数理统计
第五章
参数假设检验

2026 年 5 月 13 日

目录

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

5.2.1 单个正态总体均值的检验

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（1）$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$,

5.2.1 单个正态总体均值的检验

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（1）$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0$,

（2）$H_0' : \mu \leq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1' : \mu > \mu_0$,

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（1）$H_0:\mu=\mu_0\ \ vs\ \ H_1:\mu\neq\mu_0$,

（2）$H_0':\mu\leq\mu_0\ \ vs\ \ H_1':\mu>\mu_0$,

（3）$H_0'':\mu\geq\mu_0\ \ vs\ \ H_1'':\mu<\mu_0$,

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（1）$H_0: \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1: \mu \neq \mu_0$,

（2）$H_0': \mu \leq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1': \mu > \mu_0$,

（3）$H_0'': \mu \geq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1'': \mu < \mu_0$,

其中μ_0和检验水平α给定。

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（1）$H_0:\mu=\mu_0\ \ vs\ \ H_1:\mu\neq\mu_0$,

（2）$H_0':\mu\leq\mu_0\ \ vs\ \ H_1':\mu>\mu_0$,

（3）$H_0'':\mu\geq\mu_0\ \ vs\ \ H_1'':\mu<\mu_0$,

其中μ_0和检验水平α给定。

检验问题（1）称为双边检验（two-side test），检验问题（2）和（3）称为单边检验（one-side test）。

5.2.1 单个正态总体均值的检验

1. 方差σ^2已知时的单个正态总体均值的检验方法

1. 方差σ^2已知时的单个正态总体均值的检验方法

（i）首先考虑检验问题（1），即

1. 方差σ^2已知时的单个正态总体均值的检验方法

（i）首先考虑检验问题（1），即

$$H_0: \ \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1: \ \mu \neq \mu_0.$$

5.2.1 单个正态总体均值的检验

1. 方差σ^2已知时的单个正态总体均值的检验方法

（i）首先考虑检验问题（1），即

$$H_0:\ \mu = \mu_0\ \ vs\ \ H_1:\ \mu \neq \mu_0.$$

下面采用直观法构造检验的拒绝域。

由于$\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i/n$是$\mu$的无偏估计且具有良好性质（无偏性，强相合性）。

由于$\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i/n$是$\mu$的无偏估计且具有良好性质（无偏性，强相合性）。

直观上看$|\bar{X} - \mu_0|$越大（即$\bar{X}$与μ_0差异越大），H_0越不像成立。

由于$\bar{X}=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i/n$是$\mu$的无偏估计且具有良好性质（无偏性，强相合性）。

直观上看$|\bar{X}-\mu_0|$越大（即$\bar{X}$与μ_0差异越大），H_0越不像成立。

因此，检验的拒绝域可取如下形式：

5.2.1 单个正态总体均值的检验

由于$\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i/n$是$\mu$的无偏估计且具有良好性质（无偏性，强相合性）。

直观上看$|\bar{X} - \mu_0|$越大（即$\bar{X}$与μ_0差异越大），H_0越不像成立。

因此，检验的拒绝域可取如下形式：

$$\{\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) : |\bar{X} - \mu_0| > A\}, \ \ A\text{待定}.$$

5.2.1 单个正态总体均值的检验

当σ^2已知时，在H_0成立的条件下，可知$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$，将其标准化得到

当σ^2已知时，在H_0成立的条件下，可知$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$，将其标准化得到

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

当σ^2已知时，在H_0成立的条件下，可知$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$，将其标准化得到

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

因此，取U作为检验统计量，则拒绝域的等价形式可取为

当σ^2已知时，在H_0成立的条件下，可知$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$，将其标准化得到

$$U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

因此，取U作为检验统计量，则拒绝域的等价形式可取为

$$\{(X_1, \ldots, X_n) : \ |U| > c\}, \ C\text{待定}.$$

由检验水平为α可知，

由检验水平为α可知，

$$P(|U| > c|H_0) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\right| > c\middle|H_0\right) = \alpha.$$

由检验水平为α可知，

$$P(|U| > c|H_0) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}\right| > c\middle|H_0\right) = \alpha.$$

由于$U|\mu = \mu_0 \sim N(0, 1)$，故得$c = u_{\alpha/2}$。因此由拒绝域

由检验水平为α可知，

$$P(|U| > c|H_0) = P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}\right| > c\middle|H_0\right) = \alpha.$$

