目录

Chapter 1

第 1 周课后作业

1. 试举出一个有限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】

2. 试举出一个无限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】

3. 一个总体有 N 个元素，其指标分别为 $a_1 > a_2 > \cdots > a_N$，指定自然数 $M < N$，$n < N$，并设 $m = \dfrac{nM}{N}$ 为整数. 在 $(a_1, a_2, \ldots, a_M)$ 中不放回地随机抽出 m 个，在 $(a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_N)$ 中不放回地随机抽出 $n-m$ 个. 写出所得样本的分布. (2 分)

   【解】

4. 一物体的重量 a 未知，有两架天平可用，其随机误差分别服从正态分布 $N(0, \sigma_1^2)$ 和 $N(0, \sigma_2^2)$，其中 σ_1^2 和 σ_2^2 都未知. 先把物体在第一架天平上称两次得 X_1, X_2，再在第二架天平上称两次得 X_3, X_4，然后视 $|X_1 - X_2| \le |X_3 - X_4|$ 与否而在第一架或第二架天平上再称 $n-4$ 次得 $X_5, \ldots, X_n$. 写出 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的密度. (2 分)

   【解】

5. 设总体 X 服从两点分布 $b(1, p)$ （即 $P(X=1) = p$，$P(X=0) = 1-p$），其中 p 是未知参数，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ 为从此总体中抽取的简单样本，

   (a) 写出样本空间 $\mathscr{X}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布. (2 分)

   【解】

   (b) 指出 $X_1 + X_2$，$\min\limits_{1 \le i \le 5} X_i$，$X_5 + 2p$，$X_5 - E(X_1)$，$\dfrac{(X_5 - X_1)^2}{D(X_1)}$ 哪些是统计量，哪些不是统计量，并说明理由. (2 分)

   【解】

6. 设 $a \neq 0$ 和 b 皆为常数，令 $y_i = ax_i + b$，$i = 1, 2, \ldots, n$.

(a) 证明 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的样本均值 $\overline{y}$ 与 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的样本均值 $\overline{x}$ 之间的关系为 $\overline{y} = a\overline{x} + b$. (2 分)

【证明】

(b) 证明 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 的样本方差 S_y^2 与 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的样本方差 S_x^2 之间的关系为 $S_y^2 = a^2 S_x^2$. (2 分)

【证明】

(c) 根据上述结果，利用适当的变换，求下列数据的样本均值和样本方差: (2 分)

$$480, \quad 550, \quad 500, \quad 590, \quad 510, \quad 560, \quad 490, \quad 600, \quad 580.$$

【解】

Chapter 2

第 2 周课后作业

1. 设从正态总体$N(20,9)$中分别抽取容量为10和15的两组独立样本，记这两组样本的样本均值和样本方差分别为$\bar{X}$，$\bar{Y}$和S_x^2，S_y^2。

   （1）求两样本均值差的绝对值大于0.3的概率. (2 分)

   （2）求$9S_X^2+14S_Y^2$大于164的概率. (2 分)

   【解答】

2. 设 X_1, X_2, $\ldots$, X_n 和 Y_1, Y_2, $\ldots$, Y_n 是分布从正态总体 $N(\mu,\, \sigma^2)$ 中抽取的两组简单样本，且两者相互独立. 令 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为这两组样本的样本均值，试确定样本大小 n 的近似值，使得 $P\left(\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>\sigma\right)\approx 0.01$. (3 分)

   【解答】

3. 设 X_1, X_2 为取自正态总体 $X\sim N(0,\, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，证明统计量

$$\frac{X_1}{X_2} \quad \text{和} \quad \sqrt{X_1^2+X_2^2}$$

   相互独立. (3 分)

   【证明】

4. 设 X 服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

   (a) [2 分] 证明 X 的特征函数为 $\varphi(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$.

   【证明】

   (b) [2 分] 证明 X 的数学期望 $\mathbb{E}(X)=n$.

   【证明】

   (c) [2 分] 证明 X 的方差 $\mathbb{D}(X)=2n$.

