

数理统计

第五章

参数假设检验

2026 年 5 月 13 日

- ① 5.2 正态总体参数的假设检验
 - 5.2.3 两个正态总体均值差的检验
 - 5.2.4 两个正态总体方差比的检验
 - 5.2.5 极限分布为正态分布的检验

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 为自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 为自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立。求下列三类检验问题：

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 为自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 为自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立。求下列三类检验问题：

$$(7) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 为自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 为自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立。求下列三类检验问题：

$$(7) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(8) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 为自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 为自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立。求下列三类检验问题：

$$(7) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(8) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

$$(9) H''_0 : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H''_1 : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 为自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 为自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 相互独立。求下列三类检验问题：

$$(7) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(8) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

$$(9) H''_0 : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H''_1 : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

其中 μ_0 和检验水平 α 给定。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

1. 当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的检验

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

1. 当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的检验

首先考虑双边假设检验问题 (7), 即

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

1. 当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的检验

首先考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

1. 当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的检验

首先考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

从直观上看, 由于 $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $\mu_2 - \mu_1$ 的一个良好估计, $|\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0|$ 越大, H_0 越不像成立。故拒绝域可取如下形式

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

1. 当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时均值差的检验

首先考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

从直观上看, 由于 $\bar{Y} - \bar{X}$ 是 $\mu_2 - \mu_1$ 的一个良好估计, $|\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0|$ 越大, H_0 越不像成立。故拒绝域可取如下形式

$$\{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0| > A\}, \quad A \text{ 待定.}$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 故当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时有

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 故当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时有

$$U = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 故当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时有

$$U = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

因此, 取 U 为检验统计量, 则拒绝域的等价形式为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 故当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时有

$$U = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

因此, 取 U 为检验统计量, 则拒绝域的等价形式为

$$\{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : |U| > c\}, \quad c \text{ 待定.}$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

记 $\theta = \mu_2 - \mu_1$, 为确定 c , 令

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

记 $\theta = \mu_2 - \mu_1$, 为确定 c , 令

$$\alpha = P_{\theta}(|U| > c | H_0) = P_{\theta} \left(\left| \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \right| > c \mid H_0 \right) = 2 - 2\Phi(c),$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

记 $\theta = \mu_2 - \mu_1$, 为确定 c , 令

$$\alpha = P_{\theta}(|U| > c | H_0) = P_{\theta} \left(\left| \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \right| > c \mid H_0 \right) = 2 - 2\Phi(c),$$

由此可确定临界值 $c = u_{\alpha/2}$ 。因此检验问题 (7) 的水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

记 $\theta = \mu_2 - \mu_1$, 为确定 c , 令

$$\alpha = P_{\theta}(|U| > c | H_0) = P_{\theta} \left(\left| \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \right| > c \mid H_0 \right) = 2 - 2\Phi(c),$$

由此可确定临界值 $c = u_{\alpha/2}$ 。因此检验问题 (7) 的水平为 α 的检验拒绝域为

$$D_7 = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : |U| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

类似的，可得到检验问题（8）

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

类似的，可得到检验问题（8）

$$H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

的水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

类似的，可得到检验问题（8）

$$H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

的水平为 α 的检验拒绝域为

$$D_8 = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : U > u_\alpha\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

也可得到检验问题 (9)

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

也可得到检验问题 (9)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

的水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

也可得到检验问题 (9)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

的水平为 α 的检验拒绝域为

$$D_9 = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : U < -u_\alpha\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，对两个正态总体均值差的三种检验问题的总结，可以参考教材第228页的表5.2.3：两个正态总体均值差的假设检验中的 σ_1^2 和 σ_2^2 已知的部分。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，对两个正态总体均值差的三种检验问题的总结，可以参考教材第228页的表5.2.3：两个正态总体均值差的假设检验中的 σ_1^2 和 σ_2^2 已知的部分。

这种基于检验统计量 $U = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}$ 的检验方法称为两样本 U 检验。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

2. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时均值差的检验

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

2. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时均值差的检验

若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 已知, 则统计量 U 变为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

2. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时均值差的检验

若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 已知, 则统计量 U 变为

$$U = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/m + \sigma^2/n}} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时，上式中的 σ^2 常用

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时，上式中的 σ^2 常用

$$\begin{aligned} S_w^2 &= \frac{1}{n+m-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] \\ &= \frac{1}{n+m-2} \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right] \end{aligned}$$

来估计，其中

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

在 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时, 上式中的 σ^2 常用

$$\begin{aligned} S_w^2 &= \frac{1}{n+m-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] \\ &= \frac{1}{n+m-2} \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right] \end{aligned}$$

来估计, 其中

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2$$

分别为样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 的样本方差。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 $H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 成立时，由推论2.3.4可知

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 $H_0: \mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 成立时, 由推论2.3.4可知

$$T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{n+m-2}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 $H_0: \mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 成立时, 由推论2.3.4可知

$$T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim t_{n+m-2}.$$

因此, 取 T_w 作为检验统计量。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (7)，即

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

类似一样本 t 检验方法, 可得到水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (7), 即

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0.$$

类似一样本 t 检验方法, 可得到水平为 α 的检验拒绝域为

$$D'_7 = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : |T_w| > t_{n+m-2}(\alpha/2)\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (8)，即

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (8), 即

$$H_0' : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H_1' : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (8), 即

$$H_0' : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H_1' : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

可得到水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (8), 即

$$H_0' : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H_1' : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

可得到水平为 α 的检验拒绝域为

$$D_8' = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : T_w > t_{n+m-2}(\alpha)\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (9)，即

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (9), 即

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (9), 即

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

可得到水平为 α 的检验拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

考虑双边假设检验问题 (9), 即

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

可得到水平为 α 的检验拒绝域为

$$D_9' = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : T_w < -t_{n+m-2}(\alpha)\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时，对两个正态总体均值差的三种检验问题的总结，可以参考教材第228页的[表5.2.3：两个正态总体均值差的假设检验](#)中的 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知的部分。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知时，对两个正态总体均值差的三种检验问题的总结，可以参考教材第228页的表5.2.3：两个正态总体均值差的假设检验中的 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知的部分。

这种基于检验统计量 $T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ 服从 t_{n+m-2} 的检验方法称为两样本 t 检验。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

例 (5.2.4)

为研究正常成年男女血液红细胞平均数的差别，检验某地正常成年男子156人，女子74人，计算男女红细胞的平均数和样本标准差分别为

$$\text{男: } \bar{X} = 465.13 \text{ 万/mm}^3, S_1 = 54.80 \text{ 万/mm}^3;$$

$$\text{女: } \bar{Y} = 422.16 \text{ 万/mm}^3, S_2 = 49.20 \text{ 万/mm}^3;$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

