目录

1 第 1 周课后作业参考答案 1

2 第 2 周课后作业参考答案 5

3 第 3 周课后作业参考答案 13

4 第 4 周课后作业参考答案 21

5 第 5 周课后作业参考答案 29

6 第 6 周课后作业参考答案 35

7 第 7 周课后作业参考答案 47

8 第 8 周课后作业参考答案 3

9 第 9 周课后作业参考答案 11

10 第 10 周课后作业参考答案 21

11 第 11 周课后作业参考答案 35

Chapter 1

第 1 周课后作业参考答案

1. 试举出一个有限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】 盒子中装有 4 个红球、6 个白球，从中随机取出 3 个球，观察这 3 个球当中红球的个数 X，则 X 的可能取值为： $0, 1, 2, 3$. 这是一个有限总体. 其概率分布为

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2. 试举出一个无限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】 研究银行工作人员接待一名顾客的服务时间 X，假设服务时间服从参数为 θ 的指数分布，则 X 的所有可能取值为：$(0, +\infty)$，这是一个无限总体，X 的概率密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

3. 一个总体有 N 个元素，其指标分别为 $a_1 > a_2 > \cdots > a_N$，指定自然数 $M < N$，$n < N$，并设 $m = \dfrac{nM}{N}$ 为整数. 在 $(a_1, a_2, \ldots, a_M)$ 中不放回地随机抽出 m 个，在 $(a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_N)$ 中不放回地随机抽出 $n-m$ 个. 写出所得样本的分布. (2 分)

   【参考答案】 假设所抽取的样本为 $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$，因为$N$个指标都不相同，从$(a_1, a_2, \ldots, a_M)$ 中不放回地随机抽出 m 个，再从 $(a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_N)$ 中不放回地随机抽出 $n-m$ 个，共有$\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$种不同的结果。考虑顺序共有$\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}n!$种不同的等可能的结果。若记事件$A_i = \{X_i = x_i\}$，只考虑其中一种结果，即前$m$个抽出的是$(a_1, \ldots, a_m)$，后$n-m$个抽出的是$(a_{M+1}, \ldots, a_{M+n-m})$利用概率乘法公式可得到

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}),$$

可求出样本的分布为

$$P\left(X_1=x_1,\ldots,X_m=x_m,\ldots,X_{m+1}=x_{m+1},\ldots,X_n=x_n\right)$$

$$=\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}\cdots\frac{M-(m-1)}{N-(m-1)}\times\frac{N-M}{N-m}\cdot\frac{N-M-1}{N-(m+1)}\cdots\frac{N-M-(n-m-1)}{N-(n-1)}.$$

4. 一物体的重量 a 未知，有两架天平可用，其随机误差分别服从正态分布 $N\left(0,\,\sigma_1^2\right)$ 和 $N\left(0\,,\,\sigma_2^2\right)$，其中 σ_1^2 和 σ_2^2 都未知. 先把物体在第一架天平上称两次得 X_1, X_2，再在第二架天平上称两次得 X_3, X_4，然后视 $|X_1-X_2|\le|X_3-X_4|$ 与否而在第一架或第二架天平上再称 $n-4$ 次得 $X_5\,,\,\ldots\,,\,X_n$. 写出 $(X_1\,,\,X_2\,,\,\ldots\,,\,X_n)$ 的密度. (2 分)

【参考答案】 由题意可知 $X_1\,,\,X_2\sim N\left(a\,,\,\sigma_1^2\right)$, 该总体的概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} \tag{1.2}$$

同样，$X_3\,,\,X_4\sim N\left(a\,,\,\sigma_2^2\right)$, 该总体的概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_2^2}} \tag{1.3}$$

当 $|X_1-X_2|\le|X_3-X_4|$ 时, $X_i\sim N\left(a,\,\sigma_1^2\right)$, $i=5\,,\,6\,,\,\ldots\,,\,n$, 因此

$$f_{X_i}(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma_1^2}}\,,\ i=5\,,\,6\,,\,\ldots\,,\,n \tag{1.4}$$

当 $|X_1-X_2|>|X_3-X_4|$ 时, $X_i\sim N\left(a,\,\sigma_2^2\right)$, $i=5\,,\,6\,,\,\ldots\,,\,n$, 因此

$$f_{X_i}(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma_2^2}}\,,\ i=5\,,\,6\,,\,\ldots\,,\,n \tag{1.5}$$

再根据简单随机样本，我们有 $(X_1\,,\,X_2\,,\,X_3\,,\,X_4\,,\,X_5\,,\,X_6\,,\,\ldots\,,\,X_n)$ 相互独立，于是其联合概率密度函数为

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_{X_1}(x_1)\,f_{X_2}(x_2)\,f_{X_3}(x_3)\,f_{X_4}(x_4)\,f_{X_5}(x_5)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sigma_1^{n-2}\sigma_2^2}\exp\left\{-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}(x_i-a)^2+\sum\limits_{j=5}^{n}(x_j-a)^2}{2\sigma_1^2}-\dfrac{\sum\limits_{k=3}^{4}(x_k-a)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, & |X_1-X_2|\le|X_3-X_4|\\[4ex] \dfrac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\sigma_1^2\sigma_2^{n-2}}\exp\left\{-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}(x_i-a)^2}{2\sigma_1^2}-\dfrac{\sum\limits_{j=3}^{n}(x_j-a)^2}{2\sigma_2^2}\right\}, & |X_1-X_2|>|X_3-X_4|\end{cases}$$

5. 设总体 X 服从两点分布 $b(1,p)$（即 $P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$），其中 p 是未知参数，$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$ 为从此总体中抽取的简单样本，

(a) 写出样本空间 $\mathscr{X}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布. (2 分)

【参考答案】 样本空间为

$$\mathscr{X}=\{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5):X_i=0\text{ 或 }1,\ i=1,2,3,4,5\}$$

$\boldsymbol{X}$ 的概率分布为

$$P(X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ X_3=x_3,\ X_4=x_4,\ X_5=x_5)=p^{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i}(1-p)^{5-\sum\limits_{i=1}^{5}x_i}$$

其中 $x_i=0$ 或 1, $i=1,2,3,4,5$. 或者 $\sum\limits_{i=1}^{5}X_i\sim b(5,p)$.

(b) 指出 X_1+X_2，$\min\limits_{1\le i\le 5}X_i$，$X_5+2p$，$X_5-E(X_1)$，$\dfrac{(X_5-X_1)^2}{D(X_1)}$ 哪些是统计量，哪些不是统计量，并说明理由. (2 分)

【参考答案】 因为

$$X_1+X_2,\quad \min_{1\le i\le 5}X_i$$

是样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$ 的函数，且不含未知参数，因此它们是统计量.

$$X_5+2p,\quad X_5-E(X_1),\quad \frac{(X_5-X_1)^2}{D(X_1)}$$

虽然也是样本 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$ 的函数，但其中含有未知参数 p，所以它们不是统计量.

6. 设 $a\neq 0$ 和 b 皆为常数，令 $y_i=ax_i+b$，$i=1,2,\ldots,n$.

(a) 证明 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的样本均值 $\overline{y}$ 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的样本均值 $\overline{x}$ 之间的关系为 $\overline{y}=a\overline{x}+b$. (2 分)

【参考答案】 证明过程如下：

$$\begin{aligned}\overline{y}&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\\&=a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b\\&=a\overline{x}+b\end{aligned}\tag{1.6}$$

(b) 证明 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的样本方差 S_y^2 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的样本方差 S_x^2 之间的关系为 $S_y^2=a^2S_x^2$. (2 分)

【参考答案】 证明过程如下：

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+b)-(a\overline{x}+b)]^2 \\ &= \frac{a^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \\ &= a^2S_x^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

(c) 根据上述结果，利用适当的变换，求下列数据的样本均值和样本方差: (2 分)

$$480\,,\quad 550\,,\quad 500\,,\quad 590\,,\quad 510\,,\quad 560\,,\quad 490\,,\quad 600\,,\quad 580\,.$$

【参考答案】 记

$$y_1=480\,,\, y_2=550\,,\, y_3=500\,,\, y_4=590\,,\, y_5=510\,,\, y_6=560\,,\, y_7=490\,,\, y_8=600\,,\, y_9=580$$

作变换

$$x=\frac{y-550}{10}\,,\quad \Longrightarrow \quad y=10x+550$$

由此可得

$$x_1=-7\,,\, x_2=0\,,\, x_3=-5\,,\, x_4=4\,,\, x_5=-4\,,\, x_6=1\,,\, x_7=-6\,,\, x_8=5\,,\, x_9=3$$

易得

$$\overline{x}=\frac{x_1+\cdots+x_9}{9}=\frac{-9}{9}=-1\,,\quad s_x^2=\frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2=\frac{168}{8}=21$$

于是由 1.6 式与 1.7 式可得

$$\begin{aligned} \overline{y} &= 10\overline{x}+550=10\times(-1)+550=540 \\ s_y^2 &= 10^2s_x^2=100\times 21=2100 \end{aligned}$$

Chapter 2

第 2 周课后作业参考答案

1. 设从正态总体$N(20,9)$中分别抽取容量为10和15的两组独立样本，记这两组样本的样本均值和样本方差分别为$\bar{X}$，$\bar{Y}$和S_x^2，S_y^2。
（1）求两样本均值差的绝对值大于0.3的概率 (2 分)
（2）求$9S_X^2+14S_Y^2$大于164的概率. (2 分)

【解答】

（1）由题知$\bar{X}\sim N(20,\frac{9}{10})$，$\bar{Y}\sim N(20,\frac{9}{15})$，则$\bar{X}-\bar{Y}$服从正态分布$N(0,\frac{9}{10}+\frac{9}{15})=N(0,1.5)$，由此计算可得

$$P(|\bar{X}-\bar{Y}|>0.3)=2\times\Phi(\frac{-0.3-0}{\sqrt{1.5}})=2\times\Phi(-0.2449)\approx 0.8065.$$

即两样本均值差的绝对值大于0.3的概率为0.8065。
其中，$\Phi(-0.2449)$可由R中的函数 pnorm(-0.2449) 或Python中的函数 norm.cdf(-0.2449) 求得。
也可以通过查表得到近似值$\Phi(-0.2449)\approx\Phi(-0.25)=1-\Phi(0.25)=1-0.5987=0.4013$。

（2）由题知$\frac{(10-1)S_X^2}{9}\sim\chi_9^2$，$\frac{(15-1)S_Y^2}{9}\sim\chi_{14}^2$，且$X$和$Y$是独立的，则$\frac{(10-1)S_X^2}{9}\sim\chi_9^2$和$\frac{(15-1)S_Y^2}{9}\sim\chi_{14}^2$独立，由卡方变量的性质（再生性）可知

$$\frac{9S_X^2+14S_Y^2}{9}\sim\chi_{23}^2.$$

则$9S_X^2+14S_Y^2$大于164的概率为

$$P(9S_X^2+14S_Y^2>164)=P(\frac{9S_X^2+14S_Y^2}{9}>\frac{164}{9})=1-\chi_{23}^2(\frac{164}{9})=0.7453.$$

其中，$\chi_{23}^2(\frac{164}{9})$可由R中的函数 pchisq(164/9, 23) 或Python中的函数 chi2.cdf(164/9, 23) 求得。
也可以通过查表得到近似值$\chi_{23}^2(164/9)\approx\chi_{23}^2(18.2222)\approx\chi_{23}^2(18.137)=1-0.75=0.25$。

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是分布从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取的两组简单样本，且两者相互独立. 令 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为这两组样本的样本均值，试确定样本大小 n 的近似值，使得 $P\left(\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| > \sigma\right) \approx 0.01$. (3 分)

【参考答案】 因为

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

由于两个样本相互独立，所以 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，于是

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(0, \frac{2\sigma^2}{n}\right)$$

标准化之后可得

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

于是

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| > \sigma\right) &= P\left(\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\right| > 1\right) = P\left(\left|\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma}\right| > \sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= P\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma} < -\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + P\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma} > \sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= \Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \\
&= 2 - 2 \times \Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \approx 0.01
\end{aligned}$$

由此解得

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \approx 0.995$$

由标准正态分布的上侧分位数可得

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \approx 2.575829 \quad \Longrightarrow \quad n \approx 13.26979$$

所以，样本大小 n 取 13 时，可以使得 $P\left(\left|\overline{X}-\overline{Y}\right| > \sigma\right) \approx 0.01$.