由于$U|\mu = \mu_0 \sim N(0,1)$，故得$c = u_{\alpha/2}$。因此由拒绝域

$$D_1 = \{(X_1, \ldots, X_n) : |U| > u_{\alpha/2}\}$$

确定的检验为检验问题（1）的水平为α的检验。

（ii）为了获得检验问题

$$(2)\ \ H_0' : \mu \leq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1' : \mu > \mu_0$$

的水平为α的检验，先考虑如下的过渡性检验：

（ii）为了获得检验问题

$$(2)\ \ H_0': \mu \leq \mu_0\ \ vs\ \ H_1': \mu > \mu_0$$

的水平为α的检验，先考虑如下的过渡性检验：

$$(2')\ \ H_0^*: \mu = \mu_0\ \ vs\ \ H_1': \mu > \mu_0.$$

（ii）为了获得检验问题

$$(2)\ \ H_0' : \mu \le \mu_0 \ \ vs \ \ H_1' : \mu > \mu_0$$

的水平为α的检验，先考虑如下的过渡性检验：

$$(2')\ \ H_0^* : \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1' : \mu > \mu_0.$$

由于检验问题（2）和（2′）的备择假设相同，因此它们也应具有相同的拒绝域。

5.2.1 单个正态总体均值的检验

仍取$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$作为检验统计量，因此拒绝域的形式为

仍取$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$作为检验统计量，因此拒绝域的形式为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):\ U>c\},\ c\text{ 待定}.$$

仍取$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$作为检验统计量，因此拒绝域的形式为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):\ U>c\},\ c\text{ 待定}.$$

为使检验（2′）具有水平α，令

仍取$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$作为检验统计量，因此拒绝域的形式为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):\ U>c\},\ c\text{ 待定}.$$

为使检验（2′）具有水平α，令

$$P(U>c|H_0^*)=P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}>c\Big|\mu=\mu_0\right)=\alpha,$$

仍取$U=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}$作为检验统计量，因此拒绝域的形式为

$$\{(X_1,\ldots,X_n):\ U>c\},\ c\text{ 待定}.$$

为使检验（2′）具有水平α，令

$$P(U>c|H_0^*)=P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}>c\Big|\mu=\mu_0\right)=\alpha,$$

由于$U|\mu=\mu_0\sim N(0,1)$，故取$c=u_\alpha$。

得到拒绝域

$$D_2^* = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > u_\alpha \right\}.$$

得到拒绝域

$$D_2^* = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \ U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > u_\alpha \right\}.$$

由上式给出的拒绝域D_2^*是否是检验问题（2）的检验水平为α的拒绝域呢？

得到拒绝域

$$D_2^* = \left\{(X_1, \ldots, X_n) : U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > u_\alpha\right\}.$$

由上式给出的拒绝域D_2^*是否是检验问题（2）的检验水平为α的拒绝域呢？

显然，当$H_0^*: \mu = \mu_0$成立时有

$$\beta_{D_2^*}(\mu_0) = P(X \in D_2^* | H_0^*) = P(U > c | \mu = \mu_0)$$

$$=$$

得到拒绝域

$$D_2^* = \left\{(X_1, \ldots, X_n) : U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > u_\alpha\right\}.$$

由上式给出的拒绝域D_2^*是否是检验问题（2）的检验水平为α的拒绝域呢？

显然，当$H_0^* : \mu = \mu_0$成立时有

$$\begin{aligned}\beta_{D_2^*}(\mu_0) &= P(X \in D_2^* | H_0^*) = P(U > c | \mu = \mu_0) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > u_\alpha\right) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha.\end{aligned}$$

因此，由拒绝域D_2^*确定检验水平是α。

因此，由拒绝域D_2^*确定检验水平是α。

问题是当$\mu < \mu_0$时，即原假设H_0'：$\mu \le \mu_0$成立时，由拒绝域D_2^*确定的检验水平是否仍然是α？

因此，由拒绝域D_2^*确定检验水平是α。

问题是当$\mu < \mu_0$时，即原假设H_0'：$\mu \leq \mu_0$成立时，由拒绝域D_2^*确定的检验水平是否仍然是α?