   【证明】

5. [2 分] 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi_n^2$，且 X 与 Y 相互独立，证明 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的概率密度函数为

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

【证明】

6. [2 分] 设 $X \sim F_{m,\,n}$, 记 $F_{m,\,n}(\alpha)$ 为 $F_{m,\,n}$ 分布的上侧 α 分位数, 即 $P\left(X > F_{m,\,n}(\alpha)\right) = \alpha$. 证明：

$$F_{m,\,n}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{n,\,m}(\alpha)}. \tag{2.2}$$

【证明】

Chapter 3

第 3 周课后作业

1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, 且

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

又设 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且与 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立, 求统计量

$$\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \tag{3.1}$$

的分布. (2 分)

【解】

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$, 且 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 相互独立, 又设

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S_{1m}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \quad S_{2n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

α 和 β 是两个给定的实数，求

$$T = \frac{\alpha\left(\overline{X} - \mu_1\right) + \beta\left(\overline{Y} - \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{mS_{1m}^2 + nS_{2n}^2}{n+m-2} \cdot \left(\dfrac{\alpha^2}{m} + \dfrac{\beta^2}{n}\right)}} \tag{3.2}$$

的分布. (2 分)

【解】

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. F, $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ 是其次序统计量，已知

$$P\left(X_{(m)} \le x\right) = \sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}\left[F(x)\right]^i\left[1 - F(x)\right]^{n-i}$$

证明以下恒等式：

$$\sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} = m \binom{n}{m} \int_0^{F(x)} t^{m-1}(1-t)^{n-m} dt$$

(提示：为证

$$\sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = m \binom{n}{m} \int_0^{p} t^{m-1}(1-t)^{n-m} dt$$

注意 $p=0$ 时两边相等, 两边对 p 的导数也一样.) (4 分)

【证明】

4. 设 $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ 为从均匀分布 $U(0, 1)$ 中抽取的次序统计量.

   (a) 样本容量 n 为多大时，才能使 $P\left(X_{(n)} \geq 0.99\right) \geq 0.95$？ (2 分)

   【解答】

   (b) 求极差 $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的密度函数. (2 分)

   【解答】

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 的简单样本, 利用中心极限定理确定

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

的极限分布. (2 分)

【解】

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 分布为取自正态总体 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu, \sigma_2^2)$ 的简单样本，证明当 m, n 都趋于无穷时, 统计量

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{m}+\dfrac{S_Y^2}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \tag{3.3}$$

其中 S_X^2 和 S_Y^2 分别为两组样本的样本方差. (2 分)

【证明】

Chapter 4

第 4 周课后作业

1. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n)$ 是从 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单随机样本. 利用定义证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.1}$$

为充分统计量.

【证明】

2. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n)$ 是从几何分布中抽取的简单随机样本. 利用定义证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.2}$$

为充分统计量.

【证明】

3. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n)$ 是从 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单随机样本. 利用因子分解定理证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.3}$$

为充分统计量.

【证明】

4. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1\,, X_2\,, \ldots\,, X_n)$ 是取自指数分布

$$f(x,\,\lambda) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot I_{(0,\,+\infty)}(x) \tag{4.4}$$

的简单随机样本. 利用因子分解定理证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.5}$$

为充分统计量.

【证明】

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim N(\theta, \theta^2), \theta > 0$, 问

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

是否为充分统计量? (2 分)

【解】

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ i.i.d. $\sim N(a, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\sim N(b, \sigma^2)$，且两组样本相互独立，记

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j, \quad S^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2\right] \tag{4.6}$$

证明 $(\overline{X}, \overline{Y}, S^2)$ 是充分统计量. (2 分)

【证明】

7. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从某总体中抽取的简单随机样本, 满足 $E(X_1) = \mu < \infty$, $E(X_1^2) < \infty$, 证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(i \cdot X_i)$$

是 μ 的弱相合估计. (2 分)

【证明】

8. 设总体 X 服从均匀分布 $U(0, 2\theta)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单随机样本.

   (a) [2 分] 证明 $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{2n}X_{(n)}$ 为 θ 的无偏估计.