例 (5.2.4)

为研究正常成年男女血液红细胞平均数的差别，检验某地正常成年男子156人，女子74人，计算男女红细胞的平均数和样本标准差分别为

$$\text{男: } \bar{X} = 465.13 \text{ 万/mm}^3, S_1 = 54.80 \text{ 万/mm}^3;$$

$$\text{女: } \bar{Y} = 422.16 \text{ 万/mm}^3, S_2 = 49.20 \text{ 万/mm}^3;$$

假定正常成年男女红细胞数分别服从正态分布，且方差相同。检验正常成年人红细胞数是否与性别有关 ($\alpha = 0.01$)。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$; Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 且假定这两组样本独立。检验问题为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$; Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 且假定这两组样本独立。检验问题为

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0 \text{ vs } H_1: \mu_2 - \mu_1 \neq 0.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$; Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 且假定这两组样本独立。检验问题为

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0 \text{ vs } H_1: \mu_2 - \mu_1 \neq 0.$$

检验的拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim N(\mu_1, \sigma^2)$; Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 且假定这两组样本独立。检验问题为

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0 \text{ vs } H_1: \mu_2 - \mu_1 \neq 0.$$

检验的拒绝域为

$$D = \left\{ (X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right| > t_{n+m-2} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right\},$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中

$$m = 156, n = 74, \bar{X} = 465.13, \bar{Y} = 422.16, S_1 = 54.80, S_2 = 49.20,$$
$$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = 2816.6, S_w = 53.07,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中

$$m = 156, n = 74, \bar{X} = 465.13, \bar{Y} = 422.16, S_1 = 54.80, S_2 = 49.20,$$
$$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = 2816.6, S_w = 53.07,$$

查表得 $t_{228}(0.005) = 2.598$ 。由

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中

$$m = 156, n = 74, \bar{X} = 465.13, \bar{Y} = 422.16, S_1 = 54.80, S_2 = 49.20,$$
$$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = 2816.6, S_w = 53.07,$$

查表得 $t_{228}(0.005) = 2.598$ 。由

$$|T_w| = \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right| = \left| \frac{422.16 - 465.13}{53.07} \sqrt{\frac{156 \times 74}{156 + 74}} \right| = 5.74 > 2.598,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中

$$m = 156, n = 74, \bar{X} = 465.13, \bar{Y} = 422.16, S_1 = 54.80, S_2 = 49.20,$$

$$S_w^2 = \frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = 2816.6, S_w = 53.07,$$

查表得 $t_{228}(0.005) = 2.598$ 。由

$$|T_w| = \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \right| = \left| \frac{422.16 - 465.13}{53.07} \sqrt{\frac{156 \times 74}{156 + 74}} \right| = 5.74 > 2.598,$$

故拒绝 H_0 ，认为正常成年人的红细胞数与性别有关。 □

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

3. 成对比较问题

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

3. 成对比较问题

假设两个正态总体的样本是来自同一个总体上的重复观察，它们是成对出现的，而且是相关的。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

3. 成对比较问题

假设两个正态总体的样本是来自同一个总体上的重复观察，它们是成对出现的，而且是相关的。

例如，为了考察一种安眠药的效果，记录了 n 个失眠患者服药前的每晚睡眠时间 X_1, \dots, X_n 和服用此安眠药后每晚的睡眠时间。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中 (X_i, Y_i) 是第 i 个患者不服用安眠药和服用安眠药每晚的睡眠时间。它们是相关的，不会相互独立。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中 (X_i, Y_i) 是第 i 个患者不服用安眠药和服用安眠药每晚的睡眠时间。它们是相关的，不会相互独立。

另一方面， X_1, \dots, X_n 是 n 个不同失眠患者的睡眠时间，由于个人体质诸方面的条件不同，这 n 个观察值不能认为是来自同一正态总体的样本。 Y_1, \dots, Y_n 也是一样。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

其中 (X_i, Y_i) 是第 i 个患者不服用安眠药和服用安眠药每晚的睡眠时间。它们是相关的，不会相互独立。

另一方面， X_1, \dots, X_n 是 n 个不同失眠患者的睡眠时间，由于个人体质诸方面的条件不同，这 n 个观察值不能认为是来自同一正态总体的样本。 Y_1, \dots, Y_n 也是一样。

这样的数据称为**成对数据**，这样的数据模型用两样本 t 检验就不合适。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

因为 X_i 和 Y_i 是同在第 i 个患者身上观察到的夜晚睡眠时间，所以 $Z_i = Y_i - X_i$ 就消除了人的体质诸方面的差异，只剩下安眠药的效果。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

因为 X_i 和 Y_i 是同在第 i 个患者身上观察到的夜晚睡眠时间，所以 $Z_i = Y_i - X_i$ 就消除了人的体质诸方面的差异，只剩下安眠药的效果。

若安眠药无效， Z_i 的差异仅由随机误差引起，随机误差可认为服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。故可假定 Z_1, \dots, Z_n 为自 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的简单样本， μ 就是安眠药的平均效果。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

安眠药是否有效，就归结为检验如下假设：

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

安眠药是否有效，就归结为检验如下假设：

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 0.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

安眠药是否有效，就归结为检验如下假设：

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 0.$$

因为 Z_1, \dots, Z_n 被认为是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单样本，而总体方差 σ^2 未知，故可用关于单个正态总体均值的 t 检验方法。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

检验的拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

检验的拒绝域为

$$D = \{(Z_1, \dots, Z_n) : |T_Z| > t_{n-1}(\alpha/2)\},$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

检验的拒绝域为

$$D = \{(Z_1, \dots, Z_n) : |T_Z| > t_{n-1}(\alpha/2)\},$$

此处 α 为检验水平, $T_Z = \sqrt{n}\bar{Z}/S_Z$ 为检验统计量, 其中 \bar{Z} 和 S_Z^2 分别为 Z_1, \dots, Z_n 的样本均值和样本方差。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

例 (例 5.2.5)

今有两台测量材料中某种金属含量的光谱仪 A 和 B ，为鉴定它们的质量有无显著差异，对金属含量不同的 9 件材料样品进行测量，得到 9 对观察值分别为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

例 (例 5.2.5)

今有两台测量材料中某种金属含量的光谱仪 A 和 B ，为鉴定它们的质量有无显著差异，对金属含量不同的 9 件材料样品进行测量，得到 9 对观察值分别为

B (单位: %) : 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00;

A (单位: %) : 0.10, 0.21, 0.52, 0.32, 0.78, 0.59, 0.68, 0.77, 0.89;

