结论只有两个：接受或者是拒绝原假设。

作出这一结论的根据有多大，则往往不易清楚地显示出来。

例如，甲、乙两厂生产同一产品，希望检验假设H_0：甲不优于乙。

5.5.5 检验的 p 值

假设检验的可能结论只有两个：接受或者是拒绝原假设。

作出这一结论的根据有多大，则往往不易清楚地显示出来。

例如，甲、乙两厂生产同一产品，希望检验假设$H_0:$ 甲不优于乙。

当被告知这一假设应被接受时，只知道作出的结论是“甲不优于乙”，但作出这一结论的根据有多大？不可能有一个数量的概念。这是假设检验这种推断形式的一个缺点。

5.5.5 检验的 p 值

上一小节曾将假设检验和区间估计作了一个比较，并指出：一般说来假设检验作出的结论，不如区间估计那么精细，其理由就在于检验这种形式固有的粗糙性。

5.5.5 检验的 p 值

上一小节曾将假设检验和区间估计作了一个比较，并指出：一般说来假设检验作出的结论，不如区间估计那么精细，其理由就在于检验这种形式固有的粗糙性。

但是，对这一缺点可以作一些补救，方法是引进“检验 p 值”的概念。

5.5.5 检验的 p 值

例如，设$X_1,\ldots,X_{16}$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的简单样本，要检验假设$H_0:\ \mu=0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 0$，取水平 $\alpha=0.05$。

例如，设$X_1,\ldots,X_{16}$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的简单样本，要检验假设$H_0:\ \mu=0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 0$，取水平 $\alpha=0.05$。

此检验的拒绝域为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):|\sqrt{16}\bar{X}|>1.96\}=\{(X_1,\ldots,X_n):\ |\bar{X}|>0.49\}.$$

例如，设$X_1,...,X_{16}$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的简单样本，要检验假设$H_0:\ \mu=0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 0$，取水平 $\alpha=0.05$。

此检验的拒绝域为

$$\{(X_1,...,X_n):|\sqrt{16}\bar{X}|>1.96\}=\{(X_1,...,X_n):\ |\bar{X}|>0.49\}.$$

设对一组样本$X_1,...,X_{16}$，有 $\bar{X}=0.48$，则根据拒绝域，应接受$H_0:\ \mu=0$；

例如，设$X_1,\ldots,X_{16}$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的简单样本，要检验假设$H_0:\ \mu=0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 0$，取水平 $\alpha=0.05$。

此检验的拒绝域为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):|\sqrt{16}\bar{X}|>1.96\}=\{(X_1,\ldots,X_n):\ |\bar{X}|>0.49\}.$$

设对一组样本$X_1,\ldots,X_{16}$，有 $\bar{X}=0.48$，则根据拒绝域，应接受$H_0:\ \mu=0$；

又设有另一组样本$X_1,\ldots,X_{16}$，算得 $\bar{X}=0.12$，当然也应接受$H_0:\ \mu=0$。

对这两组样本而言，结论一致，都是接受 $H_0:\ \mu=0$。然而，会觉得后一场合，作出 $H_0:\mu=0$ 的结论根据大一些，而在前一场合，根据就小一些。

对这两组样本而言，结论一致，都是接受 $H_0:\ \mu = 0$。然而，会觉得后一场合，作出 $H_0 : \mu = 0$ 的结论根据大一些，而在前一场合，根据就小一些。

为了反映这一点，引进检验的 p 值进行定量的刻画。其定义如下。

设对某一组加上所述的具体样本 $X_1, \ldots, X_n$，算出 $\bar{X}$ 的具体值记为 $\bar{x}_0$，则这组样本的 p 值定义为

5.5.5 检验的 p 值

设对某一组加上所述的具体样本 $X_1, \ldots, X_n$，算出 $\bar{X}$ 的具体值记为 $\bar{x}_0$，则这组样本的 p 值定义为

$$\begin{aligned} p =& P(|\bar{X}| > |\bar{x}_0| \Big| H_0) \\ =& P(\sqrt{n}|\bar{X}| > \sqrt{n}|\bar{x}_0| \Big| H_0) \\ =& P(|U| > \sqrt{n}|\bar{x}_0| \Big| H_0). \end{aligned}$$