   【证明】

   (b) [2 分] 证明 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的强相合估计，$\hat{\theta}_2^* = \dfrac{X_{(n)}}{2}$ 为 θ 的弱相合估计.

   【证明】

   (c) [2 分] 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差，问哪一个更有效?

   【解】

Chapter 5

第 5 周课后作业

1. [2 分] 设总体 X 服从二项分布 $b(k,\,p)$，k 是正整数，$0 < p < 1$，两者都是未知参数，$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为从中抽取的简单随机样本，求 k 和 p 的矩估计.

   【解】

2. [2 分] 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自对数级数分布

$$P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p^k}{k},\quad 0<p<1\,,\ k=1,\,2,\,\ldots$$

   的简单随机样本，求参数 p 的矩估计.

   【解】

3. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自正态分布 $N\left(0,\,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，求参数 σ 的矩估计量.

   (a) [2 分] 利用 $\mathrm{E}\left(|X_1|\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\sigma$.

   【解】

   (b) [2 分] 利用 $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\left(X_1\right)}$.

   【解】

4. [2 分] 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 是来自正态总体 $N\left(a,\,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，求 $P(X>1)$ 的矩估计量.

   【解】

5. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 是来自伽马分布 $\Gamma(r,\,\lambda)$ 的简单随机样本，其中 r 已知.

   (a) [2 分] 求 λ 的矩估计量.

   【解】

   (b) [2 分] 讨论该矩估计量的无偏性.

   【解】

6. 设 $X=\mathrm{e}^{\xi}$，而 $\xi\sim N\left(a\,,\,\sigma^2\right)$，则随机变量 X 的分布称为对数正态分布.

(a) [2 分] 求 X 的概率密度函数.

【解】

(b) [2 分] 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是从总体 X 抽取的简单随机样本，求 a 和 σ^2 的矩估计.

【解】

Chapter 6

第 6 周课后作业

1. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x,\,\theta) = \begin{cases} \theta(\theta+1)\,x^{\theta-1}(1-x)\,, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases}, \qquad (\theta > 0) \tag{6.1}$$

若 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自该总体的一个简单随机样本.

(a) 用矩估计法求 θ 的点估计. (2 分)

【解】

(b) 用极大似然估计法求 θ 的点估计. (2 分)

【解】

2. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自均匀分布总体 $U(\theta,\,2\,\theta)$ 的一个简单随机样本，其中 $0 < \theta < +\infty$.

(a) 求 θ 的 MLE. (2 分)

【解】

(b) 讨论 θ 的 MLE 是否为无偏估计量. (2 分)

【解】

(c) 如果不是则对它进行修正以得到 θ 的一个无偏估计量. (2 分)

【解】

3. 为了估计红山湖中有多少条鱼，用渔网从中捞出了 150 条鱼，进行标记后放生回湖中，过一段时间后有放回地捞出 100 条鱼，发现其中 12 条鱼带有标记. 问红山湖中有多少条鱼，才能使 100 条鱼中出现 12 条带有标记的鱼的概率最大？(2 分)

【解】

4. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自双参数指数分布

$$f(x,\,\mu,\,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}, \quad x \geq \mu \tag{6.2}$$

的简单随机样本，其中 $-\infty < \mu < +\infty$，$\sigma > 0$.

(a) 求 μ、σ 的矩估计. (2 分)

【解】

(b) 求 $P(X_1 \geq t)$ 的矩估计，其中 $t \geq \mu$. (2 分)

【解】

(c) 求 μ、σ 的极大似然估计. (2 分)

【解】

(d) 求 $P(X_1 \geq t)$ 的极大似然估计，其中 $t \geq \mu$. (2 分)

【解】

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 分别为取自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两组独立简单随机样本.

(a) 写出似然函数. (2 分)

【解】

(b) 给出似然方程.(2 分)

【解】

(c) 求解 μ_1，μ_2 和 σ^2 的 MLE.(2 分)

【解】

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自下述指数分布的简单随机样本：

$$f(x, \mu) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{6.3}$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty$.