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

例 (例 5.2.5)

今有两台测量材料中某种金属含量的光谱仪 A 和 B ，为鉴定它们的质量有无显著差异，对金属含量不同的 9 件材料样品进行测量，得到 9 对观察值分别为

B (单位: %): 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00;

A (单位: %): 0.10, 0.21, 0.52, 0.32, 0.78, 0.59, 0.68, 0.77, 0.89;

问根据实验结果，在 $\alpha = 0.01$ 下，能否判断这两台光谱仪的质量有无显著差异？

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

将光谱仪 A 和 B 对 $n = 9$ 件样品的测定值记为 X_1, \dots, X_9 和 Y_1, \dots, Y_9 。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

将光谱仪 A 和 B 对 $n = 9$ 件样品的测定值记为 X_1, \dots, X_9 和 Y_1, \dots, Y_9 。

由于这9件样品金属含量不同，所以 X_1, \dots, X_9 不能看成来自同一总体。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

将光谱仪 A 和 B 对 $n = 9$ 件样品的测定值记为 X_1, \dots, X_9 和 Y_1, \dots, Y_9 。

由于这9件样品金属含量不同，所以 X_1, \dots, X_9 不能看成来自同一总体。

Y_1, \dots, Y_9 也一样；每个对子 (X_i, Y_i) 中 X_i 与 Y_i 不独立。故需用成对比较。记

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

解

将光谱仪 A 和 B 对 $n = 9$ 件样品的测定值记为 X_1, \dots, X_9 和 Y_1, \dots, Y_9 。

由于这9件样品金属含量不同，所以 X_1, \dots, X_9 不能看成来自同一总体。

Y_1, \dots, Y_9 也一样；每个对子 (X_i, Y_i) 中 X_i 与 Y_i 不独立。故需用成对比较。记

$$Z_i = Y_i - X_i, \quad i = 1, \dots, 9.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

若这两台光谱仪质量一样，测量得到的每对数据的差异仅由随机误差引起。随机误差可认为服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。故可假定 Z_1, \dots, Z_n 为自 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的随机样本。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

若这两台光谱仪质量一样，测量得到的每对数据的差异仅由随机误差引起。随机误差可认为服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。故可假定 Z_1, \dots, Z_n 为自 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的随机样本。

要检验

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 0, \alpha = 0.01.$$

则检验的拒绝域为

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

若这两台光谱仪质量一样，测量得到的每对数据的差异仅由随机误差引起。随机误差可认为服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。故可假定 Z_1, \dots, Z_n 为自 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的随机样本。

要检验

$$H_0 : \mu = 0 \text{ vs } H_1 : \mu \neq 0, \alpha = 0.01.$$

则检验的拒绝域为

$$\{(Z_1, \dots, Z_n) : |T_Z| > t_{n-1}(\alpha/2)\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由题中数据算得

$$\bar{Z} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Z_i = 0.06,$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (Z_i - \bar{Z})^2 = 0.01505,$$

$$S_Z = 0.12268,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由题中数据算得

$$\bar{Z} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 Z_i = 0.06,$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (Z_i - \bar{Z})^2 = 0.01505,$$

$$S_Z = 0.12268,$$

查表得 $t_{n-1}(\alpha/2) = t_8(0.005) = 3.3554$ 。

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于

$$|T_Z| = \left| \frac{\sqrt{n}\bar{Z}}{S_Z} \right| = \frac{3 \times 0.06}{0.12268} = 1.47 < 3.3554,$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

由于

$$|T_Z| = \left| \frac{\sqrt{n}\bar{Z}}{S_Z} \right| = \frac{3 \times 0.06}{0.12268} = 1.47 < 3.3554,$$

故无足够证据显示两台仪器有显著差异，因此不能拒绝 H_0 。 □

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

讨论下列三类假设检验问题：

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

讨论下列三类假设检验问题：

$$(10) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1,$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

讨论下列三类假设检验问题：

$$(10) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1,$$

$$(11) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

讨论下列三类假设检验问题：

$$(10) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1,$$

$$(11) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

$$(12) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1,$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，
且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

讨论下列三类假设检验问题：

$$(10) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1,$$

$$(11) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

$$(12) H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1,$$

检验水平 α 给定。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 \bar{X} 和 S_1^2 分别为 X_1, \dots, X_m 的样本均值和样本方差；

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 \bar{X} 和 S_1^2 分别为 X_1, \dots, X_m 的样本均值和样本方差；

\bar{Y} 和 S_2^2 分别为 Y_1, \dots, Y_n 的样本均值和样本方差。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 \bar{X} 和 S_1^2 分别为 X_1, \dots, X_m 的样本均值和样本方差；

\bar{Y} 和 S_2^2 分别为 Y_1, \dots, Y_n 的样本均值和样本方差。

其中

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

1. 当 μ_1 和 μ_2 未知时方差比的检验方法

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

1. 当 μ_1 和 μ_2 未知时方差比的检验方法

首先讨论检验问题 (10)，即

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

1. 当 μ_1 和 μ_2 未知时方差比的检验方法

首先讨论检验问题 (10), 即

$$H_0: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

1. 当 μ_1 和 μ_2 未知时方差比的检验方法

首先讨论检验问题 (10), 即

$$H_0: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1.$$

由于 S_1^2 和 S_2^2 分别是 σ_1^2 和 σ_2^2 的无偏估计, 并具有良好性质。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

1. 当 μ_1 和 μ_2 未知时方差比的检验方法

首先讨论检验问题 (10), 即

$$H_0: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1.$$

由于 S_1^2 和 S_2^2 分别是 σ_1^2 和 σ_2^2 的无偏估计, 并具有良好性质。

直观上看, S_2^2/S_1^2 太大或者太小时, H_0 不像成立。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可设想拒绝域的形式为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可设想拒绝域的形式为

$$\left\{ (X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \right\}, \quad c_1, c_2 \text{ 待定.}$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可设想拒绝域的形式为

$$\left\{ (X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \right\}, \quad c_1, c_2 \text{ 待定.}$$

在 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 1$ 的条件下, 由推论2.3.5可知,

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可设想拒绝域的形式为

$$\left\{ (X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \right\}, \quad c_1, c_2 \text{ 待定.}$$

在 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 1$ 的条件下, 由推论2.3.5可知,

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F_{n-1, m-1}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可设想拒绝域的形式为

$$\left\{ (X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \right\}, \quad c_1, c_2 \text{ 待定.}$$