如果能证明：以D_2^*为拒绝域的检验的功效函数$\beta_{D_2^*}(\mu)$为μ的非降函数，则它必为检验问题（2）的检验水平为α的检验。

因此，由拒绝域D_2^*确定检验水平是α。

问题是当$\mu < \mu_0$时，即原假设H_0'：$\mu \leq \mu_0$成立时，由拒绝域D_2^*确定的检验水平是否仍然是α？

如果能证明：以D_2^*为拒绝域的检验的功效函数$\beta_{D_2^*}(\mu)$为μ的非降函数，则它必为检验问题（2）的检验水平为α的检验。

理由如下：因为当$\mu < \mu_0$时，有$\beta_{D_2^*}(\mu) \leq \beta_{D_2^*}(\mu_0) = \alpha$，满足检验水平为$\alpha$的定义5.1.3，即$D_2^*$也是原假设为$H_0'$：$\mu \leq \mu_0$的显著性水平为$\alpha$的检验的拒绝域。

证明：已知检验H_0^*的拒绝域为

$$D_2^* = \{(X_1, \ldots, X_n) : U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha\},$$

当$\mu = \mu_0$时，检验的功效函数为

证明：已知检验H_0^*的拒绝域为

$$D_2^* = \{(X_1, \ldots, X_n) : U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha\},$$

当$\mu = \mu_0$时，检验的功效函数为

$$\beta_{D_2^*}(\mu_0) = P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu = \mu_0)$$
$$= P(U > u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha.$$

当$\mu < \mu_0$时，检验的功效函数为

当$\mu < \mu_0$时，检验的功效函数为

$$\beta_{D_2^*}(\mu) = P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0)$$

$$=$$

当$\mu < \mu_0$时，检验的功效函数为

$$\beta_{D_2^*}(\mu) = P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0)$$

$$= P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0)$$

$$=$$

当$\mu < \mu_0$时，检验的功效函数为

$$\beta_{D_2^*}(\mu) = P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0)$$

$$= P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0)$$

$$= P\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} > u_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\middle| \mu < \mu_0\right)$$

$$=$$

当$\mu < \mu_0$时，检验的功效函数为

$$\begin{aligned}
&\beta_{D_2^*}(\mu) = P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0) \\
&= P(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0)/\sigma > u_\alpha | \mu < \mu_0) \\
&= P\left(\sqrt{n}\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma} > u_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma} \middle| \mu < \mu_0\right) \\
&= 1 - \Phi\left(u_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

是μ的非降函数，且$\beta_{D_2^*}(\mu) \leq \beta_{D_2^*}(\mu_0) = \alpha$。

因此由

因此由

$$D_2 = D_2^* = \{(X_1, \ldots, X_n) : U > u_\alpha\},$$

因此由

$$D_2 = D_2^* = \{(X_1, \ldots, X_n) : U > u_\alpha\},$$

确定的检验是检验问题（2）的水平为α的检验。其中$U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$。

（iii）类似的方法可得检验问题（3）

（iii）类似的方法可得检验问题（3）

$$H_0'' : \mu \geq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1'' : \mu < \mu_0$$

的检验水平为 α 的检验的拒绝域为

（iii）类似的方法可得检验问题（3）

$$H_0'': \mu \geq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1'': \mu < \mu_0$$

的检验水平为 α 的检验的拒绝域为

$$D_3 = \{(X_1, \ldots, X_n):\ U < -u_\alpha\}.$$

5.2.1 单个正态总体均值的检验

当σ^2已知时，对单个正态总体均值μ的三种检验问题的总结，可以参考教材第222页的表5.2.1：单个正态总体均值的假设检验中的σ^2已知的部分。

5.2.1 单个正态总体均值的检验

当σ^2已知时，对单个正态总体均值μ的三种检验问题的总结，可以参考教材第222页的表5.2.1：单个正态总体均值的假设检验中的σ^2已知的部分。

这种基于检验统计量U服从$N(0,1)$分布的检验方法称为一样本u检验，而U称为一样本u检验统计量。

2. 方差σ^2未知时的单个正态总体均值的检验方法

2. 方差σ^2未知时的单个正态总体均值的检验方法

在样本分布为$N(\mu, \sigma^2)$，当σ^2未知且假定$\mu = \mu_0$时，由推论2.3.3可知

2. 方差σ^2未知时的单个正态总体均值的检验方法

在样本分布为$N(\mu, \sigma^2)$，当σ^2未知且假定$\mu = \mu_0$时，由推论2.3.3可知

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t_{n-1}.$$

2. 方差σ^2未知时的单个正态总体均值的检验方法

在样本分布为$N(\mu, \sigma^2)$，当σ^2未知且假定$\mu = \mu_0$时，由推论2.3.3可知

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t_{n-1}.$$

因此取T作为检验统计量，用完全与方差σ^2已知情形相同的方法，可得到检验问题（1）-（3）的检验水平为α的检验的拒绝域。

（i）考虑检验问题（1）

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

（i）考虑检验问题（1）

$$H_0 : \mu = \mu_0 \;\; vs \;\; H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