其中 $U = \sqrt{n}|\bar{X}|$，且 $U|H_0 \sim N(0,1)$。

p 值的意义解释如下：当获得一组具体样本，算得样本均值 $\bar{X}$ 的具体值为 $\bar{x}_0$时，它与假设 $\mu = 0$ 的偏差为 $|\bar{x}_0|$，问：达到 $|\bar{x}_0|$ 这么大或更大的偏离的机会有多大？

p 值的意义解释如下：当获得一组具体样本，算得样本均值 $\bar{X}$ 的具体值为 $\bar{x}_0$时，它与假设 $\mu=0$ 的偏差为 $|\bar{x}_0|$，问：达到 $|\bar{x}_0|$ 这么大或更大的偏离的机会有多大？

这就是上式定义的 p 值。若概率 p 很大，就证明 $\mu=0$ 之下，得到这么大一个偏差很正常，不值得奇怪，因而认为 $\mu=0$ 成立的根据很充分。

5.5.5 检验的 p 值

p 值的意义解释如下：当获得一组具体样本，算得样本均值 $\bar{X}$ 的具体值为 $\bar{x}_0$时，它与假设 $\mu = 0$ 的偏差为 $|\bar{x}_0|$，问：达到 $|\bar{x}_0|$ 这么大或更大的偏离的机会有多大?

这就是上式定义的 p 值。若概率 p 很大，就证明 $\mu = 0$ 之下，得到这么大一个偏差很正常，不值得奇怪，因而认为 $\mu = 0$ 成立的根据很充分。

反之，若 p 很小，则在 $\mu = 0$ 之下得到这么大一个偏差很难得，这很有可能意味着 μ 不为 0。因此若 p 很小时，认为 $\mu = 0$ 的根据很不足。

5.5.5 检验的 p 值

总之，p 越大（小），认为 $\mu = 0$ 的根据越充分（不足）。当 $p < \alpha$时，就要拒绝 $\mu = 0$ 了。若 $p \geq \alpha$，但离 α 很近，虽然不能拒绝 H_0，但对它抱着很怀疑的态度。

5.5.5 检验的 p 值

总之，p 越大（小），认为 $\mu = 0$ 的根据越充分（不足）。当 $p < \alpha$时，就要拒绝 $\mu = 0$ 了。若 $p \geq \alpha$，但离 α 很近，虽然不能拒绝 H_0，但对它抱着很怀疑的态度。

接之前的例子，通过标准正态分布表，查得对应于 $\bar{x}_0 = 0.48$ 和 $\bar{x}_0 = 0.12$ 两种情形的 p 值分别为

5.5.5 检验的 p 值

总之，p 越大（小），认为 $\mu = 0$ 的根据越充分（不足）。当 $p < \alpha$时，就要拒绝 $\mu = 0$ 了。若 $p \geq \alpha$，但离 α 很近，虽然不能拒绝 H_0，但对它抱着很怀疑的态度。

接之前的例子，通过标准正态分布表，查得对应于 $\bar{x}_0 = 0.48$ 和 $\bar{x}_0 = 0.12$ 两种情形的 p 值分别为

$$p = P(|\bar{X}| \geq 0.48|H_0) = P(|U| \geq 1.92|H_0) = 0.0548,$$
$$p = P(|\bar{X}| \geq 0.12|H_0) = P(|U| \geq 0.48|H_0) = 0.6312.$$

5.5.5 检验的 p 值

前一情况离水平α很近，虽然仍不能拒绝 $\mu = 0$，但很值得怀疑。

前一情况离水平α很近，虽然仍不能拒绝 $\mu=0$，但很值得怀疑。

后一场合表明：出现像 0.12 或更大偏差的可能性在 $\mu=0$ 之下为 0.6312，这一可能性很大，不足为奇。故认为 $\mu=0$ 的根据很充分。

上述分析可以推广到一般情形。

上述分析可以推广到一般情形。

对双边检验问题，若原假设为 $H_0:\ \theta=\theta_0$，其拒绝域为 $|T|>c$，设由样本算出检验统计量 T 之值为 t_0，则这组样本的 p 值为