其中标准正态分布的上侧 0.005 分位数可以用以下 R 代码求得：

```r
qnorm(0.005, 0, 1, lower.tail = FALSE)
```

3. 设 $X_1,\ X_2$ 为取自正态总体 $X \sim N(0,\ \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，证明统计量

$$\frac{X_1}{X_2} \quad 和 \quad \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

相互独立. (3 分)

【参考答案】 解法1：记

$$U = \frac{X_1}{X_2}, \quad V = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

则由

$$u = \frac{x_1}{x_2}, \quad v = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{2.1}$$

可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{uv}{\sqrt{1+u^2}} \\ x_2 = \dfrac{v}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases} \quad (x_2 > 0) \tag{2.2}$$

或

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{uv}{\sqrt{1+u^2}} \\ x_2 = -\dfrac{v}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases} \quad (x_2 < 0) \tag{2.3}$$

上述变换的 Jacob 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{v}{1+u^2}$$

因为 $X_1,\ X_2$ 为取自正态总体 $X \sim N(0,\ \sigma^2)$ 的一个样本，其联合概率密度函数为

$$f_{X_1,\ X_2}(x_1,\ x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}}$$

于是，在 $x_2 > 0$ 的情形时，

$$f_{U,\ V}(u,\ v) = f_{X_1,\ X_2}\left(\frac{uv}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}\right) \cdot |J| = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{v}{1+u^2} \qquad (v > 0)$$

在 $x_2 < 0$ 的情形时，

$$f_{U,\ V}(u,\ v) = f_{X_1,\ X_2}\left(-\frac{uv}{\sqrt{1+u^2}},\ -\frac{v}{\sqrt{1+u^2}}\right) \cdot |J| = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{v}{1+u^2} \qquad (v > 0)$$

综上所述，$(U,\ V)$ 的联合概率密度函数为以上两个函数之和，即

$$f_{U,\ V}(u,\ v) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{v}{1+u^2} \quad (-\infty < u < +\infty,\ v > 0)$$

且随机变量U和V的密度函数分别为

$$f_U(u) = \int_0^{\infty} f(u,v)dv = \frac{1}{\pi(u^2+1)},\ \infty < u < \infty.$$
$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)du = \frac{v}{\sigma^2}\exp\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\},\ v > 0.$$

因为 $(U,\ V)$ 的联合概率密度函数可以分解为 $u,\ v$ 两个变量各自函数的乘积，即

$$f_{U,\ V}(u,\ v) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\left[ve^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\right]\cdot\frac{1}{1+u^2} = f_U(u)f_V(v) \qquad (-\infty < u < +\infty,\ v > 0)$$

所以 $U,\ V$ 相互独立，即统计量 $\dfrac{X_1}{X_2}$ 和 $\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 相互独立.

解法2：参考《概率论》p.g. 175。采用极坐标，$x = rcos\theta$，$y = rsin\theta$，因此$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = arctg\frac{y}{x}$，因为$(\xi,\eta)$的密度函数为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

而

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$$

故(ρ,ϕ)的密度函数为

$$\begin{aligned} q(r,\theta) =& \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}\cdot r \\ =& \frac{1}{2\pi}\cdot re^{-r^2/2},\ r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

即$\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$的密度函数为

$$R(r) = \begin{cases} re^{-r^2/2},\ r \geq 0 \\ 0,\ r < 0 \end{cases}$$

这个分布称为瑞利 (Rayleigh) 分布。而$\phi = arctg\frac{\eta}{\xi}$服从$[0,2\pi]$中的均匀分布，并且$\rho$与$\phi$是独立的。

4. 设 X 服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

(a) [2 分] 证明 X 的特征函数为 $\varphi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$.

【证明】

已知X服从于自由度为n的卡方分布，即$X \sim \chi_n^2$，其密度函数为$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$，$x >$

0，则X的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&E(e^{itx})\\=&\int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{itx}x^{n/2-1}e^{-x/2}dx\\=&\int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-(1/2-it)x}x^{n/2-1}dx\\=&\int_0^\infty \frac{(1/2-it)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-(1/2-it)x}(1/2-it)^{-n/2}2^{-n/2}dx\\=&(1/2-it)^{-n/2}2^{-n/2}\\=&(1-2it)^{-n/2}.\end{aligned}$$

上式中倒数第二个等号成立是因为$\frac{(1/2-it)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-(1/2-it)x}$为$\Gamma(n/2,1/2-it)$的密度函数，其在$(0,\infty)$上的积分为1。

(b) [2 分] 证明 X 的数学期望 $\mathbb{E}(X)=n$.

【证明】 由特征函数的性质可知，$\frac{\partial^k\varphi(x)}{\partial t^k}|_{t=0}=E(X^k)i^k$。对特征函数求一阶导可得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi(x)}{\partial t}|_{t=0}\\=&\frac{\partial(1-2it)^{-n/2}}{\partial t}|_{t=0}\\=&-\frac{n}{2}(1-2it)^{-n/2-1}(-2i)|_{t=0}\\=&ni\\=&E(X)i.\end{aligned}$$

则$E(X)=n$。

(c) [2 分] 证明 X 的方差 $\mathbb{D}(X)=2n$.

【证明】 对特征函数求二阶导可得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial t^2}|_{t=0}\\=&\frac{\partial}{\partial t}\{ni(1-2it)^{-n/2-1}\}|_{t=0}\\=&ni(1-2it)^{-n/2-2}(-n/2-1)(-2i)|_{t=0}\\=&n(n+2)i^2\\=&E(X^2)i^2.\end{aligned}$$

则$E(X^2)=n(n+2)$。由（b）知$E(X)=n$，则方差$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n+2)-n^2=2n$。

5. [2 分] 设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi_n^2$，且 X 与 Y 相互独立，证明 $T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的概率密度函数为

$$f_T(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.4}$$

【证明】 已知$X \sim N(0,1)$，其密度函数为$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $-\infty < x < \infty$。$Y \sim \chi_n^2$，其密度函数为$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{n/2-1}e^{-y/2}$，$y > 0$。令$Z = \sqrt{Y/n}$，则$Z$的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Z(z) =& \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}(z^2n)^{n/2-1}e^{-z^2n/2}\left|\frac{\partial z^2 n}{\partial z}\right| \\ =& \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}z^{n-1}n^{n/2}e^{-z^2n/2}. \end{aligned}$$

又知X和Y相互独立，则X和$Z = \sqrt{Y/n}$的联合密度函数为

$$\begin{aligned} f_{X,Z}(x,z) =& f_X(x)\cdot f_Z(z) \\ =& \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}}z^{n-1}n^{n/2}e^{-z^2n/2}e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

令$V = Z$, $T = X/Z$，则$Z = V$, $X = VT$，Jacobi行列式为$\left|\frac{\partial(X,Z)}{\partial(V,T)}\right| = V$。则$V$和$T$的联合密度函数为

$$f_{V,T}(v,t) = \frac{n^{n/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}}v^{n-1}e^{-v^2n/2}e^{-v^2t^2/2}$$

对v进行积分可得$T = X/\sqrt{Y/n}$的密度函数为

$$\begin{aligned} f_T(t) =& \int_0^\infty f_{V,T}(v,t)dv \\ =& \int_0^\infty \frac{n^{n/2}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}}v^n e^{-v^2n/2}e^{-v^2t^2/2}dv \\ \overset{v^2=k}{=}& \int_0^\infty \frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}}k^{n/2}e^{-kn/2}e^{-kt^2/2}k^{-1/2}dk \\ =& \int_0^\infty \frac{n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}}k^{n/2-1/2}e^{-(n/2+t^2/2)k}dk \\ =& \int_0^\infty \frac{(n/2+t^2/2)^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}k^{(n+1)/2-1}e^{-(n/2+t^2/2)k}dk \\ & \times \frac{n^{n/2}(n/2+t^2/2)^{-(n+1)/2}}{2^{n/2}\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \\ =& \frac{n^{(n+1)/2}}{\sqrt{n\pi}(n/2+t^2/2)^{(n+1)/2}2^{(n+1)/2}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \\ =& \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

6. [2 分] 设 $X \sim F_{m,\,n}$, 记 $F_{m,\,n}(\alpha)$ 为 $F_{m,\,n}$ 分布的上侧 α 分位数, 即 $P\,(X > F_{m,\,n}(\alpha)) = \alpha$. 证明：

$$F_{m,\,n}(1-\alpha) = \frac{1}{F_{n,\,m}(\alpha)}. \tag{2.5}$$

【证明】

已知$X \sim F_{m,n}$，则$Y = \frac{1}{X} \sim F_{n,m}$。因为

$$\begin{aligned} P(X < 1/F_{n,m}(\alpha)) =& P(1/X > F_{n,m}(\alpha)) \\ =& P(Y > F_{n,m}(\alpha)) \\ =& \alpha, \end{aligned}$$

所以由分布函数的性质可知，$F_{m,n}(1-\alpha) = 1/F_{n,m}(\alpha)$。

Chapter 3

第 3 周课后作业参考答案

1. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, 且

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

又设 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且与 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立, 求统计量

$$\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \tag{3.1}$$

的分布.

【解】

已知X_i $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\bar{X}$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2/n)$。由题知$X_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2)$且与$X_1,\ldots,X_n$独立，则$X_{n+1}$与$\bar{X}$独立，且$X_{n+1} - \bar{X}$服从正态分布$N(0,(n+1)\sigma^2/n)$。对其标准化可得到$(X_{n+1} - \bar{X})/\sqrt{\frac{(n+1)\sigma^2}{n}}$服从标准正态分布$N(0,1)$。

已知$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$服从卡方分布$\chi^2_{n-1}$，并且有$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{n}$，则$\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$服从卡方分布$\chi^2_{n-1}$。
又因为统计量

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sqrt{\frac{(n+1)\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{nS_n^2}{\sigma^2(n-1)}}},$$

则由t分布的定义可知

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t_{n-1}.$$

2. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_2, \sigma^2)$, 且 $X_1, X_2, \ldots, X_m$

与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 相互独立, 又设

$$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,\quad \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\quad S_{1m}^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,\quad S_{2n}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$$

α 和 β 是两个给定的实数，求

$$T=\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\beta\left(\overline{Y}-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{n+m-2}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}\right)}} \tag{3.2}$$

的分布.

【解】

已知X_i $i.i.d. \sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y_j$ $i.i.d. \sim N(\mu_2,\sigma^2)$，则$\bar{X}$服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2/m)$，$\bar{Y}$服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2/n)$。并且已知$X$与$Y$相互独立，则由正态变量的线性函数服从正态分布可知$\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)$服从正态分布$N(0,(\alpha^2/m+\beta^2/n)\sigma^2)$。经标准化后可得到$\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{(\alpha^2/m+\beta^2/n)\sigma^2}}\sim N(0,1)$.