（i）考虑检验问题（1）

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \ vs \ \ H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

$$D_1' = \{(X_1, \ldots, X_n) : |T| > c\}$$

其中c为临界值，$c \geq 0$。

由

$$P(|T| > c|H_0) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right| > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$=$$

由

$$P(|T|>c|H_0)=P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right|>c\Big|\mu=\mu_0\right)$$

$$=P(|T_{n-1}|>c)=\alpha$$

由

$$P(|T| > c|H_0) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right| > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$= P(|T_{n-1}| > c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(\alpha/2)$。

由

$$P(|T| > c|H_0) = P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right| > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$= P(|T_{n-1}| > c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(\alpha/2)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

由

$$P(|T|>c|H_0)=P\left(\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right|>c\middle|\mu=\mu_0\right)$$

$$=P(|T_{n-1}|>c)=\alpha$$

可得到临界值$c=t_{n-1}(\alpha/2)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

$$D_1'=\{(X_1,\ldots,X_n):|T|>t_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

（ii）考虑检验问题（2）

$$H_0' : \mu \leq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1' : \mu > \mu_0,$$

（ii）考虑检验问题（2）

$$H_0': \mu \leq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1': \mu > \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

（ii）考虑检验问题（2）

$$H_0' : \mu \leq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1' : \mu > \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

$$D_2' = \{(X_1, \ldots, X_n) : T > c\}$$

其中c为临界值，c是一个常数。

由

$$P(T > c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$= P(T_{n-1} > c) = \alpha$$

由

$$P(T > c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$=P(T_{n-1} > c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(\alpha)$。

由

$$P(T > c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$=P(T_{n-1} > c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(\alpha)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

由

$$P(T > c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} > c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$= P(T_{n-1} > c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(\alpha)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

$$D_2' = \{(X_1, \dots, X_n) : T > t_{n-1}(\alpha)\}.$$

（iii）考虑检验问题（3）

$$H_0'': \mu \geq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1'': \mu < \mu_0,$$

（iii）考虑检验问题（3）

$$H_0'': \mu \geq \mu_0 \;\; vs \;\; H_1'': \mu < \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

（iii）考虑检验问题（3）

$$H_0'': \mu \geq \mu_0 \ \ vs \ \ H_1'': \mu < \mu_0,$$

设检验水平为α，基于统计量$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$，拒绝域应具有形式

$$D_3' = \{(X_1, \ldots, X_n) : T < c\}$$

其中c为临界值，c是一个常数。

由

$$P(T < c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S} < c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$=P(T_{n-1} < c) = \alpha$$

由
$$P(T < c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} < c\middle|\mu = \mu_0\right)$$
$$=P(T_{n-1} < c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha)$。

由

$$P(T < c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S} < c\middle|\mu = \mu_0\right)$$

$$=P(T_{n-1} < c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

由

$$P(T < c|H_0) = P\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} < c \middle| \mu = \mu_0\right)$$

$$= P(T_{n-1} < c) = \alpha$$

可得到临界值$c = t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha)$。

故该检验的检验水平为α的拒绝域为

$$D_3' = \{(X_1, \dots, X_n) : T < -t_{n-1}(\alpha)\}.$$

5.2.1 单个正态总体均值的检验

当σ^2未知时，对单个正态总体均值μ的三种检验问题的总结，可以参考教材第222页的表5.2.1：单个正态总体均值的假设检验中的σ^2未知的部分。

5.2.1 单个正态总体均值的检验

当σ^2未知时，对单个正态总体均值μ的三种检验问题的总结，可以参考教材第222页的表5.2.1：单个正态总体均值的假设检验中的σ^2未知的部分。

这种基于检验统计量T服从t分布的检验方法称为一样本t检验，而T称为一样本t检验统计量。

例 (5.2.1)