(a) 求 μ 的极大似然估计 $\hat{\mu}_1$.(2 分)

【解】

(b) 判断 $\hat{\mu}_1$ 是否为 μ 的无偏估计，如果不是，对它进行修正以得到 μ 的一个无偏估计 $\hat{\mu}_2$.(2 分)

【解】

(c) 求 μ 的矩估计 $\hat{\mu}_3$.(2 分)

【解】

(d) 证明 $\hat{\mu}_3$ 是 μ 的无偏估计.(2 分)

【证】

(e) 判断 $\hat{\mu}_2$ 和 $\hat{\mu}_3$ 哪一个更为有效？ (2 分)

【解】

7. 若总体 X 为下列 $0-1$ 分布族

$$\mathbb{P}_\theta(X=1)=1-\mathbb{P}_\theta(X=0)=\begin{cases}\theta\,, & \theta\text{ 为有理数}\\ 1-\theta\,, & \theta\text{ 为无理数}\end{cases} \tag{6.4}$$

设 $X_1\,,X_2\,,\ldots\,,X_n$ 为取自该总体的一个简单随机样本.

(a) 求 θ 的 MLE (极大似然估计). (2 分)

【解】

(b) 证明 θ 的 MLE (极大似然估计) 不是相合估计. (2 分)

【证】

8. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为取自均匀分布总体 $U\,(\theta_1,\,\theta_2)$ 的简单随机样本.

(a) 求 θ_1 和 θ_2 的 MLE $\widehat{\theta}_1$ 和 $\widehat{\theta}_2$. (2 分)

(b) 确定 $\widehat{\theta}_1$ 和 $\widehat{\theta}_2$ 是否分别为 θ_1 和 θ_2 的无偏估计？如果不是，对其进行修正以获得 θ_1 和 θ_2 的无偏估计. (2 分)

【解】

Chapter 7

第 7 周课后作业

1. 证明均匀分布族 $\mathscr{F} = \{U(0,\ \theta) : 0 < \theta < \infty\}$ 不是 C-R 正则分布族. (2 分)

   【证】

2. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ 为取自总体

$$f(x,\ \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.1}$$

   的简单随机样本，其中 $\theta > 0$ 为未知参数.

   (a) 求 θ 的 MLE $\widehat{\theta}$. (2 分)

   【解】

   (b) 证明 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的有效估计. (2 分)

   【证】

3. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ i.i.d. $\sim N(0,\ \sigma^2)$，其中 σ^2 为未知参数.

   (a) 求 σ^2 的无偏估计方差的 C-R 下界. (2 分)

   【解】

   (b) 证明 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 σ^2 的有效估计. (2 分)

   【证】

4. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ i.i.d. $\sim N(a,\ \sigma^2)$，其中 a 已知.

   (a) 证明 $\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i - a|$ 为 σ 的无偏估计量. (2 分)

   【证】

   (b) 证明该无偏估计量的效率为 $\dfrac{1}{\pi - 2}$. (2 分)

   【证】

5. 设 X_1, X_2, X_3 是取自均匀分布总体 $U(0,\ \theta)$ 的简单随机样本.

(a) 证明 $\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 是 θ 的无偏估计量. (2 分)

【证】

(b) 证明 $4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 是 θ 的无偏估计量. (2 分)

【证】

(c) 确定上述两个无偏估计量哪一个更有效？ (2 分)

【解】

6. 设总体 X 的数学期望为 a，$\widehat{a}_1$ 和 $\widehat{a}_2$ 分别为 a 的两个无偏估计量，它们的方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，相关系数为 ρ，确定常数 $c_1>0$，$c_2>0$，$c_1+c_2=1$，使得 $c_1\widehat{a}_1+c_2\widehat{a}_2$ 具有最小的方差. (2 分)

【解】

Chapter 8

第 8 周课后作业

1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的一个简单随机样本.