设$S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2=mS_{1m}^2/(m-1)$，$S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=nS_{2n}^2/(n-1)$，则由$(m-1)S_1^2/\sigma^2$服从卡方分布$\chi_{m-1}^2$和$(n-1)S_2^2/\sigma^2$服从卡方分布$\chi_{n-1}^2$可知，$mS_{1m}^2/\sigma^2$服从卡方分布$\chi_{m-1}^2$，且$nS_{2n}^2/\sigma^2$服从卡方分布$\chi_{n-1}^2$。已知$X$与$Y$独立，则$S_{1m}^2$和$S_{2n}^2$是独立的，由卡方分布的再生性可以得到$(mS_{1m}^2+nS_{2n}^2)/\sigma^2$服从卡方分布$\chi_{m+n-2}^2$。
又因为统计量

$$\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\beta\left(\overline{Y}-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{n+m-2}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}\right)}}=\frac{\frac{\alpha(\bar{X}-\mu_1)+\beta(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{(\alpha^2/m+\beta^2/n)\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{(m+n-2)\sigma^2}}},$$

则由t分布的定义可知

$$\frac{\alpha\left(\overline{X}-\mu_1\right)+\beta\left(\overline{Y}-\mu_2\right)}{\sqrt{\frac{mS_{1m}^2+nS_{2n}^2}{n+m-2}\cdot\left(\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}\right)}}\sim t_{m+n-2}.$$

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. F, $\left(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right)$ 是其次序统计量，已知

$$P\left(X_{(m)}\leq x\right)=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}[F(x)]^i[1-F(x)]^{n-i}$$

证明以下恒等式：

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}[F(x)]^i[1-F(x)]^{n-i}=m\binom{n}{m}\int_0^{F(x)}t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt$$

(提示：为证

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=m\binom{n}{m}\int_0^p t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt$$

注意 $p=0$ 时两边相等, 两边对 p 的导数也一样.) (4 分)

【证明 1】 构造函数 $g(x)$ 如下：

$$g(x)=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}x^i\,(1-x)^{n-i}-m\binom{n}{m}\int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt$$

对 x 求导，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=&\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}ix^{i-1}\,(1-x)^{n-i}-\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}(n-i)x^i\,(1-x)^{n-i-1}\\&-m\binom{n}{m}x^{m-1}(1-x)^{n-m}\end{aligned}$$

因为

$$\binom{n}{i}i=\binom{n-1}{i-1}n\,,\quad \binom{n}{i}(n-i)=\binom{n-1}{i}n$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=&\sum_{i=m}^{n}\binom{n-1}{i-1}nx^{i-1}\,(1-x)^{n-i}-\sum_{i=m}^{n-1}\binom{n-1}{i}nx^i\,(1-x)^{n-i-1}\\&-m\binom{n}{m}x^{m-1}(1-x)^{n-m}\end{aligned}$$

记 $k=i-1$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=&\sum_{k=m-1}^{n-1}\binom{n-1}{k}nx^k\,(1-x)^{n-k-1}-\sum_{i=m}^{n-1}\binom{n-1}{i}nx^i\,(1-x)^{n-i-1}\\&-m\binom{n}{m}x^{m-1}(1-x)^{n-m}\\=&\binom{n-1}{m-1}nx^{m-1}\,(1-x)^{n-m}-m\binom{n}{m}x^{m-1}(1-x)^{n-m}\\=&\binom{n}{m}mx^{m-1}\,(1-x)^{n-m}-m\binom{n}{m}x^{m-1}(1-x)^{n-m}=0\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 为常数，又因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)=0$，此即

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}x^{i}(1-x)^{n-i}=m\binom{n}{m}\int_{0}^{x}t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt$$

取 $x=F(x)$ 就有

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}[F(x)]^{i}[1-F(x)]^{n-i}=m\binom{n}{m}\int_{0}^{F(x)}t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt$$

【证明 2】 采用分部积分的方法可得

$$\begin{aligned}
&m\binom{n}{m}\int_{0}^{F(x)}t^{m-1}(1-t)^{n-m}dt\\
=&\binom{n}{m}\int_{0}^{F(x)}(1-t)^{n-m}dt^{m}\\
=&\binom{n}{m}(1-t)^{n-m}t^{m}\Big|_{0}^{F(x)}+\binom{n}{m}\int_{0}^{F(x)}t^{m}(1-t)^{n-m-1}(n-m)dt\\
=&\binom{n}{m}[1-F(x)]^{n-m}[F(x)]^{m}+\binom{n}{m+1}\int_{0}^{F(x)}(1-t)^{n-m-1}dt^{m+1}\\
=&\binom{n}{m}[1-F(x)]^{n-m}[F(x)]^{m}+\binom{n}{m+1}[1-F(x)]^{n-m-1}[F(x)]^{m+1}\\
&+\int_{0}^{F(x)}\binom{n}{m+1}t^{m+1}(1-t)^{n-m-2}(n-m-1)dt\\
=&\binom{n}{m}[1-F(x)]^{n-m}[F(x)]^{m}+\binom{n}{m+1}[1-F(x)]^{n-m-1}[F(x)]^{m+1}+\cdots\\
&+\int_{0}^{F(x)}\binom{n}{n-1}t^{n-1}(1-t)^{0}(n-n+1)dt\\
=&\binom{n}{m}[1-F(x)]^{n-m}[F(x)]^{m}+\binom{n}{m+1}[1-F(x)]^{n-m-1}[F(x)]^{m+1}+\cdots+t^{n}\Big|_{0}^{F(x)}\\
=&\binom{n}{m}[1-F(x)]^{n-m}[F(x)]^{m}+\binom{n}{m+1}[1-F(x)]^{n-m-1}[F(x)]^{m+1}+\cdots+\binom{n}{n}[1-F(x)]^{0}[F(x)]^{n}\\
=&\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}[F(x)]^{i}[1-F(x)]^{n-i}.
\end{aligned}$$

4. 设 $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ 为从均匀分布 $U(0,\ 1)$ 中抽取的次序统计量.

(a) 样本容量 n 为多大时，才能使 $P\left(X_{(n)}\geq 0.99\right)\geq 0.95$？ (2 分)

【参考答案】 均匀分布 $U(0,\ 1)$ 的概率密度函数和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

于是，统计量 $X_{(n)}$ 的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\left(X_{(n)} \le x\right) = P\left(X_1 \le x,\ X_2 \le x,\ \ldots,\ X_n \le x\right)$$
$$= [F(x)]^n = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^n, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

因此，$P\left(X_{(n)} \ge 0.99\right) \ge 0.95$ 即要求

$$P\left(X_{(n)} \ge 0.99\right) = 1 - P\left(X_{(n)} \le 0.99\right) = 1 - 0.99^n \ge 0.95$$

由此解得 $n \ge 298.0729$，故样本容量 n 至少为 299 时，才能使 $P\left(X_{(n)} \ge 0.99\right) \ge 0.95.$

(b) 求极差 $R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的密度函数. (2 分)

【参考答案】 由教材中的定理 2.3.1 (取 (2.3.6) 式中的 $i=1,\ j=n$) 知 $X_{(1)},\ X_{(n)}$ 的联合概率密度为

$$f_{1,\,n}(x,\ y) = \begin{cases} n(n-1)\left[F(y)-F(x)\right]^{n-2} f(x)f(y), & x < y \\ 0, & x > y \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2} f(x)f(y), & x < y \\ 0, & x > y \end{cases}$$

令 $R = Y - X,\ Z = X$，即

$$\begin{cases} r = y - x \\ z = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z + r \end{cases}$$

该变换的 Jacob 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

因此 $(R,\ Z)$ 的联合概率密度函数为

$$f_{(R,\,Z)}(r,\ z) = f_{1,\,n}(z,\ z+r)\cdot|J| = \begin{cases} n(n-1)r^{n-2}, & 0 < r < 1,\ 0 < z < 1-r \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

从而 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的概率密度函数为

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(R,\ Z)}(r,\ z)dz = \begin{cases} \int_0^{1-r} n(n-1)r^{n-2}dz, & 0 < r < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n(n-1)r^{n-2}(1-r), & 0 < r < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

5. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 的简单样本, 利用中心极限定理确定

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

的极限分布.

【解】

已知X_i $i.i.d \sim U(0,\theta)$，$E(X_i) = \theta/2$，$D(X_i) = \theta^2/12$，由中心极限定理可知，当$n \to \infty$时，

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - E(X_i)}{\sqrt{D(X_i)}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2\sqrt{3}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1),$$

因此$\bar{X}$的极限分布为$N(\theta/2, \theta^2/(12n))$。

6. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 分布为取自正态总体 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu, \sigma_2^2)$ 的简单样本，证明当 m, n 都趋于无穷时, 统计量

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m} + \frac{S_Y^2}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,\ 1) \tag{3.3}$$

其中 S_X^2 和 S_Y^2 分别为两组样本的样本方差.

【证明】

已知X_i $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$i = 1,\ldots,m$，$Y_j$ $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma_2^2)$，$j = 1,\ldots,n$，则$\bar{X} \sim N(\mu,\sigma_1^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(\mu,\sigma_2^2/n)$。由$X$和$Y$的独立性可知$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(0, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$。当$m \to \infty$，$n \to \infty$时，$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$的极限分布为$N(0,1)$。

参考教材中定理2.2.3的证明，对$\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_m)$做正交变换得到$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{AX}$，其中$\boldsymbol{A}$为正交阵，设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \frac{1}{\sqrt{m}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

可得到$Z_2,\cdots,Z_m\ i.i.d. \sim N(0,\sigma_1^2)$，且$S_X^2=\frac{\sum_{i=1}^m (X_i-\bar{X})^2}{m-1}=\frac{\sum\limits_{i=2}^m Z_i^2}{m-1}$。由大数定律，当$m\to\infty$时，

$$S_X^2 \xrightarrow{p} E(Z_i^2)=\sigma_1^2.$$

同理，当$n\to\infty$时，$S_Y^2 \xrightarrow{p} \sigma_2^2$。

又因为$\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}$是$(S_X^2,S_Y^2)$的连续函数，所以当$m\to\infty$，$n\to\infty$时，由Slutsky定理有

$$\frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}} \xrightarrow{p} 1.$$

再由Slutsky定理，当$m\to\infty$，$n\to\infty$时，有

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{m}+\frac{S_Y^2}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1).$$

Chapter 4

第 4 周课后作业参考答案

1. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是从 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单随机样本. 利用定义证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.1}$$

为充分统计量.

【证明】

已知$X i.i.d. \sim P(\lambda)$，$P(X=x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$。统计量$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$，由泊松分布的再生性质可知，$T(\boldsymbol{X}) \sim P(n\lambda)$。经计算，给定$T(X) = t_0$时$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$的条件概率为

$$\begin{aligned}
& P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = t_0) \\
= & \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T = t_0)}{P(T = t_0)} \\
= & \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(T = t_0)} \\
= & \frac{P(X_1 = x_1) \cdots P(X_{n-1} = x_{n-1}) P(X_n = t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(T_0 = t_0)} \\
= & \frac{\frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \cdots \frac{\lambda^{x_{n-1}} e^{-\lambda}}{x_{n-1}!} \cdot \frac{\lambda^{t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i} e^{-\lambda}}{(t_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i)!}}{\frac{(n\lambda)^{t_0} e^{-n\lambda}}{t_0!}} \\
= & \frac{\lambda^{t_0} e^{-n\lambda}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i! \times (t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)!} \times \frac{t_0!}{(n\lambda)^{t_0} e^{-n\lambda}} \\
= & \frac{t_0!}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i! \times (t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)! n^{t_0}}
\end{aligned}$$

与参数λ无关。因此$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$为$\lambda$的充分统计量。

2. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从几何分布中抽取的简单随机样本. 利用定义证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.2}$$

为充分统计量.