在 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 1$ 的条件下, 由推论2.3.5可知,

$$F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F_{n-1, m-1}.$$

因此取 F 为检验统计量。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$ ，为了确定拒绝域中的临界值 c_1, c_2 ，令

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, 为了确定拒绝域中的临界值 c_1, c_2 , 令

$$P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \mid H_0 \right) = \alpha.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, 为了确定拒绝域中的临界值 c_1, c_2 , 令

$$P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \mid H_0 \right) = \alpha.$$

满足上式要求的 c_1 和 c_2 有很多, 其中存在一对 c_1, c_2 最优, 但计算复杂, 使用不方便。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, 为了确定拒绝域中的临界值 c_1, c_2 , 令

$$P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \mid H_0 \right) = \alpha.$$

满足上式要求的 c_1 和 c_2 有很多, 其中存在一对 c_1, c_2 最优, 但计算复杂, 使用不方便。

确定 c_1, c_2 的一个简单实用的方法是令

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

记 $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$, 为了确定拒绝域中的临界值 c_1, c_2 , 令

$$P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > c_2 \middle| H_0 \right) = \alpha.$$

满足上式要求的 c_1 和 c_2 有很多, 其中存在一对 c_1, c_2 最优, 但计算复杂, 使用不方便。

确定 c_1, c_2 的一个简单实用的方法是令

$$P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_1 \middle| H_0 \right) = \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\theta} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} < c_2 \middle| H_0 \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

故临界值 $c_1 = F_{n-1, m-1}(1 - \alpha/2)$, $c_2 = F_{n-1, m-1}(\alpha/2)$, 所以检验问题 (10) 的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

故临界值 $c_1 = F_{n-1, m-1}(1 - \alpha/2)$, $c_2 = F_{n-1, m-1}(\alpha/2)$, 所以检验问题 (10) 的水平为 α 的拒绝域为

$$D_{10} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < F_{n-1, m-1}(1 - \alpha/2) \text{ 或 } \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{n-1, m-1}(\alpha/2) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

用类似的方法可求出检验问题 (11)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

用类似的方法可求出检验问题 (11)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \quad vs \quad H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

$$D_{11} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{n-1, m-1}(\alpha) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

用类似的方法可求出检验问题 (12)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \quad vs \quad H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1$$

的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

用类似的方法可求出检验问题 (12)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1$$

的水平为 α 的拒绝域为

$$D_{12} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_2^2}{S_1^2} < F_{n-1, m-1}(1 - \alpha) \right\}.$$

5.2.3 两个正态总体均值差的检验

当 μ_1 和 μ_2 未知时，对两个正态总体方差比的三种检验问题的总结，可以参考教材第232页的[表5.2.4：两个正态总体方差比的假设检验](#)中的 μ_1, μ_2 未知的部分。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

2. 当 μ_1 和 μ_2 已知时方差比的检验方法

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

2. 当 μ_1 和 μ_2 已知时方差比的检验方法

当 μ_1 和 μ_2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 具有良好性质的无偏估计分别是

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

2. 当 μ_1 和 μ_2 已知时方差比的检验方法

当 μ_1 和 μ_2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 具有良好性质的无偏估计分别是

$$S_{1*}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2,$$

$$S_{2*}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

2. 当 μ_1 和 μ_2 已知时方差比的检验方法

当 μ_1 和 μ_2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 已知时, σ_1^2 和 σ_2^2 具有良好性质的无偏估计分别是

$$S_{1*}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (X_i - \mu_1)^2,$$

$$S_{2*}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_2)^2.$$

可知 $mS_{1*}^2/\sigma_1^2 \sim \chi_m^2$, $nS_{2*}^2/\sigma_2^2 \sim \chi_n^2$, 且二者独立。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 F 分布的定义，容易证明在 H_0 成立（即 $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ ）的条件下，有

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 F 分布的定义, 容易证明在 H_0 成立 (即 $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$) 的条件下, 有

$$F_* = \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} \sim F_{n,m}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 F 分布的定义, 容易证明在 H_0 成立 (即 $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$) 的条件下, 有

$$F_* = \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} \sim F_{n,m}.$$

因此, 取 F_* 为检验统计量。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

完全类似于 μ_1 和 μ_2 未知情形的讨论，可得到检验问题 (10)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$$

的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

完全类似于 μ_1 和 μ_2 未知情形的讨论, 可得到检验问题 (10)

$$H_0: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \text{ vs } H_1: \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$$

的水平为 α 的拒绝域为

$$D'_{10} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} < F_{n,m}(1 - \alpha/2) \text{ 或 } \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} > F_{n,m}(\alpha/2) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可得到检验问题 (11)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可得到检验问题 (11)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

$$D'_{11} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} > F_{n,m}(\alpha) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可得到检验问题 (12)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

可得到检验问题 (12)

$$H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geq 1 \text{ vs } H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1,$$

的水平为 α 的拒绝域为

$$D'_{12} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_{2*}^2}{S_{1*}^2} < F_{n,m}(1 - \alpha) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

当 μ_1 和 μ_2 已知时，对两个正态总体方差比的三种检验问题的总结，可以参考教材第232页的表5.2.4：两个正态总体方差比的假设检验中的 μ_1, μ_2 已知的部分。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

当 μ_1 和 μ_2 已知时，对两个正态总体方差比的三种检验问题的总结，可以参考教材第232页的表5.2.4：两个正态总体方差比的假设检验中的 μ_1, μ_2 已知的部分。

这种基于检验统计量服从 F 分布的检验方法称为 F 检验。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

例 (5.2.6)

测得两批样本大小皆为6的电子器材电阻的均值 $\bar{X} = 0.14$, $\bar{Y} = 0.139$, 样本标准差分别为 $S_1 = 0.0026$, $S_2 = 0.0024$ 。假设这两批器材的电阻分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 均值和方差皆未知, 且两组样本独立。问这两批电子器材的电阻是否相同? ($\alpha = 0.05$)

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

解

这个问题表面看是对两个正态总体均值差的检验，但不知道是否有 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，因此首先求两个正态总体方差是否相同的检验。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

解

这个问题表面看是对两个正态总体均值差的检验，但不知道是否有 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，因此首先求两个正态总体方差是否相同的检验。

如果检验认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，然后再作两样本 t 检验。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

解

这个问题表面看是对两个正态总体均值差的检验，但不知道是否有 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，因此首先求两个正态总体方差是否相同的检验。

如果检验认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，然后再作两样本 t 检验。

如果经检验否定了 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，则不能用两样本的 t 检验方法取检验均值差，这就变成了Behrens-Fisher问题。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

首先考虑下列检验问题。

$$(1) H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

首先考虑下列检验问题。

$$(1) H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

因为均值 μ_1 和 μ_2 未知，故采用 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 作为检验统计量，水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