   (a) 如果 $n=4$，求 μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1, \overline{X}+1\right]$ 的置信系数. (2 分)

   【解】

   (b) 要使 μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1, \overline{X}+1\right]$ 的置信系数为 0.99，问样本容量 n 至少为多少? (2 分)

   【解】

2. 对一物体某指标进行 5 次测量，得其数据：4.781, 4.795, 4.769, 4.792, 4.779. 设指标值服从 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 $\sigma=0.01$，求物体该指标平均值的置信系数为 0.95 的置信区间. (2 分)

   【解】

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ, σ^2 均未知.

   (a) 利用枢轴变量法确定 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限. (2 分)

   【解】

   (b) 某种油漆 9 个样品的干燥时间（单位：小时）为 6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0，假设干燥时间服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，求 μ 的置信系数为 0.95 的单侧置信上限. (2 分)

   【解】

4. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ 已知，利用枢轴变量法确定 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限. (2 分)

   【解】

5. 某电子产品的某一参数服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，今从某天生产的产品中随机抽取 15 只，测得该参数值如下：

   $$3.0,\ 2.7,\ 2.9,\ 2.8,\ 3.1,\ 2.6,\ 2.5,\ 2.8,\ 2.4,\ 2.9,\ 2.7,\ 2.6,\ 3.2,\ 3.0,\ 2.8$$

   求该参数均值 μ 的置信系数为 95% 的置信区间. (2 分)

   【解】

6. 某电子产品的某一参数服从正态分布，今从某天生产的产品中随机抽取 15 只，测得该参数值如下：

$$3.0,\ 2.7,\ 2.9,\ 2.8,\ 3.1,\ 2.6,\ 2.5,\ 2.8,\ 2.4,\ 2.9,\ 2.7,\ 2.6,\ 3.2,\ 3.0,\ 2.8$$

求该参数方差的置信系数为 95% 的置信区间. (2 分)

【解】

7. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的简单随机样本，为使 $\frac{1}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$ 成为 σ 的置信系数为 0.95 的单侧置信下限，问样本容量 n 至少应取多少？(2 分)

【解】

8. [选做（2 分）] 已知置信系数为$1-\alpha$，样本$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$是从总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本，请将下列表格补充完整.

表 8.1: 单个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
μ	σ^2已知				
μ	σ^2未知				
σ^2	μ已知				
σ^2	μ未知				

【解】

Chapter 9

第 9 周课后作业

1. 随机地从 A 批导线中抽取 4 根，从 B 批导线中抽取 5 根，测量电阻（单位：Ω）为

A 批导线	0.143	0.142	0.143	0.137	
B 批导线	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

假设测试数据分别服从正态分布 $N(a_1, \sigma^2)$ 和 $N(a_2, \sigma^2)$，并且它们相互独立，a_1, a_2, σ^2 均未知，求 $a_1 - a_2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

2. 枪弹的速度（单位：米/秒）服从正态分布，为了比较两种枪弹的速度，在相同的条件下进行速度测定. 经计算得相关数据如下：

$$\text{枪弹甲：} m = 110，\bar{X} = 2805，S_1 = 120.41$$

$$\text{枪弹乙：} n = 100，\bar{Y} = 2680，S_2 = 105.00$$

求这两种枪弹的平均速度之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 是来自正态总体 $N(a, \sigma_1^2)$ 的简单随机样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是来自正态总体 $N(b, \sigma_2^2)$ 的简单随机样本，且两组样本相互独立. 当 $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \lambda$ 且 λ 已知时，确定 $b - a$ 的置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信区间. (2 分)

【解】

4. 有甲、乙两台机床加工同样的产品，分别从他们加工的产品中抽取若干个产品，测量各个产品的直径，计算得相关数据如下：

$$\text{机床甲：} m = 8，\bar{x} = 30.97，S_1 = 36.7$$

$$\text{机床乙：} n = 7，\bar{y} = 21.99，S_2 = 8.1$$

假设产品直径服从正态分布，求

(a) 这两台机床加工产品的平均直径之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

(b) 这两台机床加工精度（即方差）之比的置信水平为 0.90 的置信区间. (2 分)

【解】

5. 某学校计划组织一次大型活动，为此要了解学生对该活动的支持程度，随机地对 100 名学生进行了解，其中有 22 名支持者. 若记该校学生中支持这项活动的人数比例为 p，并假设该校学生人数足够多.