【证明】

已知$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$独立同分布于几何分布$Nb(1,\theta)$，$X_i$的分布律为$P(X = x;\theta) = (1-\theta)^{x-1}\theta$, $x = 1, 2, \ldots$。统计量$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$，由几何分布的再生性可知，$T(\boldsymbol{X}) \sim Nb(n,\theta)$。给定$T(x) = t_0$时，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的条件概率为

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t_0)\\
=&\frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, T = t_0)}{P(T = t_0)}\\
=&\frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(T = t_0)}\\
=&\frac{P(X_1 = x_1)\cdots P(X_{n-1} = x_{n-1})P(X_n = t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i)}{P(T = t_0)}\\
=&\frac{(1-\theta)^{x_1-1}\theta\cdots(1-\theta)^{x_{n-1}-1}\theta\cdot(1-\theta)^{t_0-\sum_{i=1}^{n-1}x_i-1}\theta}{\binom{t_0-1}{n-1}\theta^n(1-\theta)^{t_0-n}}\\
=&\frac{(1-\theta)^{t_0-n}\theta^n}{\binom{t_0-1}{n-1}\theta^n(1-\theta)^{t_0-n}}\\
=&1/\binom{t_0-1}{n-1},
\end{aligned}$$

与参数θ无关。因此$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$为$\theta$的充分统计量。

3. [2 分] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是从 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 中抽取的简单随机样本. 利用因子分解定理证明

$$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{4.3}$$

为充分统计量.

【证明】

已知$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$服从泊松分布$P(\lambda)$，它的分布律为$P(X_i = x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x \geq 0$。样本$X_1, \ldots, X_n$的联合分布为

$$\begin{aligned}
&P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)\\
=&P(X_1 = x_1)\cdots P(X_n = x_n)\\
=&\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda} / \prod_{i=1}^{n} x_i!\\
=&g(t(x), \lambda)h(x),
\end{aligned}$$

其中，$g(t(x),\lambda)=\lambda^t e^{-n\lambda}$，$h(x)=1/\prod_{i=1}^n x_i!$与参数$\lambda$无关，由因子分解定理可知，$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i$为$\lambda$的充分统计量。

4. [2 分] 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 是取自指数分布

$$f(x,\lambda)=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\cdot I_{(0,+\infty)}(x) \tag{4.4}$$

的简单随机样本. 利用因子分解定理证明

$$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i \tag{4.5}$$

为充分统计量.

【证明】

已知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$服从指数分布，则它们的联合密度函数为

$$\begin{aligned}
&f(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)\\
=&P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n)\\
=&\lambda e^{-\lambda x_1}I_{(0,+\infty)}(x_1)\cdots\lambda e^{-\lambda x_n}I_{(0,+\infty)}(x_n)\\
=&\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i)\\
=&g(t(x),\lambda)h(x),
\end{aligned}$$

其中，$g(t(x),\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda t}$，$h(x)=\prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i)$与参数$\lambda$无关，由因子分解定理可知，$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i$为参数$\lambda$的充分统计量。

5. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\theta,\theta^2)$, $\theta>0$, 问

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

是否为充分统计量? (2 分)

【解】 这是连续型总体，其概率函数为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x},\theta) &= f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\
&= f(x_1,\theta)\, f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-\theta)^2}{2\theta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_2-\theta)^2}{2\theta^2}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_n-\theta)^2}{2\theta^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2\right\} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}\right\} \\
&\downarrow \quad T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{i=1}^n X_i^2\right) \\
&= g(t(\boldsymbol{x}),\theta)\cdot h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

这里的

$$
g\left(t(\boldsymbol{x}),\ \theta\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}\right\}
$$

是 $t(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i,\ \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$ 与 θ 的函数，$h(\boldsymbol{x}) \equiv 1$ 与 θ 无关，由因子分解定理知 $T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i,\ \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ 为充分统计量. 因为 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 与 $T(\boldsymbol{X})$ 不一一对应，因此 $\overline{X}$ 不是充分统计量.

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ i.i.d. $\sim N(a, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ i.i.d. $\sim N(b, \sigma^2)$，且两组样本相互独立，记

$$
\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j, \quad S^2 = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^m \left(X_i-\overline{X}\right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right] \tag{4.6}
$$

证明 $\left(\overline{X}, \overline{Y}, S^2\right)$ 是充分统计量. (2 分)

【证明】 这是连续型总体，因为两组样本相互独立，所以概率函数为

$$f(x_1,\ \dots,\ x_m,\ y_1,\ \dots,\ y_n)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-a)^2}{2\,\sigma^2}\right\}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(y_k-b)^2}{2\,\sigma^2}\right\}$$

$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-a)^2+\sum\limits_{k=1}^{n}(y_k-b)^2}{2\,\sigma^2}\right\}$$

$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i^2-2\,a\,x_i+a^2)+\sum\limits_{k=1}^{n}(y_k^2-2\,b\,y_k+b^2)}{2\,\sigma^2}\right\}$$

$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{m+n}{2}}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2+\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2-2\,a\,m\,\overline{x}-2\,b\,n\,\overline{y}+m\,a^2+n\,b^2}{2\,\sigma^2}\right\}$$

$$=g\left(t_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\ t_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\ t_3(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}),\ a,\ b,\ \sigma^2\right)\cdot h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

其中

$$t_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{m}x_i^2+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\,,\quad t_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\overline{x}\,,\quad t_3(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\overline{y}\,,\quad h(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\equiv 1$$

由因子分解定理知

$$\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{k=1}^{n}Y_k^2\,,\quad \overline{X}\,,\quad \overline{Y}\right)$$

是充分统计量. 又因为

$$S^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}X_i^2-m\,\overline{X}^2+\sum_{k=1}^{n}Y_k^2-n\,\overline{Y}^2\right]$$

这说明 $\left(\overline{X},\,\overline{Y},\,S^2\right)$ 是充分统计量

$$\left(\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{k=1}^{n}Y_k^2\,,\quad \overline{X}\,,\quad \overline{Y}\right)$$

的单值连续函数，故 $\left(\overline{X}\,,\,\overline{Y}\,,\,S^2\right)$ 也是充分统计量.

7. 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ 是从某总体中抽取的简单随机样本, 满足 $E\,(X_1)=\mu<\infty$, $E\,(X_1^2)<\infty$, 证明

$$T\,(\boldsymbol{X})=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}(i\cdot X_i)$$

是 μ 的弱相合估计. (2 分)

【证明】 因为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T\left(\boldsymbol{X}\right)\right] &= \frac{2}{n(n+1)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(i\cdot X_i)\right] = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\left[i\cdot\mathbb{E}\left(X_i\right)\right] \\ &= \frac{2\mu}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2\mu}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \mu \\ \mathbb{D}\left[T\left(\boldsymbol{X}\right)\right] &= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n}(i\cdot X_i)\right] \\ &= \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2\cdot\mathbb{D}\left(X_i\right)\right]\end{aligned}$$

已知 $\mathbb{E}\left(X_1\right)=\mu<\infty$，$\mathbb{E}\left(X_1^2\right)<\infty$，所以 $\mathbb{D}\left(X_i\right)=\mathbb{E}\left(X_i^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(X_i\right)\right]^2$ 存在，不妨记为 $\mathbb{D}\left(X_i\right)=\sigma^2<\infty$，于是

$$\mathbb{D}\left[T\left(\boldsymbol{X}\right)\right] = \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)}$$

根据切比雪夫不等式有

$$\mathbb{P}\left(\left|T\left(\boldsymbol{X}\right)-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\mathbb{D}\left[T\left(\boldsymbol{X}\right)\right]}{\varepsilon^2} = \frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}$$

从而

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|T\left(\boldsymbol{X}\right)-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n(n+1)\varepsilon^2}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|T\left(\boldsymbol{X}\right)-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

说明

$$T\left(\boldsymbol{X}\right)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot X_i\right)\xrightarrow{P}\mu$$

故 $T\left(\boldsymbol{X}\right)$ 是 μ 的弱相合估计.

8. 设总体 X 服从均匀分布 $U(0,\,2\theta)$，$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 为从总体 X 中抽取的简单随机样本.

(a) [2 分] 证明 $\hat{\theta}_1=\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{2n}X_{(n)}$ 为 θ 的无偏估计.

【证明】 因为 $X\sim U(0,\,2\theta)$，因此 $\mathbb{E}(X)=\theta$，于是

$$\mathbb{E}\left(\hat{\theta}_1\right)=\mathbb{E}\left(\overline{X}\right)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta=\theta$$

所以 $\hat{\theta}_1 = \overline{X}$ 为 θ 的无偏估计.

$X \sim U(0,\, 2\theta)$ 的概率密度函数 $f_X(x)$ 和分布函数 $F_X(x)$ 分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0 < x < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} , \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{2\theta}, & 0 < x < 2\theta \\ 1, & x \ge 2\theta \end{cases}$$

记 $Y = X_{(n)}$，则 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) &= \mathbb{P}\left(X_{(n)} \le y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_1 \le y,\, X_2 \le y,\, \ldots,\, X_n \le y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_1 \le y\right) \mathbb{P}\left(X_2 \le y\right) \cdots \mathbb{P}\left(X_n \le y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X \le y\right) \mathbb{P}\left(X \le y\right) \cdots \mathbb{P}\left(X \le y\right) \\ &= \left[F_X(y)\right]^n \end{aligned}$$

由此可得 $Y = X_{(n)}$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y) = \begin{cases} \dfrac{n}{(2\theta)^n}\, y^{n-1}, & 0 < y < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\hat{\theta}_2\right) = \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2n} X_{(n)}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2n} Y\right) = \frac{n+1}{2n} E\left(Y\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} \int_0^{2\theta} y \cdot \frac{n}{(2\theta)^n}\, y^{n-1} \mathrm{d}y \\ &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2n}{n+1} \theta = \theta \end{aligned}$$

所以 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{2n} X_{(n)}$ 为 θ 的无偏估计.

(b) [2 分] 证明 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的强相合估计，$\hat{\theta}_2^* = \dfrac{X_{(n)}}{2}$ 为 θ 的弱相合估计.

【证明】 因为 $\hat{\theta}_1 = \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，并且 $\mathbb{E}(X) = \theta$，根据 Kolmogorov 强大数定律，我们有

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_1 = \theta\right) = 1$$

说明 $\hat{\theta}_1$ 为 θ 的强相合估计. 又因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_2^* - \theta\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_{(n)}}{2} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{X_{(n)} \geq 2\theta + 2\varepsilon\right\} \bigcup \left\{X_{(n)} \leq 2\theta - 2\varepsilon\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(0 < X_{(n)} \leq 2\theta - 2\varepsilon\right) \\
&= \int_0^{2\theta - 2\varepsilon} \frac{n}{(2\theta)^n} y^{n-1} \mathrm{d}y \\
&= \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\hat{\theta}_2^* - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0
$$

这说明 $\hat{\theta}_2^* = \dfrac{X_{(n)}}{2}$ 为 θ 的弱相合估计.

(c) [2 分] 求 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的方差，问哪一个更有效?

【证明】 因为 $X \sim U(0,\, 2\theta)$，因此 $\mathbb{D}(X) = \dfrac{\theta^2}{3}$，于是

$$
\mathbb{D}\left(\hat{\theta}_1\right) = \mathbb{D}\left(\overline{X}\right) = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{D}\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{\theta^2}{3} = \frac{\theta^2}{3n}
$$

对于 $X_{(n)}$，因为

$$
\mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) = \int_0^{2\theta} y^2 \cdot \frac{n}{(2\theta)^n} y^{n-1} \mathrm{d}y = \frac{4n}{n+2}\theta^2
$$

所以

$$
\mathbb{D}\left(X_{(n)}\right) = \mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(X_{(n)}\right)\right]^2 = \frac{4n}{n+2}\theta^2 - \frac{4n^2}{(n+1)^2}\theta^2
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}\left(\hat{\theta}_2\right) &= \mathbb{D}\left(\frac{n+1}{2n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \mathbb{D}\left(X_{(n)}\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4n^2} \cdot \left[\frac{4n}{n+2}\theta^2 - \frac{4n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right] \\
&= \frac{1}{n(n+2)}\theta^2
\end{aligned}
$$

我们看到当 $n = 1$ 时，$\mathbb{D}\left(\hat{\theta}_1\right) = \mathbb{D}\left(\hat{\theta}_2\right)$，当 $n \geq 2$ 时，$\mathbb{D}\left(\hat{\theta}_1\right) > \mathbb{D}\left(\hat{\theta}_2\right)$，所以 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

Chapter 5

第 5 周课后作业参考答案

1. [2 分] 设总体 X 服从二项分布 $b(k, p)$，k 是正整数，$0 < p < 1$，两者都是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为从中抽取的简单随机样本，求 k 和 p 的矩估计.