首先考虑下列检验问题。

$$(1) H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

因为均值 μ_1 和 μ_2 未知, 故采用 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 作为检验统计量, 水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验的拒绝域为

$$D = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2) \text{ 或 } \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{m-1, n-1}(\alpha/2) \right\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

此处 $m = n = 6$, $S_1^2/S_2^2 = 0.0026^2/0.0024^2 = 1.17$ 。由 $\alpha = 0.05$, 查 F 分布表得 $c_2 = F_{5,5}(0.025) = 7.15$ 。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

此处 $m = n = 6$, $S_1^2/S_2^2 = 0.0026^2/0.0024^2 = 1.17$ 。由 $\alpha = 0.05$, 查 F 分布表得 $c_2 = F_{5,5}(0.025) = 7.15$ 。

由于 $c_1 = F_{5,5}(1 - 0.025) = \frac{1}{7.15}$, 并且

$$c_1 < F = S_1^2/S_2^2 = 1.17 < c_2,$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

此处 $m = n = 6$, $S_1^2/S_2^2 = 0.0026^2/0.0024^2 = 1.17$ 。由 $\alpha = 0.05$, 查 F 分布表得 $c_2 = F_{5,5}(0.025) = 7.15$ 。

由于 $c_1 = F_{5,5}(1 - 0.025) = \frac{1}{7.15}$, 并且

$$c_1 < F = S_1^2/S_2^2 = 1.17 < c_2,$$

即 $F = 1.17 \in \bar{D}$, F 落在接受域里, 故认为没有足够的证据否定 H_0 , 因此不能拒绝 H_0 。

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

在完成上述检验后，可以假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，进一步考虑下列检验问题：

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

在完成上述检验后，可以假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，进一步考虑下列检验问题：

$$(2) : H_0' : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1' : \mu_1 \neq \mu_2.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

在完成上述检验后，可以假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，进一步考虑下列检验问题：

$$(2) : H_0' : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1' : \mu_1 \neq \mu_2.$$

已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ， $\mu_0 = 0$ ，取 $T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ 为检验统计量，其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2}$ 。故检验的拒绝域为

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

在完成上述检验后，可以假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，进一步考虑下列检验问题：

$$(2) : H_0' : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1' : \mu_1 \neq \mu_2.$$

已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ， $\mu_0 = 0$ ，取 $T_w = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{S_w} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}$ 为检验统计量，其中 $S_w^2 = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{n+m-2}$ 。故检验的拒绝域为

$$D = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |T_w| > t_{n+m-2}(\alpha/2)\}.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

此处 $m = n = 6$, $\bar{X} = 0.14$, $\bar{Y} = 0.139$, $S_1 = 0.0026$, $S_2 = 0.0024$,
因此有

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

此处 $m = n = 6$, $\bar{X} = 0.14$, $\bar{Y} = 0.139$, $S_1 = 0.0026$, $S_2 = 0.0024$,
因此有

$$S_w^2 = \frac{1}{10}(5 \times 0.0026^2 + 5 \times 0.0024^2) = 6.26 \times 10^{-6},$$

$$S_w = 0.0025.$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表得 $t_{10}(0.025) = 2.228$ 。由于

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 $\alpha = 0.05$, 查 t 分布表得 $t_{10}(0.025) = 2.228$ 。由于

$$\begin{aligned} |T_w| &= \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_w} \right| \\ &= \sqrt{3} \times \left| \frac{0.139 - 0.14}{0.0025} \right| = 0.6928 < 2.228, \end{aligned}$$

5.2.4 两个正态总体方差比的检验

由 $\alpha = 0.05$ ，查 t 分布表得 $t_{10}(0.025) = 2.228$ 。由于

$$\begin{aligned}|T_w| &= \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{S_w} \right| \\ &= \sqrt{3} \times \left| \frac{0.139 - 0.14}{0.0025} \right| = 0.6928 < 2.228,\end{aligned}$$

故没有充足的理由否定两批电子器件的电阻值相同，因此不能拒绝 H'_0 。

□

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

1. Behrens-Fisher 检验问题的近似方法

设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ 是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 中抽取的简单样本，
 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ 是从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 中抽取的简单样本，且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

考虑 $\mu_2 - \mu_1$ 的下列三类检验问题：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

考虑 $\mu_2 - \mu_1$ 的下列三类检验问题:

$$(a) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

考虑 $\mu_2 - \mu_1$ 的下列三类检验问题:

$$(a) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(b) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

考虑 $\mu_2 - \mu_1$ 的下列三类检验问题:

$$(a) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(b) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

$$(c) H''_0 : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H''_1 : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

考虑 $\mu_2 - \mu_1$ 的下列三类检验问题：

$$(a) H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0,$$

$$(b) H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0,$$

$$(c) H''_0 : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H''_1 : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0,$$

其中 μ_0 和检验水平 α 给定。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知且不相等时的检验问题称为 Behrens-Fisher 问题。下面将分下列两种情形进行讨论：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知且不相等时的检验问题称为 Behrens-Fisher 问题。下面将分下列两种情形进行讨论：

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，但 m, n 充分大时；

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知且不相等时的检验问题称为 Behrens-Fisher 问题。下面将分下列两种情形进行讨论：

- (1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，但 m, n 充分大时；
- (2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，但 m, n 不充分大时。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 充分大时, 可利用基于中心极限定理求解。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 充分大时, 可利用基于中心极限定理求解。

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 将其标准化有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 充分大时, 可利用基于中心极限定理求解。

由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 将其标准化有

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 充分大时, 可利用基于中心极限定理求解。由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 将其标准化有

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

由于 S_1^2 和 S_2^2 分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 的相合估计, 用 S_1^2 和 S_2^2 分别代替 σ_1^2 和 σ_2^2 , 由Slutsky 定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(1) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 充分大时, 可利用基于中心极限定理求解。由于 $\bar{Y} - \bar{X} \sim N(\mu_2 - \mu_1, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n)$, 将其标准化有

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

由于 S_1^2 和 S_2^2 分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 的相合估计, 用 S_1^2 和 S_2^2 分别代替 σ_1^2 和 σ_2^2 , 由 Slutsky 定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \times \frac{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

特别当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

特别当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$U^* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

特别当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$U^* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

取 U^* 作为检验统计量, 可得到检验问题 (a)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

特别当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$U^* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

取 U^* 作为检验统计量, 可得到检验问题 (a)

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

特别当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 且 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$U^* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

取 U^* 作为检验统计量, 可得到检验问题 (a)