食品厂用自动灌装机装罐头视频，每罐标准重量为500g，每天开工需检查机器的工作情况。抽取10个罐头测其重量分别为（单位：g）

$$495,\ 510,\ 505,\ 498,\ 503,\ 492,\ 502,\ 512,\ 497,\ 506.$$

假定罐头重量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，已知$\sigma=6.5$，问机器是否正常工作？（取检验水平$\alpha=0.05$）。

解：

解：

检验问题为

解:

检验问题为

$$H_0 : \mu = 500 \ \ vs \ \ H_1 : \mu \neq 500.$$

解:

检验问题为

$$H_0 : \mu = 500 \ \ vs \ \ H_1 : \mu \neq 500.$$

本题中σ^2已知，故拒绝域为

解:

检验问题为

$$H_0:\mu=500\ \ vs\ \ H_1:\mu\neq 500.$$

本题中σ^2已知，故拒绝域为

$$D=\{(X_1,\ldots,X_n):|\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma|>u_{\alpha/2}\},$$

其中$n=10$，$\alpha=0.05$，$\sigma=6.5$，$\mu_0=500$，查表得$u_{0.025=1.96}$，由样本计算得$\bar{X}=502$。

因此

因此

$$|U| = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}\right| = \left|\frac{\sqrt{10}(502 - 500)}{6.5}\right| = 0.973 < 1.96,$$

因此

$$|U| = \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\right| = \left|\frac{\sqrt{10}(502-500)}{6.5}\right| = 0.973 < 1.96,$$

所以在显著性水平$\alpha = 0.05$下没有足够理由拒绝H_0，即认为机器工作正常。 □

例 (5.2.2)

某砖厂所生产的地砖的抗断强度X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，今从该厂生产的地砖中随机抽取6块测得抗断强度（单位：kg/cm^2）如下：

$$32.56,\ 29.66,\ 31.64,\ 30.00,\ 31.87,\ 31.03$$

问这一批地砖的平均抗断强度可否认为不低于$32.50\ kg/cm^2$（取检验水平$\alpha=0.05$）?

解：

解：

检验问题为

解：

检验问题为

$$H_0 : \mu \geq 32.50 \;\; vs \;\; H_1 : \mu < 32.50.$$

解：

检验问题为

$$H_0 : \mu \geq 32.50 \ \ vs \ \ H_1 : \mu < 32.50.$$

本题中σ^2未知，故采用t检验法，拒绝域为

解:

检验问题为

$$H_0 : \mu \geq 32.50 \;\; vs \;\; H_1 : \mu < 32.50.$$

本题中σ^2未知，故采用t检验法，拒绝域为

$$D = \{(X_1, \ldots, X_n) : \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S < t_{n-1}(\alpha)\},$$

解：

检验问题为

$$H_0: \mu \geq 32.50 \ \ vs \ \ H_1: \mu < 32.50.$$

本题中σ^2未知，故采用t检验法，拒绝域为

$$D = \{(X_1, \ldots, X_n) : \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S < t_{n-1}(\alpha)\},$$

其中$n = 6$，$\alpha = 0.05$，$\mu_0 = 32.50$，查表得$t_5(0.05) = 2.015$，由样本计算得$\bar{X} = 31.13$，$S = 1.123$。

因此

因此

$$T = \frac{\sqrt{6}(31.13 - 32.50)}{1.123} = -2.99 < -2.015,$$

因此

$$T = \frac{\sqrt{6}(31.13 - 32.50)}{1.123} = -2.99 < -2.015,$$

故拒绝H_0，即认为地砖强度达不到$32.50\ kg/cm^2$。 $\square$

5.2.2 单个正态总体方差的检验

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（4）$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（4）$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

（5）$H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$,

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（4）$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

（5）$H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$,

（6）$H_0'' : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1'' : \sigma^2 < \sigma_0^2$,

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的简单样本，求下列三类检验问题：

（4）$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$

（5）$H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2,$

（6）$H_0'' : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1'' : \sigma^2 < \sigma_0^2,$

其中σ_0^2和检验水平α给定。

1. 均值未知时的单个正态总体方差的检验方法

首先考虑检验问题（4），即

1. 均值未知时的单个正态总体方差的检验方法

首先考虑检验问题（4），即

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

1. 均值未知时的单个正态总体方差的检验方法

首先考虑检验问题（4），即

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

由于均值μ未知时，$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$是$\sigma^2$的一个无偏估计，且具有良好性质。