(a) 求 p 的置信系数为 0.99 的置信区间. (2 分)

【解】

(b) 若只关心 p 的置信下限，求出置信系数为 0.95 的置信下限. (2 分)

【解】

6. 电话总机在单位时间内接到的呼唤次数服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$. 观察单位时间内呼唤次数 40 次，获得如下数据：

接到的呼唤次数	0	1	2	3	4	5	6	7
观察次数	5	10	12	8	3	2	0	0

求 λ 的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

7. [选做（2 分）] 设$X_1, \dots, X_m$是自正态总体$N(a, \sigma_1^2)$抽取的简单样本，$Y_1, \dots, Y_n$是自正态总体$N(b, \sigma_2^2)$抽取的简单样本，且$X_1, \dots, X_m$和$Y_1, \dots, Y_n$独立。已知置信系数为$1-\alpha$，请将下列表格补充完整.

表 9.1: 两个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
$b-a$	σ_1^2, σ_2^2未知，$m=n$已知				
$b-a$	σ_1^2, σ_2^2已知				
$b-a$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知				
$b-a$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知，$m$和$n$充分大				
$b-a$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知，$m$和$n$不是充分大				
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a, b已知				
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a, b未知				

【解】

8. [选做（2 分）] 已知置信系数为$1-\alpha$，请将下列表格补充完整.

表 9.2: 非正态总体参数的置信区间

分布与条件	参数	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
指数分布$Exp(\lambda)$	λ				
均匀分布$U(0,\theta)$	θ				
二项分布$B(n,p)$ 大样本	p				
泊松分布$P(\lambda)$ 大样本	λ				

【解】

Chapter 10

第 10 周课后作业

1. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_{20})$ 为从两点分布总体 $b(1, p)$ 中抽取的简单随机样本，对未知参数 p 的检验问题为 $H_0: p = 0.2 \longleftrightarrow H_1: p \neq 0.2$，取检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

   (a) 求此检验函数在 $p = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1.0$ 时的功效函数. (2 分)

   【解】

   (b) 利用 R 作功效函数的图形. (2 分)

   【解】

   (c) 求检验的水平 α 和 $p = 0.10$ 时犯第 II 类错误的概率. (2 分)

   【解】

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 9)$，其中 μ 为未知参数，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为样本均值. 如果检验问题 $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$ 的否定域为

$$\left\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): \left|\overline{X} - \mu_0\right| \geq c\right\}.$$

   (a) 确定常数 c，使检验水平 $\alpha = 0.05$. (2 分)

   【解】

   (b) 求此检验的功效函数 $\beta(\mu)$. (2 分)

   【解】

   (c) 固定样本容量 $n = 25$，分析犯两类错误概率 α 和 β 之间的关系. (2 分)

   【解】

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$，其中 θ 为未知参数，$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. 对检验问题

$H_0: \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$，取检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} \ge c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数，并证明它是 θ 的单调递增函数. (2 分)

【解】

(b) 在检验问题 $H_0: \theta \le \dfrac{1}{2} \longleftrightarrow H_1: \theta > \dfrac{1}{2}$ 中，选择什么样的 c 使检验水平恰好为 0.05? (2 分)

【解】

(c) 画出 $n = 20$ 时 (b) 中指定的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数的图形 (用 R 作图). (2 分)

【解】

(d) n 取多大，能使 (b) 中指定的检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，当 $\theta = \dfrac{3}{4}$ 时的功效（即功效函数在 Θ_1 中某一点的值）为 0.98? (2 分)

【解】

4. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ 为取自 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的简单随机样本.

(a) 用直观方法求单边假设检验问题 $H_0: \lambda \le 0.1 \longleftrightarrow H_1: \lambda > 0.1$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验. (2 分)

【解】

(b) 求此检验的功效函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda = 0.05, 0.2, 0.3, \ldots, 0.9$ 时的值，并利用 R 画出 $\beta(\lambda)$ 的图形. (2 分)

【解】

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知. 给定检验水平为 α.