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_\alpha = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |U^*| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

$$H_0' : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H_1' : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

$$H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_b = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : U^* > u_\alpha\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_c = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : U^* < -u_\alpha\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。在4.2节的 Behrens-Fisher 区间估计问题中, 已说明了

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。在4.2节的 Behrens-Fisher 区间估计问题中, 已说明了

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}}$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。在4.2节的 Behrens-Fisher 区间估计问题中, 已说明了

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}}$$

近似服从自由度为 r 的 t 分布, 其中

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。在4.2节的 Behrens-Fisher 区间估计问题中, 已说明了

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}}$$

近似服从自由度为 r 的 t 分布, 其中

$$r = S_*^4 / \left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)} + \frac{S_2^4}{n^2(n-1)} \right],$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

(2) 当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知, 但 m, n 不都是充分大时, 可用基于 t 分布的近似解法。在4.2节的 Behrens-Fisher 区间估计问题中, 已说明了

$$\frac{\bar{Y} - \bar{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}}$$

近似服从自由度为 r 的 t 分布, 其中

$$r = S_*^4 / \left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)} + \frac{S_2^4}{n^2(n-1)} \right],$$
$$S_*^2 = \frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时，近似地有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时, 近似地有

$$T_* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \sim t_r,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 $\mu_2 - \mu_1 = \mu_0$ 时, 近似地有

$$T_* = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} \sim t_r,$$

即 T_* 近似服从自由度为 r 的 t 分布, 取 T_* 作为检验统计量。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (a)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题(a)

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1: \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的检验的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题(α)

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的检验的拒绝域为

$$D_\alpha = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |T_*| > t_r(\alpha/2)\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

$$H_0' : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H_1' : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (b)

$$H'_0 : \mu_2 - \mu_1 \leq \mu_0 \text{ vs } H'_1 : \mu_2 - \mu_1 > \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_b = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : T_* > t_r(\alpha)\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

可得到检验问题 (c)

$$H_0'' : \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \text{ vs } H_1'' : \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_c = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : T_* < -t_r(\alpha)\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

例 (5.2.7)

在例5.2.4中假定正常成年男女红细胞数皆服从正态分布，数据作如下修改：不假定两组样本方差相等，正常男女红细胞的样本平均数不变，男： $\bar{X} = 465.13$ 万/ mm^3 ，女： $\bar{Y} = 422.16$ 万/ mm^3 ，样本标准差改为男： $S_1 = 54.80$ 万/ mm^3 ，女： $S_2 = 39.20$ 万/ mm^3 ，男子人数为156人，女子人数为74人，要求检验正常成年人红细胞数是否与性别有关。取 $\alpha = 0.02$ 。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解

由于两组样本方差的相等性取消了，用 F 检验来检验两组样本方差是否相等的结果是：拒绝 H_0 ，即有足够的把握认为两总体方差不相等。这是一个 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量较大，故可用大样本方法来求下列检验问题：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解

由于两组样本方差的相等性取消了，用 F 检验来检验两组样本方差是否相等的结果是：拒绝 H_0 ，即有足够的把握认为两总体方差不相等。这是一个 Behrens-Fisher 问题。由于样本容量较大，故可用大样本方法来求下列检验问题：

$$H_0 : \mu_2 - \mu_1 = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_2 - \mu_1 \neq 0.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

设检验统计量为 $U^* = (\bar{Y} - \bar{X}) / \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}$, 则检验的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

设检验统计量为 $U^* = (\bar{Y} - \bar{X}) / \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}$, 则检验的拒绝域为

$$\{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |U^*| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

设检验统计量为 $U^* = (\bar{Y} - \bar{X}) / \sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}$, 则检验的拒绝域为

$$\{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |U^*| > u_{\alpha/2}\}.$$

已知 $m = 176$, $n = 74$, $\bar{X} = 465.13$, $\bar{Y} = 422.16$, $S_1 = 54.80$,
 $S_2 = 39.20$, 查表得 $u_{0.01} = 2.30$ 。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于

$$|U^*| = \frac{|465.13 - 422.16|}{\sqrt{54.80^2/176 + 39.20^2/74}} = \frac{42.97}{6.15} = 6.99 > 2.30,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于

$$|U^*| = \frac{|465.13 - 422.16|}{\sqrt{54.80^2/176 + 39.20^2/74}} = \frac{42.97}{6.15} = 6.99 > 2.30,$$

故拒绝 H_0 ，认为正常成年人红细胞数与性别有关。

□

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

例 (5.2.8*)

分别抽取甲种矿石的10个样品和乙种矿石的5个样品，测其含铁量（单位%），由数据算得

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

例 (5.2.8*)

分别抽取甲种矿石的10个样品和乙种矿石的5个样品，测其含铁量（单位%），由数据算得

$$\text{甲矿石: } \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = 16.01, \quad S_1^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 10.80,$$

$$\text{乙矿石: } \bar{Y} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 Y_j = 18.98, \quad S_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 (Y_j - \bar{Y})^2 = 0.27.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

例 (5.2.8*)

分别抽取甲种矿石的10个样品和乙种矿石的5个样品，测其含铁量（单位%），由数据算得

$$\text{甲矿石: } \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = 16.01, \quad S_1^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 10.80,$$

$$\text{乙矿石: } \bar{Y} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 Y_j = 18.98, \quad S_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^5 (Y_j - \bar{Y})^2 = 0.27.$$

在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下，求检验问题：甲矿石含铁量不低于乙矿石的含铁量。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 此处 $m = 10$, $n = 5$ 。因 S_1^2 和 S_2^2 相差甚大, 假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是不合理的。由于 m 和 n 都较小, 不宜用大样本方法, 故此问题属于 Behrens-Fisher 问题, 用基于 t 分布的检验方法。只能在方差未知的一般情形下, 检验假设

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 此处 $m = 10$, $n = 5$ 。因 S_1^2 和 S_2^2 相差甚大, 假定 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是不合理的。由于 m 和 n 都较小, 不宜用大样本方法, 故此问题属于 Behrens-Fisher 问题, 用基于 t 分布的检验方法。只能在方差未知的一般情形下, 检验假设

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \text{ vs } H_1: \mu_1 < \mu_2.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

检验的拒绝域

$$D = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : T_* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} < -t_r(\alpha) \right\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

检验的拒绝域

$$D = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : T_* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} < -t_r(\alpha) \right\}.$$

首先计算 t 分布的自由度

$$r = \frac{(S_1^2/m + S_2^2/n)^2}{S_1^4/[m^2(m-1)] + S_2^4/[n^2(n-1)]} = 9.88 \approx 10,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