   【解】 已知总体 X 的一阶原点矩（数学期望）和二阶中心矩（方差）分别为

   $$\mathbb{E}(X) = kp\,, \quad \mathbb{D}(X) = kp(1-p).$$

   样本的一阶原点矩和二阶中心矩分别为

   $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

   由矩估计的方法有

   $$\begin{cases} kp &= \overline{X} \\ kp(1-p) &= S_n^2 \end{cases}$$

   由此解得 k 和 p 的矩估计分别为

   $$\widehat{p} = 1 - \frac{S_n^2}{\overline{X}}, \quad \widehat{k} = \left[\frac{\overline{X}^2}{\overline{X} - S_n^2}\right].$$

   其中 $\left[\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X} - S_n^2}\right]$ 表示对 $\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X} - S_n^2}$ 取整.

2. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自对数级数分布

   $$P(X = k) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \cdot \frac{p^k}{k}\,, \quad 0 < p < 1\,, k = 1, 2, \ldots$$

   的简单随机样本，求参数 p 的矩估计.

   【解】

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(-\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p^k}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{p^k}{\ln(1-p)}=-\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p}{1-p}$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot\left(-\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p^k}{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{kp^k}{\ln(1-p)}=-\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p}{(1-p)^2}$$

所以 $\frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X^2)}=1-p$，从而 $p=1-\frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X^2)}$. 故参数 p 的矩估计为

$$\widehat{p}=1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.$$

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自正态分布 $N\left(0, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，求参数 σ 的矩估计量.

(a) [2 分] 利用 $\mathrm{E}\left(|X_1|\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$.

【解】因为

$$\mathbb{E}\left(|X_1|\right)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$$

所以

$$\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}\left(|X_1|\right)$$

故参数 σ 的矩估计量为

$$\widehat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i|.$$

(b) [2 分] 利用 $\sigma=\sqrt{\mathrm{D}\left(X_1\right)}$.

【解】 因为总体 $N\left(0, \sigma^2\right)$ 的均值为 0， $\sigma=\sqrt{\mathbb{D}\left(X_1\right)}$，所以参数 σ 的矩估计量为

$$\widehat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.$$

4. [2 分] 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N\left(a, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，求 $P(X>1)$ 的矩估计量.

【解】 因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自正态总体 $N\left(a, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，由矩估计的方法我们知道 a 和 σ^2 的矩估计分别为

$$\widehat{a}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \widehat{\sigma}^2=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

由于
$$\mathbb{P}(X>1)=\mathbb{P}\left(\frac{X-a}{\sigma}>\frac{1-a}{\sigma}\right)=1-\mathbb{P}\left(\frac{X-a}{\sigma}\leq\frac{1-a}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1-a}{\sigma}\right),$$
将 a 和 σ 的矩估计代入即得 $\mathbb{P}(X>1)$ 得矩估计量为
$$\widehat{p}=1-\Phi\left(\frac{1-\overline{X}}{\widehat{\sigma}}\right),$$
其中 $\widehat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$.

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自伽马分布 $\Gamma(r, \lambda)$ 的简单随机样本，其中 r 已知.

(a) [2 分] 求 λ 的矩估计量.

【解】 伽马分布 $\Gamma(r, \lambda)$ 的 pdf 为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$
因为
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}x\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{r+1}}{\Gamma(r+1)}x^{(r+1)-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{r}{\lambda},\end{aligned}$$
其中 r 已知，所以 $\lambda=\dfrac{r}{\mathbb{E}(X)}$. 故$\lambda$ 的矩估计量为
$$\widehat{\lambda}=\frac{r}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}=\frac{r}{\overline{X}}.$$

(b) [2 分] 讨论该矩估计量的无偏性.

【解】 记 $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$，由伽马分布的性质可知 $T\sim\Gamma(nr, \lambda)$，于是
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}\right)&=\mathbb{E}\left(\frac{nr}{T}\right)=\int_0^{\infty}\frac{nr}{t}\cdot\frac{\lambda^{nr}}{\Gamma(nr)}t^{nr-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\lambda nr\Gamma(nr-1)}{\Gamma(nr)}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{nr-1}}{\Gamma(nr-1)}t^{(nr-1)-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{nr}{nr-1}\cdot\lambda\neq\lambda,\end{aligned}$$

所以 $\widehat{\lambda}$ 不是 λ 的无偏估计量. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\widehat{\lambda}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{nr}{nr-1}\cdot\lambda\right) = \lambda,$$

故 $\widehat{\lambda}$ 是 λ 的渐近无偏估计量.

6. 设 $X = \mathrm{e}^{\xi}$，而 $\xi \sim N(a, \sigma^2)$，则随机变量 X 的分布称为对数正态分布.

(a) [2 分] 求 X 的概率密度函数.

【解】 $\xi \sim N(a,\ \sigma^2)$ 的概率密度函数为

$$f_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

由 $X = \mathrm{e}^{\xi}$ 可得 $\xi = \ln X$，因此 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = f_\xi(\ln x)\cdot\left|\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0.$$

(b) [2 分] 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是从总体 X 抽取的简单随机样本，求 a 和 σ^2 的矩估计.

【解】因为

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\color{red}{\downarrow}\ \ t=\ln x,\ \ x=\mathrm{e}^t,\ \ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{t^2-2(a+\sigma^2)t+a^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left[t-(a+\sigma^2)\right]^2}{2\sigma^2}+\left(a+\frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{a+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left[t-\left(a+\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

$$\color{red}{\downarrow}\ \ t=\ln x,\ \ x=\mathrm{e}^t,\ \ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{t^2-2(a+2\sigma^2)t+a^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\left[t-(a+2\sigma^2)\right]^2}{2\sigma^2}+\left(2a+2\sigma^2\right)\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{a+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\left[t-\left(a+2\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2a+2\sigma^2}$$

所以

$$\mathbb{D}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\left[\mathbb{E}(X)\right]^2=\mathrm{e}^{2a+2\sigma^2}-\left(\mathrm{e}^{a+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2=\mathrm{e}^{2a+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)$$

根据矩估计的方法，我们有

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathrm{e}^{a+\frac{\sigma^2}{2}}&=&\overline{X}\\ \mathrm{e}^{2a+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)&=&S_n^2\end{array}\right.$$

由此解得 σ^2 和 a 的矩估计分别为

$$\hat{\sigma}^2=\ln\left(1+\frac{S_n^2}{\overline{X}^2}\right),\quad \hat{a}=\ln\overline{X}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{S_n^2}{\overline{X}^2}\right)$$

其中

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2.$$

Chapter 6

第 6 周课后作业参考答案

1. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x,\,\theta) = \begin{cases} \theta(\theta+1)\,x^{\theta-1}(1-x)\,, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases}\,, \qquad (\theta > 0) \tag{6.1}$$

若 $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n$ 为取自该总体的一个简单随机样本.

(a) 用矩估计法求 θ 的点估计. (2 分)

【解】

因为

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x,\,\theta)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\theta(\theta+1)\,x^{\theta-1}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\theta}{\theta+2}$$

由矩估计法有

$$\frac{\theta}{\theta+2} = \overline{X}$$

所以 θ 的矩估计为

$$\widehat{\theta} = \frac{2\overline{X}}{1-\overline{X}}$$

(b) 用极大似然估计法求 θ 的点估计. (2 分)

【解】

似然函数为

$$L(\theta, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i,\,\theta) = \theta^n(\theta+1)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-x_i}{x_i}\right)\exp\left\{\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}, \quad 0 < x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n < 1$$

自然参数空间为$\Theta^* = \{\theta : \theta > 0\}$。取对数得对数似然函数为

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = n\ln\theta + n\ln(\theta+1) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i + \sum_{i=1}^{n}\ln(1-x_i)$$

对 θ 求导并令其为零，得似然方程为

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)\theta^2 + \left(2n + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)\theta + n = 0$$

由此解得

$$\begin{aligned}\theta_{1,2} &= \frac{-\left(2n + \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \pm \sqrt{4n^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2}}{2\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i} \\ &= \frac{-\left(2 + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right) \pm \sqrt{4 + \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2}}{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i}\end{aligned}$$

注意到 θ_1属于自然参数空间Θ^*的内点集，所以 θ 的极大似然估计为

$$\widehat{\theta} = \frac{-\left(2 + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i\right) + \sqrt{4 + \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i\right)^2}}{\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自均匀分布总体 $U(\theta, 2\theta)$ 的一个简单随机样本，其中 $0 < \theta < +\infty$.

(a) 求 θ 的 MLE. (2 分)

【解】

总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$ 的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

欲使 $L(\theta, \boldsymbol{x})$ 最大，则 θ 应该最小，由 $L(\theta, \boldsymbol{x})$ 的定义域我们看到

$$\theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < 2\theta \implies \frac{\theta}{2} < \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2} < \theta$$

因此 θ 的 MLE 为

$$\widehat{\theta} = \frac{X_{(n)}}{2}$$

(b) 讨论 θ 的 MLE 是否为无偏估计量. (2 分)

【解】

记 $Y = X_{(n)}$，则 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{n(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n}, & \theta < y < 2\theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

从而

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\theta}^{2\theta} y \cdot \frac{n(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n}\,\mathrm{d}y = \frac{2n+1}{n+1}\theta$$

于是

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_{(n)}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y) = \frac{2n+1}{2n+2}\theta \neq \theta$$

所以 $\widehat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量.

(c) 如果不是则对它进行修正以得到 θ 的一个无偏估计量. (2 分)

【解】

令

$$\widehat{\theta}^* = \frac{2n+2}{2n+1}\widehat{\theta} = \frac{n+1}{2n+1}X_{(n)}$$

则

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}^*\right) = \mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2n+1}X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{2n+1}\mathbb{E}\left(X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{n+1}\theta = \theta$$

从而 $\widehat{\theta}^*$ 是 θ 的无偏估计量.

3. 为了估计红山湖中有多少条鱼，用渔网从中捞出了 150 条鱼，进行标记后放生回湖中，过一段时间后有放回地捞出 100 条鱼，发现其中 12 条鱼带有标记. 问红山湖中有多少条鱼，才能使 100 条鱼中出现 12 条带有标记的鱼的概率最大？(2 分)

【解】

假设红山湖中有 N 条鱼，则任意捞出一条鱼带有标记的概率为 $p = \dfrac{150}{N}$，定义随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & \text{任意捞出的一条鱼带有标记} \\ 0, & \text{任意捞出的一条鱼不带有标记} \end{cases}$$

则 $X \sim b(1,\, p)$，其分布律为

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}\,, \quad x = 0,\, 1$$

问题转化为：从 X 中抽取了容量为 100 的样本 $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_{100}$，发现 $\sum\limits_{i=1}^{100} x_i = 12$，似然函数为

$$L(p,\, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{100} P(X_i = x_i) = p^{\sum\limits_{i=1}^{100} x_i}(1-p)^{100-\sum\limits_{i=1}^{100} x_i} = p^{12}(1-p)^{88}$$

取对数得对数似然函数

$$\ell(p,\ \boldsymbol{x}) = \ln L(p,\ \boldsymbol{x}) = 12\ln p + 88\ln(1-p)$$

对 p 求导得似然方程组

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{12}{p} - \frac{88}{1-p} = 0$$

由此解得 p 的 MLE 为

$$\widehat{p} = \frac{12}{100} = 0.12$$

再由

$$p = \frac{150}{N} = \widehat{p} = 0.12 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{N} = \frac{150}{\widehat{p}} = \frac{150}{0.12} = 1250$$

所以，红山湖中有 1250 条鱼时，才能使 100 条鱼中出现 12 条带有标记的鱼的概率达到最大.

4. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ 为取自双参数指数分布

$$f(x,\ \mu,\ \sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\},\quad x \geq \mu \tag{6.2}$$

的简单随机样本，其中 $-\infty < \mu < +\infty$，$\sigma > 0$.

(a) 求 μ、σ 的矩估计. (2 分)

【解】 因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,\ \mu,\ \sigma)\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{x}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\mathrm{d}x \\
&\downarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = t \\
&= \int_0^{+\infty} (\mu + \sigma t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mu + \sigma \\
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\ \mu,\ \sigma)\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}\mathrm{d}x \\
&\downarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\mu^2 + 2\mu\sigma t + \sigma^2 t^2\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mu^2 + 2\sigma\mu + 2\sigma^2 \\
\mathbb{D}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

由矩估计法，我们有

$$\mu + \sigma = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\,,\quad \sigma^2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

由此解得 μ 和 σ 的矩估计分别为

$$\widehat{\mu} = \overline{X} - S\,,\quad \widehat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

(b) 求 $P(X_1 \geq t)$ 的矩估计，其中 $t \geq \mu$. (2 分)

【解】因为

$$\mathbb{P}(X_1 \geq t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} \mathrm{d}x = \exp\left\{\frac{\mu - t}{\sigma}\right\}, \quad (t \geq \mu)$$

所以 $\mathbb{P}(X_1 \geq t)$ 的矩估计为

$$\widehat{\mathbb{P}}(X_1 \geq t) = \exp\left\{\frac{\widehat{\mu} - t}{\widehat{\sigma}}\right\} = \exp\left\{\frac{\overline{X} - S - t}{S}\right\}, \qquad (t \geq \mu)$$

(c) 求 μ、σ 的极大似然估计. (2 分)

【解】似然函数为

$$\begin{aligned} L(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x}) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\, \mu,\, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)\right\}, \quad x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \geq \mu \end{aligned}$$

取对数得对数似然函数

$$\ell(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x}) = \ln L(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x}) = -n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right), \quad x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \geq \mu$$

再分别对 μ 和 σ 求导得

$$\frac{\partial \ell(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma}, \quad \frac{\partial \ell(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)$$

由此可见 MLE 不能由似然方程组得到. 分析 $L(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})$ 我们发现，欲使 $L(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})$ 最大，则 μ 越大越好，由 $L(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})$ 的定义域 $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \geq \mu$ 可见，μ 最大只能取 $\min\{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\}$，所以 μ 的极大似然估计为

$$\widehat{\mu}^* = \min\{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\} = X_{(1)}$$

再由 $\dfrac{\partial \ell(\mu,\, \sigma,\, \boldsymbol{x})}{\partial \sigma} = 0$ 即可得到 σ 的 MLE 为

$$\widehat{\sigma}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - X_{(1)} = \overline{X} - X_{(1)}$$

(d) 求 $P(X_1 \geq t)$ 的极大似然估计，其中 $t \geq \mu$. (2 分)

【解】因为

$$\mathbb{P}(X_1 \geq t) = \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} \mathrm{d}x = \exp\left\{\frac{\mu - t}{\sigma}\right\}, \quad (t \geq \mu)$$

所以 $\mathbb{P}(X_1 \geq t)$ 的 MLE 为

$$\widehat{\mathbb{P}}(X_1 \geq t) = \exp\left\{\frac{\widehat{\mu}^* - t}{\widehat{\sigma}^*}\right\} = \exp\left\{\frac{X_{(1)} - t}{\bar{X} - X_{(1)}}\right\}, \quad (t \geq \mu)$$

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 分别为取自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两组独立简单随机样本.

(a) 写出似然函数. (2 分)

【解】总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ 的概率密度函数分别为

$$f_X(x, \mu_1, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}, \quad f_Y(y, \mu_2, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}$$

似然函数为

$$\begin{aligned} L(\mu_1, \mu_2, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{m} f_X(x_i, \mu_1, \sigma^2) \cdot \prod_{j=1}^{n} f_Y(y_j, \mu_2, \sigma^2) \\ &= (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \sigma^{-(m+n)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

(b) 给出似然方程.(2 分)

【解】似然函数取对数可得对数似然函数如下

$$\begin{aligned} \ell(\mu_1, \mu_2, \sigma^2) &= \ln L(\mu_1, \mu_2, \sigma^2) \\ &= -\frac{m+n}{2}\ln(2\pi) - \frac{m+n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2)^2 \end{aligned}$$

对数似然函数 $\ell(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$ 分别对 μ_1、μ_2 和 σ^2 求导并令其为零，得似然方程组如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ell(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)}{\partial \mu_1} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)}{\partial \mu_2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2) = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{m+n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_1)^2 + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(y_j - \mu_2)^2 = 0 \end{cases}$$

(c) 求解 μ_1，μ_2 和 σ^2 的 MLE.(2 分)

【解】求解上述似然方程组即得 μ_1、μ_2 和 σ^2 的 MLE 为

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = \overline{X}, \quad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \overline{Y}, \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{m+n}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2\right].$$

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自下述指数分布的简单随机样本：

$$f(x, \mu) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{6.3}$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty$.

(a) 求 μ 的极大似然估计 $\widehat{\mu}_1$.(2 分)

【解】 似然函数为

$$L(\mu, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu) = \begin{cases} \mathrm{e}^{n\mu - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对数似然函数为

$$\ell(\mu, \boldsymbol{x}) = \ln L(\mu, \boldsymbol{x}) = n\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$$

求导得

$$\frac{\partial \ell(\mu, \boldsymbol{x})}{\partial \mu} = n > 0$$

μ 的 MLE 无法通过似然方程求解. 注意到 $L(\mu, \boldsymbol{x})$ 是 μ 的单调增加的函数，因此 μ 越大 $L(\mu, \boldsymbol{x})$ 越大，但其定义域要求 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$，因此 μ 最大只能取到 $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，故 μ 的 MLE 为

$$\widehat{\mu}_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = X_{(1)}$$

(b) 判断 $\widehat{\mu}_1$ 是否为 μ 的无偏估计，如果不是，对它进行修正以得到 μ 的一个无偏估计 $\widehat{\mu}_2$.(2 分)

【解】 总体的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t, \mu)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x \le \mu \\ 1 - \mathrm{e}^{-(x-\mu)}, & x > \mu \end{cases}$$

于是，次序统计量 $X_{(1)}$ 的概率密度函数为

$$f_{X_{(1)}}(t) = n\left[1 - F(t)\right]^{n-1} f(t) = \begin{cases} 0, & x \le \mu \\ n\mathrm{e}^{-n(t-\mu)}, & t > \mu \end{cases}$$

从而有

$$\mathbb{E}\left(X_{(1)}\right) = \int_{\mu}^{+\infty} t \cdot n\mathrm{e}^{-n(t-\mu)}\, \mathrm{d}t = \mu + \frac{1}{n} \ne \mu$$

所以 $\widehat{\mu}_1 = X_{(1)}$ 不是 μ 的无偏估计. 若取

$$\widehat{\mu}_2 = \widehat{\mu}_1 - \frac{1}{n} = X_{(1)} - \frac{1}{n}$$

则 $\widehat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计.

(c) 求 μ 的矩估计 $\hat{\mu}_3$.(2 分)

【解】总体的数学期望为

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,\ \mu)\,\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty} x\cdot \mathrm{e}^{-(x-\mu)}\,\mathrm{d}x=\mu+1$$

所以 $\mu=\mathbb{E}(X)-1$，根据据估计的原理可得 μ 的矩估计为

$$\widehat{\mu}_3=\overline{X}-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$$

(d) 证明 $\hat{\mu}_3$ 是 μ 的无偏估计.(2 分)

【证】因为

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mu}_3\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)-1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu+1)-1=\mu$$

所以 $\widehat{\mu}_3$ 是 μ 的无偏估计.

(e) 判断 $\hat{\mu}_2$ 和 $\hat{\mu}_3$ 哪一个更为有效？(2 分)

【解】我们来计算 $\widehat{\mu}_2$ 和 $\widehat{\mu}_3$ 的方差，注意到

$$\mathbb{D}\left(\widehat{\mu}_2\right)=\mathbb{D}\left(X_{(1)}-\frac{1}{n}\right)=\mathbb{D}\left(X_{(1)}\right)$$

我们已经计算出了 $X_{(1)}$ 的密度函数 $f_{X_{(1)}}(t)$ 和数学期望 $\mathbb{E}\left(X_{(1)}\right)=\mu+\dfrac{1}{n}$，于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_{(1)}^2\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\cdot f_{X_{(1)}}(t)\mathrm{d}t=\int_{\mu}^{+\infty} t^2\cdot n\mathrm{e}^{-n(t-\mu)}\mathrm{d}t\\
&\downarrow\ n(t-\mu)=u\\
&=\int_0^{+\infty}\left(\mu^2+\frac{u^2}{n^2}+2\frac{\mu u}{n}\right)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\mu^2+\frac{2}{n^2}+\frac{2\mu}{n}\\
\mathbb{D}\left(X_{(1)}\right)&=\mathbb{E}\left(X_{(1)}^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(X_{(1)}\right)\right]^2\\
&=\mu^2+\frac{2}{n^2}+\frac{2\mu}{n}-\left(\mu+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^2}=D\left(\hat{\mu}_2\right)
\end{aligned}$$

再来计算 $\widehat{\mu}_3$ 的方差，注意到

$$\mathbb{D}\left(\hat{\mu}_3\right)=\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\left(X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X\right)=\frac{\mathbb{D}(X)}{n}$$

因为

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x,\ \mu)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty} x^2\cdot \mathrm{e}^{-(x-\mu)}\mathrm{d}x$$

$$\downarrow\ x-\mu=w$$

$$=\int_{0}^{+\infty}(w+\mu)^2\cdot \mathrm{e}^{-w}\mathrm{d}w=2+2\mu+\mu^2$$

所以

$$\mathbb{D}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-[E(X)]^2=2+2\mu+\mu^2-(\mu+1)^2=1$$

于是

$$\mathbb{D}\left(\widehat{\mu}_3\right)=\frac{\mathbb{D}(X)}{n}=\frac{1}{n}$$

由于 $n\geq 2$ 时有 $\mathbb{D}\left(\hat{\mu}_2\right)<\mathbb{D}\left(\hat{\mu}_3\right)$，所以 $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_3$ 更有效.

7. 若总体 X 为下列 $0-1$ 分布族

$$\mathbb{P}_\theta(X=1)=1-\mathbb{P}_\theta(X=0)=\begin{cases}\theta, & \theta\text{ 为有理数}\\ 1-\theta, & \theta\text{ 为无理数}\end{cases} \tag{6.4}$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自该总体的一个简单随机样本.