(a) 确定单边假设检验问题

$$H_0: \mu \ge \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu < \mu_0$$

的决策规则. (2 分)

【解】

(b) 确定单边假设检验问题

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的决策规则. (2 分)

【解】

6. 根据长期经验和资料分析，某砖瓦厂生产的砖的抗断强度 X 服从方差为 σ^2 的正态分布，今从该厂所生产的一批砖中随机抽取 6 块，测得抗断强度 (单位：kg/cm^2) 如下:

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问这一批砖的平均抗断强度可否认为是 32.50 $\mathrm{kg/cm^2}$？($\alpha = 0.05$). (2 分)

【解】

7. 测定某种溶液中的水分，它的 10 个测定值给出 $\overline{x} = 0.452\%$，$s = 0.037\%$，假设测定值总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，取显著性水平 $\alpha = 0.05$，检验

   (a) $H_0 : \mu \leq 0.5\% \quad \longleftrightarrow \quad H_1 : \mu > 0.5\%$. (2 分)

   【解】

   (b) $H_0 : \sigma \geq 0.04\% \quad \longleftrightarrow \quad H_1 : \sigma < 0.04\%$. (2 分)

   【解】

Chapter 11

第 11 周课后作业

1. 有甲乙两台机床加工同样产品，从这两台机床加工的产品中随机抽取若干产品，测得产品直径（单位：mm）为

   机床甲：20.5, 29.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

   机床乙：19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

   假定产品直径服从正态分布，且两者方差相同，试比较甲乙两台机床加工的质量有无显著差异 $(\alpha = 0.05)$？(2 分)

   【解】

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 是取自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，且两样本相互独立，其中 μ_1, μ_2, σ^2 均未知. 在检验水平为 α 时，确定单边假设检验问题

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

   的决策规则. (2 分)

   【解】

3. 两台机床加工同一零件，分别取 6 个和 9 个零件，测量其长度 $X_i\ (i = 1, 2, \ldots, 6)$ 和 $Y_j\ (j = 1, 2, \ldots, 9)$ 后算得

$$Q_1^2 = \sum_{i=1}^{6} (X_i - \bar{X})^2 = 1.725, \quad Q_2^2 = \sum_{j=1}^{9} (Y_j - \bar{Y})^2 = 2.856$$

   若零件长度服从正态分布，问是否可以认为两台机床加工的零件的方差无显著差异 $(\alpha = 0.02)$？(2 分)

   【解】

4. 为研究矽肺患者功能的变化情况，某医院对 I、II 期矽肺患者各 33 名测定其肺活量，得到 I 期患者的平均数为 2710 ml，标准差为 147 ml， II 期患者的平均数为 2830 ml，标准差为 118 ml，对水平 $\alpha = 0.10$，问第 I、II 期患者的肺活量有无显著差异（假定肺活量服从正态分布）. (2 分)

【解】

5. 在 10 块土地上同时种植甲、乙两个品种的农作物，假定每种农作物的产量服从正态分布，收获后计算得农作物产量的样本均值和样本标准差为：

$$\bar{X} = 30.97,\ \ \bar{Y} = 21.79,\ \ S_x = 26.7,\ \ S_y = 10.1$$

问这两种农作物的产量有无显著差异 $(\alpha = 0.02)$？ (2 分)

【解】

6. 为了确定肥料的效果，取 1000 株植物做试验，在没有施肥的 100 株植物中有 53 株长势良好，在已施肥的 900 株中，则有 783 株长势良好，问施肥的效果是否显著 $(\alpha = 0.01)$？ (2 分)

【解】

7. 设有两工厂生产同一种产品，为了检验它们的次品率 p_1 与 p_2 是否相同，在第一、第二工厂的产品中各自独立抽取了 $n_1 = 1500$ 个以及 $n_2 = 1800$ 个，经检测分别有次品 300 个以及320 个，问在 5% 的水平上，可否认为两工厂产品的次品率相同. (2 分)

【解】