上述分析可以推广到一般情形。

对双边检验问题，若原假设为 $H_0: \theta = \theta_0$，其拒绝域为 $|T| > c$，设由样本算出检验统计量 T 之值为 t_0，则这组样本的 p 值为

$$p = P\left(|T| > |t_0| \middle| H_0\right);$$

对单边检验问题，若原假设为 $H_0: \theta \le \theta_0$，其拒绝域为 $T > c$，则 p 值为

对单边检验问题，若原假设为 $H_0: \theta \le \theta_0$，其拒绝域为 $T > c$，则 p 值为

$$p = \sup_{\theta \le \theta_0} P(T \ge t_0) = P\left(T > t_0 \middle| \theta = \theta_0\right).$$

对单边检验问题，若原假设为 $H_0: \theta \leq \theta_0$，其拒绝域为 $T > c$，则 p 值为

$$p = \sup_{\theta \leq \theta_0} P(T \geq t_0) = P\left(T > t_0 \middle| \theta = \theta_0\right).$$

对单边检验问题，若原假设为 $H_0: \theta \geq \theta_0$，其拒绝域为 $T < c$，则 p 值为

5.5.5 检验的 p 值

对单边检验问题，若原假设为 $H_0:\ \theta \le \theta_0$，其拒绝域为 $T > c$，则 p 值为

$$p = \sup_{\theta \le \theta_0} P(T \ge t_0) = P\left(T > t_0 \middle| \theta = \theta_0\right).$$

对单边检验问题，若原假设为 $H_0:\ \theta \ge \theta_0$，其拒绝域为 $T < c$，则 p 值为

$$p = \sup_{\theta \le \theta_0} P(T \le t_0) = P\left(T < t_0 \middle| \theta = \theta_0\right).$$

5.5.5 检验的 p 值

对一样本问题中的 U 检验、t 检验、χ^2 检验的 p 值公式

及两样本问题中 t 检验、F 检验的部分的 p 值公式的推导可参考上述步骤，结果参考书中 **表格 5.5.1 p 值计算公式表**。

例 (5.5.4)

从电信公司每月长途电话的账单中随机抽取 25 张，算得月平均费用 $\bar{X}=32.80$元，$S=20.80$元。假定每月长途电话费用服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，要检验假设

$$H_0:\ \mu=30\ \ vs\ \ H_1:\ \mu\neq 30.$$

计算检验的p值。

解

已知 $n=25$，$\mu_0=30$，$\bar{x}_0=32.80$，$s_0=20.80$，故有

解

已知 $n = 25$, $\mu_0 = 30$, $\bar{x}_0 = 32.80$, $s_0 = 20.80$，故有

$$
\begin{aligned}
p =& P\left(|T| > \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_0 - \mu_0)}{\sigma}\right| \middle| H_0\right) \\
=& P\left(|T| > \left|\frac{\sqrt{25}(32.80 - 30)}{20.80}\right| \middle| H_0\right) \\
=& P(|T_{24}| > 0.67 | H_0) \approx 0.53.
\end{aligned}
$$

解

已知 $n = 25$, $\mu_0 = 30$, $\bar{x}_0 = 32.80$, $s_0 = 20.80$，故有

$$
\begin{aligned}
p =& P\left(|T| > \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{x}_0 - \mu_0)}{\sigma}\right| \middle| H_0\right) \\
=& P\left(|T| > \left|\frac{\sqrt{25}(32.80 - 30)}{20.80}\right| \middle| H_0\right) \\
=& P(|T_{24}| > 0.67 | H_0) \approx 0.53.
\end{aligned}
$$

此 p 值较大，表明数据与 $\mu = 30$ 相当符合，即有足够的根据认为 $H_0: \ \mu = 30$ 成立。