查表得 $t_{10}(0.01) = 2.764$ ，由数据得

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

查表得 $t_{10}(0.01) = 2.764$, 由数据得

$$T_* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} = \frac{-2.97}{1.065} = -2.79 < -2.764,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

查表得 $t_{10}(0.01) = 2.764$ ，由数据得

$$T_* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_1^2/m + S_2^2/n}} = \frac{-2.97}{1.065} = -2.79 < -2.764,$$

拒绝 H_0 ，即认为甲矿石含铁量低于乙矿石。 □

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

2. 比率 p 的大样本检验方法

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

2. 比率 p 的大样本检验方法

比率是指特定的一组个体（人或物等）在总体中所占的比例。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

2. 比率 p 的大样本检验方法

比率是指特定的一组个体（人或物等）在总体中所占的比例。

如产品的不合格率、人口的出生率、某年龄段的死亡率、电视节目的收视率、导弹的命中率等。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

2. 比率 p 的大样本检验方法

比率是指特定的一组个体（人或物等）在总体中所占的比例。

如产品的不合格率、人口的出生率、某年龄段的死亡率、电视节目的收视率、导弹的命中率等。

比率 p 是在实际中常遇到的一种参数，可用看作两点分布 $B(1, p)$ 中的一个参数。若 $X \sim B(1, p)$ ，则 X 仅可取0或1两个值，且 $E(X) = p$ ， $Var(X) = p(1 - p)$ 。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

下面将讨论比率 p 的大样本检验问题。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

下面将讨论比率 p 的大样本检验问题。

设 X_1, \dots, X_n *i.i.d.* $\sim B(1, p)$, 考虑检验水平为 α 的检验问题:

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

下面将讨论比率 p 的大样本检验问题。

设 X_1, \dots, X_n *i.i.d.* $\sim B(1, p)$, 考虑检验水平为 α 的检验问题:

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs } H_1 : p \neq p_0,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

下面将讨论比率 p 的大样本检验问题。

设 X_1, \dots, X_n *i.i.d.* $\sim B(1, p)$ ，考虑检验水平为 α 的检验问题：

$$H_0 : p = p_0 \text{ vs } H_1 : p \neq p_0,$$

其中 p_0 和检验水平 α 给定。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $T \sim B(n, p)$, 由独立同分布场合的中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $T \sim B(n, p)$, 由独立同分布场合的中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $T \sim B(n, p)$, 由独立同分布场合的中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

故当 H_0 成立, 即 $p = p_0$, $n \rightarrow \infty$ 时有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $T \sim B(n, p)$, 由独立同分布场合的中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

故当 H_0 成立, 即 $p = p_0$, $n \rightarrow \infty$ 时有

$$U = \frac{T - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $T \sim B(n, p)$, 由独立同分布场合的中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

故当 H_0 成立, 即 $p = p_0$, $n \rightarrow \infty$ 时有

$$U = \frac{T - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

因此, 取 U 作为检验统计量。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知该检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知该检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知该检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U| > u_{\alpha/2}\}.$$

类似地，可知 p 的两个单边检验问题及水平近似为 α 的拒绝域如下：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知该检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U| > u_{\alpha/2}\}.$$

类似地，可知 p 的两个单边检验问题及水平近似为 α 的拒绝域如下：

$$H'_0 : p \leq p_0 \text{ vs } H'_1 : p > p_0, \quad D_2 = \{(X_1, \dots, X_n) : U > u_\alpha\};$$

$$H''_0 : p \geq p_0 \text{ vs } H''_1 : p < p_0, \quad D_3 = \{(X_1, \dots, X_n) : U < -u_\alpha\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

3. Poisson 分布参数的大样本检验

设 X_1, \dots, X_n 为自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 中抽取的随机样本，考虑检验问题

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

3. Poisson 分布参数的大样本检验

设 X_1, \dots, X_n 为自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 中抽取的随机样本，考虑检验问题

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ vs } H_1 : \lambda \neq \lambda_0,$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

3. Poisson 分布参数的大样本检验

设 X_1, \dots, X_n 为自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 中抽取的随机样本，考虑检验问题

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ vs } H_1 : \lambda \neq \lambda_0,$$

其中 λ_0 和检验水平 α 给定。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $n\lambda$ 的 Poisson 分布 $P(n\lambda)$ 。由中心极限定理可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有，

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $n\lambda$ 的 Poisson 分布 $P(n\lambda)$ 。由中心极限定理可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有，

$$\frac{T - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $n\lambda$ 的 Poisson 分布 $P(n\lambda)$ 。由中心极限定理可知，当 $n \rightarrow \infty$ 时有，

$$\frac{T - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

因此当 H_0 成立，即 $\lambda = \lambda_0$ ， $n \rightarrow \infty$ 时有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

由于 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 服从参数为 $n\lambda$ 的 Poisson 分布 $P(n\lambda)$ 。由中心极限定理可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有,

$$\frac{T - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

因此当 H_0 成立, 即 $\lambda = \lambda_0$, $n \rightarrow \infty$ 时有

$$U_0 = \frac{T - n\lambda_0}{\sqrt{n\lambda_0}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

故取 U_0 作为检验的统计量。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U_0 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知双边检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U_0 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知双边检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U_0| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时， U_0 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知双边检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U_0| > u_{\alpha/2}\}.$$

类似可知 λ 的两个单边检验问题及水平近似为 α 的拒绝域如下：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

当 n 较大时, U_0 近似服从 $N(0, 1)$ 分布。由 U 检验法可知双边检验问题的水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_n) : |U_0| > u_{\alpha/2}\}.$$

类似可知 λ 的两个单边检验问题及水平近似为 α 的拒绝域如下:

$$H_0' : \lambda \leq \lambda_0 \text{ vs } H_1' : \lambda > \lambda_0, \quad D_2 = \{(X_1, \dots, X_n) : U_0 > u_\alpha\};$$

$$H_0'' : \lambda \geq \lambda_0 \text{ vs } H_1'' : \lambda < \lambda_0, \quad D_3 = \{(X_1, \dots, X_n) : U_0 < -u_\alpha\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

4. 两个比率差的大样本检验问题

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

4. 两个比率差的大样本检验问题

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim B(1, p_1)$, Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim B(1, p_2)$, 且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。求检验问题:

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

4. 两个比率差的大样本检验问题

设 X_1, \dots, X_m *i.i.d.* $\sim B(1, p_1)$, Y_1, \dots, Y_n *i.i.d.* $\sim B(1, p_2)$, 且样本 X_1, \dots, X_m 和 Y_1, \dots, Y_n 独立。求检验问题:

$$H_0 : p_2 - p_1 = 0 \text{ vs } H_1 : p_2 - p_1 \neq 0,$$

检验水平 α 给定。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

记 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别为两组样本的均值。由中心极限定理可知，
当 $m, n \rightarrow \infty$ 时，