(a) 求 θ 的 MLE (极大似然估计). (2 分)

【解】用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集，则 $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 表示无理数集，于是，令

$$p(\theta)\triangleq\theta\cdot \mathrm{I}_{\{\theta\in\mathbb{Q}\}}+(1-\theta)\cdot \mathrm{I}_{\{\theta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\}}=\begin{cases}\theta, & \theta\text{ 为有理数}\\ 1-\theta, & \theta\text{ 为无理数}\end{cases}$$

从而，总体的分布律可以表示为

$$\mathbb{P}\left(X=x\right)=p^x\left(1-p\right)^{1-x},\quad x=0,1$$

于是，将 p 看作参数，似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i=x_i\right)=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\left(1-p\right)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$$

取对数得对数似然函数为

$$\ell(p)=\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p)$$

对 p 求导并令其为零，得似然方程

$$\frac{\partial \ell(p)}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

由此解得

$$p(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = \theta \cdot \mathrm{I}_{\{\theta\in\mathbb{Q}\}} + (1-\theta)\cdot \mathrm{I}_{\{\theta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\}}$$

故，θ 的 MLE 为

$$\widehat{\theta} = \begin{cases} \overline{X}\,, & \theta \text{ 为有理数} \\ 1-\overline{X}\,, & \theta \text{ 为无理数} \end{cases}$$

(b) 证明 θ 的 MLE (极大似然估计) 不是相合估计. (2 分)

【证】由大数定律我们知道

$$\overline{X} \xrightarrow{P} p(\theta) = \begin{cases} \theta\,, & \theta \text{ 为有理数} \\ 1-\theta\,, & \theta \text{ 为无理数} \end{cases}$$

因为 $\overline{X}$ 的收敛结果不唯一，故 $\widehat{\theta}$ 不是相合估计.

8. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自均匀分布总体 $U(\theta_1, \theta_2)$ 的简单随机样本.

(a) 求 θ_1 和 θ_2 的 MLE $\widehat{\theta}_1$ 和 $\widehat{\theta}_2$. (2 分)

【解】

均匀分布总体 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$ 的概率密度函数为

$$f(x, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

从而似然函数为

$$L(\theta_1, \theta_2, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 < x_1, x_2, \ldots, x_n < \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其 MLE 不能通过似然方程组求解.

观察似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \boldsymbol{x})$ 我们看到，欲使 $L(\theta_1, \theta_2, \boldsymbol{x})$ 最大，则 $\theta_2-\theta_1$ 应越小越好 $(\theta_1 < \theta_2)$，即 θ_1 尽可能大、θ_2 尽可能小，再结合其定义域要求 $\theta_1 < x_1, x_2, \ldots, x_n$，可得 θ_1 和 θ_2 的 MLE 分别为

$$\widehat{\theta}_1 = X_{(1)}\,, \quad \widehat{\theta}_2 = X_{(n)}$$

(b) 确定 $\widehat{\theta}_1$ 和 $\widehat{\theta}_2$ 是否分别为 θ_1 和 θ_2 的无偏估计？如果不是，对其进行修正以获得 θ_1 和 θ_2 的无偏估计. (2 分)

【解】

均匀分布总体 $X \sim U(\theta_1,\ \theta_2)$ 的分布函数为

$$F(x,\ \theta_1,\ \theta_2) = \int_{-\infty}^{x} f(t,\ \theta_1,\ \theta_2)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x \le \theta_1 \\ \dfrac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2 \\ 1, & x \ge \theta_2 \end{cases}$$

利用次序统计量概率密度函数的结果可得 $\widehat{\theta}_1 = X_{(1)}$ 和 $\widehat{\theta}_2 = X_{(n)}$ 的概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} f_{\widehat{\theta}_1}(x) &= n\left[1 - F(x,\ \theta_1,\ \theta_2)\right]^{n-1} \cdot f(x,\ \theta_1,\ \theta_2) \\ &= \begin{cases} \dfrac{n(\theta_2 - x)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\ f_{\widehat{\theta}_2}(x) &= n\left[F(x,\ \theta_1,\ \theta_2)\right]^{n-1} \cdot f(x,\ \theta_1,\ \theta_2) \\ &= \begin{cases} \dfrac{n(x-\theta_1)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\hat{\theta}_1\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\hat{\theta}_1}(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x \cdot \frac{n(\theta_2-x)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{n+1}\theta_1 + \frac{1}{n+1}\theta_2 \ne \theta_1 \\ \mathbb{E}\left(\hat{\theta}_2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{\hat{\theta}_2}(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x \cdot \frac{n(x-\theta_1)^{n-1}}{(\theta_2-\theta_1)^n}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\theta_1 + \frac{n}{n+1}\theta_2 \ne \theta_2 \end{aligned}$$

所以 $\widehat{\theta}_1 = X_{(1)}$ 不是 θ_1 的无偏估计，$\widehat{\theta}_2 = X_{(n)}$ 不是 θ_2 的无偏估计. 为构造相应的无偏估计量，注意到对于常数 a, b 有

$$\mathbb{E}\left(a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2\right) = \frac{an+b}{n+1}\theta_1 + \frac{a+bn}{n+1}\theta_2$$

为使 $\mathbb{E}\left(a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2\right) = \theta_1$，则有

$$\begin{cases} an+b &= n+1 \\ a+bn &= 0 \end{cases} \implies a = \frac{n}{n-1}\ ,\ \ b = -\frac{1}{n-1}$$

从而修正得到 θ_1 的无偏估计为

$$\widehat{\theta}_1^* = \frac{n}{n-1}X_{(1)} - \frac{1}{n-1}X_{(n)}$$

为使 $\mathbb{E}\left(a\widehat{\theta}_1 + b\widehat{\theta}_2\right) = \theta_2$，则有

$$\begin{cases} an + b & = & 0 \\ a + bn & = & n+1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{n-1}\,,\ b = \frac{n}{n-1}$$

从而修正得到 θ_2 的无偏估计为

$$\widehat{\theta}_2^* = -\frac{1}{n-1}X_{(1)} + \frac{n}{n-1}X_{(n)}$$

Chapter 7

第 7 周课后作业参考答案

1. 证明均匀分布族 $\mathscr{F} = \{U(0, \theta) : 0 < \theta < \infty\}$ 不是 C-R 正则分布族. (2 分)

   【证】

   对于 C-R 正则条件 (4)：概率函数 $f(x, \theta)$ 的积分与微分运算可交换，即

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x, \theta)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta)\,\mathrm{d}x$$

   因为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

   于是

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x, \theta)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{\theta} \frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial\theta} 1 = 0$$

   而

$$\int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\theta} -\frac{1}{\theta^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\theta}$$

   所以

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x, \theta)\,\mathrm{d}x \neq \int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x, \theta)\,\mathrm{d}x$$

   因此，均匀分布族 $\mathscr{F} = \{U(0, \theta) : 0 < \theta < \infty\}$ 不是 C-R 正则分布族.

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自总体

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.1}$$

   的简单随机样本，其中 $\theta > 0$ 为未知参数.

   (a) 求 θ 的 MLE $\widehat{\theta}$. (2 分)

   【解】

似然函数为

$$L(\theta,\ \boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对数似然函数为

$$l(\theta,\ \boldsymbol{x})=\ln L(\theta,\ \boldsymbol{x})=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

由此可得似然方程

$$\frac{\partial l(\theta,\ \boldsymbol{x})}{\partial\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得 θ 的 MLE 为

$$\widehat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}.$$

(b) 证明 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的有效估计. (2 分)

【证】

总体的数学期望为

$$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,\theta)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=\theta$$

所以

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}\right)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X\right)=\theta$$

说明 $\widehat{\theta}=\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计. 总体的方差为

$$\mathbb{D}(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2=\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\dfrac{x}{\theta}}\mathrm{d}x-\theta^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

于是

$$\mathbb{D}\left(\hat{\theta}\right)=\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X\right)=\frac{\theta^2}{n}$$

Fisher 信息量为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\theta)&=\mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial\log f(X,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}=\mathbb{E}\left[\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{X}{\theta^2}\right)^2\right]\\&=\int_{0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\theta^2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x-\frac{2}{\theta^3}\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x+\frac{1}{\theta^4}\int_{0}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\theta^2}\end{aligned}$$

从而 C-R 下界为

$$\frac{1}{n \cdot \mathrm{I}(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$$

因为 θ 的无偏估计量 $\widehat{\theta} = \overline{X}$ 的方差等于 C-R 下界，因此它就是 θ 的有效估计.

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim N(0, \sigma^2)$，其中 σ^2 为未知参数.

(a) 求 σ^2 的无偏估计方差的 C-R 下界. (2 分)

【解】

总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的概率密度函数为

$$f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \sigma > 0$$

因为

$$\log f(x, \sigma^2) = -\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

所以 Fisher 信息量为

$$\mathrm{I}(\sigma^2) = \mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial \log f(X, \sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right]^2\right\} = \mathbb{E}\left[\left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{X^2}{2\sigma^4}\right)^2\right] = \frac{1}{4\sigma^8}\mathbb{E}\left[\left(X^2 - \sigma^2\right)^2\right]$$

由于 $\mathbb{D}(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2)$，所以

$$\mathrm{I}(\sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^8}\mathbb{D}(X^2)$$

又因为

$$X \sim N(0, \sigma^2) \Longrightarrow \frac{X}{\sigma} \sim N(0, 1) \Longrightarrow \frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2 \Longrightarrow \mathbb{D}\left(\frac{X^2}{\sigma^2}\right) = 2$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\sigma^4}\mathbb{D}(X^2) = 2 \Longrightarrow D(X^2) = 2\sigma^4$$

于是

$$\mathrm{I}(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$$

从而 σ^2 的无偏估计量方差的 C-R 下界为

$$\frac{1}{n \cdot \mathrm{I}(\sigma^2)} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

(b) 证明 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是 σ^2 的有效估计. (2 分)

【证】

上述计算过程中我们得出了

$$\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2, \quad \mathbb{D}(X^2) = 2\sigma^4$$

于是

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)=\sigma^2$$

说明 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 σ^2 的无偏估计. 再由

$$\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(X_i^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n}$$

说明 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 的方差达到了 σ^2 无偏估计量方差的 C-R 下界，所以它就是 σ^2 的有效估计.

4. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ i.i.d. $\sim N\left(a,\ \sigma^2\right)$，其中 a 已知.

(a) 证明 $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-a|$ 为 σ 的无偏估计量. (2 分)

【证】

记 $Y_i=X_i-a$，则 $Y_i\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N\left(0,\ \sigma^2\right)$，于是

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-a|\right)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(|Y_i|\right)$$

由于

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(|Y_i|\right)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|y|}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y=2\int_0^{\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-a|\right)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\right)=\sigma$$

说明 $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-a|$ 为 σ 的无偏估计量.

(b) 证明该无偏估计量的效率为 $\frac{1}{\pi-2}$. (2 分)

【证】

Fisher 信息量为

$$
\begin{aligned}
I(\sigma) &= \mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial \log f(X,\ \sigma)}{\partial \sigma}\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(X-a)^2}{2\sigma^2}\right)\right]^2\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[\frac{(X-a)^2-\sigma^2}{\sigma^3}\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sigma^6}\,\mathbb{D}\left[(X-a)^2\right] \\
&= \frac{2}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

所以 C-R 下界为

$$
\frac{[g'(\theta)]^2}{n\,\mathrm{I}(\theta)} = \frac{\sigma^2}{2n}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-a|\right) &= \frac{\pi}{2n^2}\,\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n}|Y_i|\right) \\
&= \frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left(|Y_i|\right) \\
&= \frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbb{E}\left(Y_i^2\right) - \left[\mathbb{E}\left(|Y_i|\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbb{D}\left(Y_i\right) + \left[\mathbb{E}\left(Y_i\right)\right]^2 - \left[\mathbb{E}\left(|Y_i|\right)\right]^2\right\} \\
&= \frac{\pi}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sigma^2 + 0^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2\right\} \\
&= \frac{\pi-2}{2n}\,\sigma^2
\end{aligned}
$$

从而该无偏估计量的效率为

$$
\frac{\dfrac{\sigma^2}{2n}}{\dfrac{\pi-2}{2n}\,\sigma^2} = \frac{1}{\pi-2}
$$

5. 设 $X_1,\ X_2,\ X_3$ 是取自均匀分布总体 $U(0,\ \theta)$ 的简单随机样本.