从直观上看，S^2/σ_0^2太小或者太大时，H_0都不像成立。

从直观上看，S^2/σ_0^2太小或者太大时，H_0都不像成立。

因此，检验的拒绝域取如下形式：

$$\{(X_1, \ldots, X_n) : S^2/\sigma_0^2 < A_1 \text{ 或 } S^2/\sigma_0^2 > A_2\},$$

从直观上看，S^2/σ_0^2太小或者太大时，H_0都不像成立。

因此，检验的拒绝域取如下形式：

$$\{(X_1, \ldots, X_n) : S^2/\sigma_0^2 < A_1 \text{ 或 } S^2/\sigma_0^2 > A_2\},$$

其中，A_1和A_2待定。

在给定$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$成立的条件下，由定理2.2.3可知，

在给定$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$成立的条件下，由定理2.2.3可知，

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{(n-1)}.$$

5.2.2 单个正态总体方差的检验

在给定$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$成立的条件下，由定理2.2.3可知，

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

故取χ^2作为检验统计量。因此，拒绝域的等价形式可取为

在给定$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$成立的条件下，由定理2.2.3可知，

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}.$$

故取χ^2作为检验统计量。因此，拒绝域的等价形式可取为

$$D = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c_2 \right\}.$$

记$\theta=(\mu,\sigma^2)$，为了确定c_1，c_2，令

记$\theta=(\mu,\sigma^2)$，为了确定c_1，c_2，令

$$\begin{aligned}\alpha =&P(\boldsymbol{X}\in D|H_0)\\ =&P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c_2\middle|\sigma^2=\sigma_0^2\right)\\ =&P(\chi^2_{n-1}<c_1 \text{ 或 } \chi^2_{n-1}>c_2).\end{aligned}$$

记$\theta = (\mu, \sigma^2)$，为了确定c_1，c_2，令

$$
\begin{aligned}
\alpha =& P(\boldsymbol{X} \in D | H_0) \\
=& P_\theta \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c_2 \middle| \sigma^2 = \sigma_0^2 \right) \\
=& P(\chi^2_{n-1} < c_1 \text{ 或 } \chi^2_{n-1} > c_2).
\end{aligned}
$$

满足上式的c_1，c_2有很多对，存在一对c_1，c_2是最优的，但计算较复杂且使用不方便。

确定c_1，c_2的一个简单实用的方法是令

确定c_1，c_2的一个简单实用的方法是令

$$P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \middle| H_0\right) = P(\chi_{n-1}^2 < c_1) = \alpha/2,$$

确定c_1，c_2的一个简单实用的方法是令

$$P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \middle| H_0\right) = P(\chi^2_{n-1} < c_1) = \alpha/2,$$
$$P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c_2 \middle| H_0\right) = P(\chi^2_{n-1} > c_2) = \alpha/2.$$

5.2.2 单个正态总体方差的检验

确定c_1，c_2的一个简单实用的方法是令

$$P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c_1 \middle| H_0\right) = P(\chi^2_{n-1} < c_1) = \alpha/2,$$
$$P_\theta\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c_2 \middle| H_0\right) = P(\chi^2_{n-1} > c_2) = \alpha/2.$$

由上式易知，临界值$c_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)$，$c_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$。

因此由拒绝域

因此由拒绝域

$$D_4 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \\ \text{或} \ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\}$$

确定的检验为检验问题（4）的水平为α的检验。

因此由拒绝域

$$D_4 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\}$$

确定的检验为检验问题（4）的水平为α的检验。

其接受域为

因此由拒绝域

$$D_4 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \quad \text{或} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\}$$

确定的检验为检验问题（4）的水平为α的检验。

其接受域为

$$\bar{D}_4 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

采用类似方法，可求得检验问题（5）

采用类似方法，可求得检验问题（5）

$$H_0': \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1': \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

采用类似方法，可求得检验问题（5）

$$H_0' : \sigma^2 \le \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

$$D_5 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(\alpha)\}.$$

检验问题（6）

检验问题（6）

$$H_0'': \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1'': \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

检验问题（6）

$$H_0'': \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1'': \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

$$D_6 = \{(X_1, \ldots, X_n) : \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(1-\alpha)\}.$$

5.2.2 单个正态总体方差的检验

当μ未知时，对单个正态总体方差σ^2的三种检验问题的总结，可以参考教材第225页的表5.2.2：单个正态总体方差的假设检验中的μ未知的部分。

2. 当均值μ已知时的方差σ^2的检验方法

2. 当均值μ已知时的方差σ^2的检验方法

当μ已知时，σ^2的一个具有良好性质的无偏估计是$S_\mu^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$。