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

记 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别为两组样本的均值。由中心极限定理可知，
当 $m, n \rightarrow \infty$ 时，

$$\tilde{U}_1 = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (p_2 - p_1)}{\sqrt{p_1(1-p_1)/m + p_2(1-p_2)/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

记 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别为两组样本的均值。由中心极限定理可知，
当 $m, n \rightarrow \infty$ 时，

$$\tilde{U}_1 = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (p_2 - p_1)}{\sqrt{p_1(1-p_1)/m + p_2(1-p_2)/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

注意到当 H_0 成立，即 $p_1 = p_2 = p$ 时，将 p 用合样本估计，即取

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

记 \bar{X} 和 \bar{Y} 分别为两组样本的均值。由中心极限定理可知，
当 $m, n \rightarrow \infty$ 时，

$$\tilde{U}_1 = \frac{\bar{Y} - \bar{X} - (p_2 - p_1)}{\sqrt{p_1(1-p_1)/m + p_2(1-p_2)/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

注意到当 H_0 成立，即 $p_1 = p_2 = p$ 时，将 p 用合样本估计，即取

$$\hat{p} = \frac{1}{m+n} \left(\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{j=1}^n Y_j \right),$$

显然 \hat{p} 为 p 的相合估计。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

故由Slutsky定理可知，当 $m, n \rightarrow \infty$ 时，有

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

故由Slutsky定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \\ &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{p(1 - p)}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \cdot \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).\end{aligned}$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

故由Slutsky定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \\ &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{p(1 - p)}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \cdot \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).\end{aligned}$$

因此取 \tilde{U} 为检验统计量。由 U 检验法得到双边检验问题的检验水平近似为 α 的拒绝域为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

故由Slutsky定理可知, 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \\ &= \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).\end{aligned}$$

因此取 \tilde{U} 为检验统计量。由 U 检验法得到双边检验问题的检验水平近似为 α 的拒绝域为

$$D_1 = \{(X_1, \dots, X_m; Y_1, \dots, Y_n) : |\tilde{U}| > u_{\alpha/2}\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

还可以用类似方法获得下列两个检验水平为 α 的单边检验问题的拒绝域：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

还可以用类似方法获得下列两个检验水平为 α 的单边检验问题的拒绝域:

$$H_0' : p_2 \leq p_1 \text{ vs } H_1' : p_2 > p_1, \quad D_2 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \tilde{U}_* > u_\alpha\};$$

$$H_0'' : p_2 \geq p_1 \text{ vs } H_1'' : p_2 < p_1, \quad D_3 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \tilde{U}_* < -u_\alpha\}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

例 (5.2.9)

1954年，美国进行了一次大规模的群众性实验以确定脊髓灰质炎疫苗的效果。该研究的试验设计是让20万儿童接种脊髓灰质炎疫苗，另外20万儿童接种一种对照液（一种在外表上很像脊髓灰质炎疫苗的“糖水”）。两组儿童的小儿麻痹症的感染率如下：接种疫苗的有82人感染了小儿麻痹症，接种对照液的162人感染此症。在显著性水平为0.01和0.0005下，接种疫苗对小儿麻痹症的感染率是否有显著变化？

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解：

这是两个比率差的大样本检验问题。设接种对照液后感染了小儿麻痹症的感染率为 p_1 ，接种脊髓灰质炎疫苗后感染率为 p_2 ，我们可以进行如下的假设：

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解:

这是两个比率差的大样本检验问题。设接种对照液后感染了小儿麻痹症的感染率为 p_1 ，接种脊髓灰质炎疫苗后感染率为 p_2 ，我们可以进行如下的假设：

$$H_0 : p_1 \leq p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 \neq p_2.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解:

这是两个比率差的大样本检验问题。设接种对照液后感染了小儿麻痹症的感染率为 p_1 ，接种脊髓灰质炎疫苗后感染率为 p_2 ，我们可以进行如下的假设:

$$H_0 : p_1 \leq p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 \neq p_2.$$

由于样本量非常大，可以用大样本检验方法。检验统计量为

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

解:

这是两个比率差的大样本检验问题。设接种对照液后感染了小儿麻痹症的感染率为 p_1 ，接种脊髓灰质炎疫苗后感染率为 p_2 ，我们可以进行如下的假设:

$$H_0 : p_1 \leq p_2 \text{ vs } H_1 : p_1 \neq p_2.$$

由于样本量非常大，可以用大样本检验方法。检验统计量为

$$\tilde{U} = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}}.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

代入数据, $n = m = 2 \times 10^5$, $\hat{p} = 6.1 \times 10^{-4}$, $\bar{Y} = 8.1 \times 10^{-4}$,
 $\bar{X} = 4.1 \times 10^{-4}$, 查表得 $u_{0.005} = 2.5758$, 拒绝域
为 $D_1 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |\tilde{U}| > u_{\alpha/2}\}$, 故

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

代入数据, $n = m = 2 \times 10^5$, $\hat{p} = 6.1 \times 10^{-4}$, $\bar{Y} = 8.1 \times 10^{-4}$,
 $\bar{X} = 4.1 \times 10^{-4}$, 查表得 $u_{0.005} = 2.5758$, 拒绝域
为 $D_1 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |\tilde{U}| > u_{\alpha/2}\}$, 故

$$|\tilde{U}| = \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \right| = 6.56 > 2.5758.$$

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

代入数据, $n = m = 2 \times 10^5$, $\hat{p} = 6.1 \times 10^{-4}$, $\bar{Y} = 8.1 \times 10^{-4}$,
 $\bar{X} = 4.1 \times 10^{-4}$, 查表得 $u_{0.005} = 2.5758$, 拒绝域
为 $D_1 = \{(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : |\tilde{U}| > u_{\alpha/2}\}$, 故

$$|\tilde{U}| = \left| \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}} \sqrt{\frac{mn}{m + n}} \right| = 6.56 > 2.5758.$$

因此, 拒绝 H_0 。即我们有99%的把握说儿童接种脊髓灰质炎疫苗对小儿麻痹症的感染率有显著变化。

5.2.5 极限分布为正态分布的检验

事实上，取 $\alpha = 0.005$ ，由 $u_{0.00025} = 3.045$ ，我们仍然拒绝 H_0 ，即我们有99.95%的把握说儿童接种疫苗对小儿麻痹症的感染率有显著变化。□