2. 当均值μ已知时的方差σ^2的检验方法

当μ已知时，σ^2的一个具有良好性质的无偏估计是$S_\mu^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$。

当H_0：$\sigma^2 = \sigma_0^2$成立时，由于$\frac{X_i-\mu}{\sigma_0} \sim N(0,1)$，$i = 1, \ldots, n$，故按定义有

2. 当均值μ已知时的方差σ^2的检验方法

当μ已知时，σ^2的一个具有良好性质的无偏估计是$S_\mu^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$。

当$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2$成立时，由于$\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\sim N(0,1)$，$i=1,\ldots,n$，故按定义有

$$\chi_\mu^2=\frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi_n^2.$$

因此，取χ_μ^2为检验统计量。

采用完全类似于均值未知时单个正态总体方差的检验方法的讨论，可得到检验问题（4）

采用完全类似于均值未知时单个正态总体方差的检验方法的讨论，可得到检验问题（4）

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

采用完全类似于均值未知时单个正态总体方差的检验方法的讨论，可得到检验问题（4）

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

$$D_4' = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \ \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} < \chi_n^2(1-\alpha/2) \text{ 或 } \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} > \chi_n^2(\alpha/2) \right\}.$$

检验问题（5）

检验问题（5）

$$H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

检验问题（5）

$$H_0' : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1' : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

$$D_5' = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} > \chi_n^2(\alpha) \right\}.$$

检验问题（6）

检验问题（6）

$$H_0'': \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \ \ vs \ \ H_1'': \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

检验问题（6）

$$H_0'': \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \;\; vs \;\; H_1'': \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的水平为α的拒绝域为

$$D_6' = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \frac{nS_\mu^2}{\sigma_0^2} < \chi_n^2(1-\alpha) \right\}.$$

当μ已知时，对单个正态总体方差σ^2的三种检验问题的总结，可以参考教材第225页的表5.2.2：单个正态总体方差的假设检验中的μ已知的部分。

当μ已知时，对单个正态总体方差σ^2的三种检验问题的总结，可以参考教材第225页的表5.2.2：单个正态总体方差的假设检验中的μ已知的部分。

这种基于检验统计量服从一定自由度的χ^2分布的检验方法称为χ^2检验。

例 (5.2.3)

某工厂生产的一种棉纱支数服从正态分布，其总体标准差为 1.2. 先从某日生产的一批产品中抽取 16 缕进行支数测量，测得样本标准差为 2.1，文纱的均匀度是否改变（$\alpha = 0.05$）?

解:

检验问题为

解:

检验问题为

$$H_0: \ \sigma^2 = 1.44 \ \ vs \ \ H_1: \ \sigma^2 \neq 1.44.$$

解:

检验问题为

$$H_0:\ \sigma^2 = 1.44 \ \ vs \ \ H_1:\ \sigma^2 \neq 1.44.$$

检验的接受域为

解:

检验问题为

$$H_0: \sigma^2 = 1.44 \ \ vs \ \ H_1: \sigma^2 \neq 1.44.$$

检验的接受域为

$$\bar{D} = \left\{ (X_1, \ldots, X_n): \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(\alpha/2) \right\}.$$

其中$n = 16$，$\alpha = 0.05$。

查表得到$\chi^2_{15}(0.975) = 6.262$，$\chi^2_{15}(0.025) = 27.488$。

由已知数据算得$S^2 = 2.1^2 = 4.41$，$\sigma_0^2 = 1.2^2 = 1.44$。

因此有

其中$n = 16$，$\alpha = 0.05$。

查表得到$\chi^2_{15}(0.975) = 6.262$，$\chi^2_{15}(0.025) = 27.488$。

由已知数据算得$S^2 = 2.1^2 = 4.41$，$\sigma_0^2 = 1.2^2 = 1.44$。

因此有

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{15 \times 4.41}{1.44} = 45.94 > 27.488.$$

其中$n=16$，$\alpha=0.05$。

查表得到$\chi^2_{15}(0.975)=6.262$，$\chi^2_{15}(0.025)=27.488$。

由已知数据算得$S^2=2.1^2=4.41$，$\sigma_0^2=1.2^2=1.44$。

因此有

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{15\times 4.41}{1.44}=45.94>27.488.$$

故拒绝H_0，认为棉纱的均匀度发生改变。 $\square$