(a) 证明 $\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 是 θ 的无偏估计量. (2 分)

【证】

总体 $X \sim U(0,\,\theta)$ 的概率密度函数和分布函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\[2ex] 0, & \text{其它}\end{cases},\quad F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\[2ex] \dfrac{x}{\theta}, & 0<x<\theta\\[2ex] 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

记 $Y=\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$，根据顺序统计量的结论知 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=n\,[F_X(y)]^{n-1}\,f_X(y)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{\theta^3}, & 0<y<\theta\\[2ex] 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

于是

$$\mathbb{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\theta} y\cdot\frac{3y^2}{\theta^3}\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\theta$$

所以

$$\mathbb{E}\left(\frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3}X_i\right)=\frac{4}{3}\cdot\mathbb{E}(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\theta=\theta$$

说明 $\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3}X_i$ 是 θ 的无偏估计量.

(b) 证明 $4\min\limits_{1\le i\le 3}X_i$ 是 θ 的无偏估计量. (2 分)

【证】

记 $Z=\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$，根据顺序统计量的结论知 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=n\,[1-F_X(z)]^{n-1}\,f_X(z)=\begin{cases}\dfrac{3(\theta-z)^2}{\theta^3}, & 0<z<\theta\\[2ex] 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

于是

$$\mathbb{E}(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot f_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\theta} z\cdot\frac{3(\theta-z)^2}{\theta^3}\mathrm{d}z=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{\theta^4}{12}=\frac{1}{4}\theta$$

所以

$$\mathbb{E}\left(4\min_{1\le i\le 3}X_i\right)=4\cdot\mathbb{E}(Z)=4\cdot\frac{1}{4}\theta=\theta$$

说明 $4\min\limits_{1\le i\le 3}X_i$ 是 θ 的无偏估计量.

(c) 确定上述两个无偏估计量哪一个更有效？ (2 分)

【解】

因为

$$\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\theta} y^2\cdot\frac{3y^2}{\theta^3}\mathrm{d}y=\frac{3}{5}\,\theta^2$$

$$\mathbb{E}\left(Z^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2\cdot f_Z(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\theta} z^2\cdot\frac{3(\theta-z)^2}{\theta^3}\mathrm{d}z=\frac{1}{10}\,\theta^2$$

所以

$$\mathbb{D}\,(Y)=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-[\mathbb{E}(Y)]^2=\frac{3}{5}\theta^2-\frac{9}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\,\theta^2$$

$$\mathbb{D}\,(Z)=\mathbb{E}\left(Z^2\right)-[\mathbb{E}(Z)]^2=\frac{1}{10}\theta^2-\frac{1}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\,\theta^2$$

于是

$$\mathbb{D}\left(\frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3}X_i\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{1}{15}\,\theta^2$$

$$\mathbb{D}\left(4\min_{1\le i\le 3}X_i\right)=16\,\mathbb{D}\,(Z)=16\cdot\frac{3}{80}\theta^2=\frac{3}{5}\,\theta^2$$

由于

$$\frac{1}{15}\,\theta^2<\frac{3}{5}\,\theta^2$$

所以 $\frac{4}{3}\max_{1\le i\le 3}X_i$ 比 $4\min_{1\le i\le 3}X_i$ 更有效.

6. 设总体 X 的数学期望为 a，$\widehat{a}_1$ 和 $\widehat{a}_2$ 分别为 a 的两个无偏估计量，它们的方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，相关系数为 ρ，确定常数 $c_1>0$，$c_2>0$，$c_1+c_2=1$，使得 $c_1\,\widehat{a}_1+c_2\,\widehat{a}_2$ 具有最小的方差. (2 分)

【解】

因为

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\,(c_1\widehat{a}_1+c_2\widehat{a}_2)&=\mathbb{D}\,(c_1\widehat{a}_1)+\mathbb{D}\,(c_2\widehat{a}_2)+2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(c_1\widehat{a}_1\,,\,c_2\widehat{a}_2)\\&=c_1^2\,\mathbb{D}\,(\widehat{a}_1)+c_2^2\,\mathbb{D}\,(\widehat{a}_2)+2\,c_1\,c_2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\widehat{a}_1\,,\,\widehat{a}_2)\\&=c_1^2\,\sigma_1^2+c_2^2\,\sigma_2^2+2\,c_1\,c_2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2\end{aligned}$$

利用拉格朗日乘数法求解带有约束条件 $c_1+c_2=1$ 的极值问题，设辅助函数

$$L\,(c_1\,,\,c_2\,,\,\lambda)=c_1^2\,\sigma_1^2+c_2^2\,\sigma_2^2+2\,c_1\,c_2\,\rho\,\sigma_1\,\sigma_2+\lambda\,(c_1+c_2-1)$$

对 c_1 , c_2 , λ 求导并令其为零得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial c_1} &= 2c_1\sigma_1^2 + 2c_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_2} &= 2c_2\sigma_2^2 + 2c_1\rho\sigma_1\sigma_2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} &= c_1 + c_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

由此解得唯一驻点

$$c_1 = \frac{\sigma_2^2 - \rho\,\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2}\,, \quad c_2 = \frac{\sigma_1^2 - \rho\,\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2}$$

所以它们就是使得 $c_1\widehat{a}_1 + c_2\widehat{a}_2$ 具有最小方差的结果.

Chapter 8

第 8 周课后作业参考答案

1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的一个简单随机样本.

   (a) 如果 $n=4$，求 μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1, \overline{X}+1\right]$ 的置信系数. (2 分)

   【解】

   因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 1)$，所以

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{1}{n})$$

   于是，μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1, \overline{X}+1\right]$ 的置信系数为

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{X}-1 \le \mu \le \overline{X}+1\right) &= P\left(-1 \le \overline{X}-\mu \le 1\right) \\
&= P\left(-\frac{1}{1/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \le \frac{1}{1/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(-\sqrt{n} \le \frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{n}} \le \sqrt{n}\right) \\
&= \Phi\left(\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\sqrt{n}\right) \\
&= 2\Phi\left(\sqrt{n}\right) - 1
\end{aligned}$$

   当 $n=4$ 即有

$$P\left(\overline{X}-1 \le \mu \le \overline{X}+1\right) = 2\Phi\left(\sqrt{4}\right) - 1 = 2\Phi\left(2\right) - 1 = 0.9544997$$

   (b) 要使 μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1, \overline{X}+1\right]$ 的置信系数为 0.99，问样本容量 n 至少为多少？(2 分)

   【解】

要使 μ 的区间估计 $\left[\overline{X}-1,\ \overline{X}+1\right]$ 的置信系数为 0.99，即要求

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{X}-1 \le \mu \le \overline{X}+1\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}\right)-1 \ge 0.99 &\Longrightarrow \Phi\left(\sqrt{n}\right) \ge 0.995 \\
&\Longrightarrow \sqrt{n} \ge u_{0.005} = 2.575829 \\
&\Longrightarrow n \ge 2.575829^2 = 6.634897
\end{aligned}
$$

因此，样本容量 n 至少应取 7. 其中，$u_{0.005}$ 可用下述 R 代码得到：

```
qnorm(0.005, mean = 0, sd = 1, lower.tail = FALSE)
```

2. 对一物体某指标进行 5 次测量，得其数据：4.781, 4.795, 4.769, 4.792, 4.779. 设指标值服从 $N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 $\sigma = 0.01$，求物体该指标平均值的置信系数为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

方差 σ^2 已知时，正态总体均值 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{\alpha/2}\ ,\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, u_{\alpha/2}\right]$$

已知 $n = 5$，$\sigma = 0.05$，$1-\alpha = 0.95$，所以 $\alpha = 0.05$，计算得

$$\overline{x} = 4.7832$$

于是，该指标平均值 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$$\left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\, u_{0.025}\ ,\ \overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\, u_{0.025}\right] = [4.774435\ ,\ 4.791965]$$

计算可以利用下述 R 代码实现：

```
x = c(4.781, 4.795, 4.769, 4.792, 4.779) # 观测数据
n = 5 # 样本容量
sigma = 0.01 # 已知的方差
alpha = 0.05 # 置信度为 1 - alpha
x.bar = mean(x) # 样本均值
x.bar
lower.x = x.bar - (sigma / sqrt(n)) * qnorm(alpha / 2, 0, 1, lower.tail = FALSE)
lower.x # 置信区间左端点值
upper.x = x.bar + (sigma / sqrt(n)) * qnorm(alpha / 2, 0, 1, lower.tail = FALSE)
upper.x # 置信区间右端点值
```

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ, σ^2 均未知.

(a) 利用枢轴变量法确定 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限. (2 分)

【解】

因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，所以

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \implies \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

又因为

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

并且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，于是

$$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

因为 t_{n-1} 分布完全已知，且与 μ 无关，因此可以取随机变量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ 为枢轴变量，利用 t_{n-1} 分布的上侧 α 分位数定义，我们有

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \geq t_{n-1}(1-\alpha)\right) = 1-\alpha$$

从而有

$$P\left(\overline{X}-\mu \geq \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(1-\alpha)\right) = 1-\alpha$$

此即

$$P\left(\mu \leq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(1-\alpha)\right) = 1-\alpha$$

根据 t 分布的对称性，我们知道 $t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha)$，因此

$$P\left(\mu \leq \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(1-\alpha)\right) = P\left(\mu \leq \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(\alpha)\right) = 1-\alpha$$

于是得 σ^2 未知时，正态总体均值 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为：

$$\overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(\alpha)$$

(b) 某种油漆 9 个样品的干燥时间（单位：小时）为 6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0，假设

干燥时间服从正态分布 $N(\mu,\,\sigma^2)$，求 μ 的置信系数为 0.95 的单侧置信上限. (2 分)

【解】

由 (a) 得方差 σ^2 未知时，正态总体均值 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为

$$\overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(\alpha)$$

已知 $n=9$，$1-\alpha=0.95$，所以 $\alpha=0.05$，计算得

$$\overline{x}=6\,,\quad s=0.5744563$$

于是，μ 的置信系数为 0.95 的单侧置信上限为

$$\overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1}(\alpha) = 6.356076$$

上述计算可以利用以下 R 代码实现：

```
x = c(6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0) # 样本数据
x.bar = mean(x) # 样本均值
x.bar
s = sd(x) # 样本方差
s
n = length(x) # 样本容量
alpha = 0.05 # 置信系数 1 - alpha
upper.x = x.bar + (s / sqrt(n)) * qt(alpha, n-1, lower.tail = FALSE)
upper.x # 单侧置信上限
```

4. 设 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 μ 已知，利用枢轴变量法确定 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限. (2 分)

【解】

因为 $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu,\,\sigma^2)$，所以有

$$\frac{X_1-\mu}{\sigma},\ \frac{X_2-\mu}{\sigma},\ \ldots,\ \frac{X_n-\mu}{\sigma} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,\,1)$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2_n$$

因为 χ^2_n 分布完全已知，且与 σ^2 无关，因此可以取随机变量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 为枢轴变量，如图 ??

所示，利用 χ_n^2 分布的上侧 α 分位数定义有

$$P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le\chi_n^2(\alpha)\right)=1-\alpha$$

此即

$$P\left(\frac{1}{\chi_n^2(\alpha)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\le\sigma^2\right)=1-\alpha$$

所以， σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\frac{1}{\chi_n^2(\alpha)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

5. 某电子产品的某一参数服从正态分布 $N(\mu\,,\sigma^2)$，今从某天生产的产品中随机抽取 15 只，测得该参数值如下：

$$3.0,\ 2.7,\ 2.9,\ 2.8,\ 3.1,\ 2.6,\ 2.5,\ 2.8,\ 2.4,\ 2.9,\ 2.7,\ 2.6,\ 3.2,\ 3.0,\ 2.8$$

求该参数均值 μ 的置信系数为 95% 的置信区间. (2 分)

【解】

方差未知时，正态总体均值的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)\,,\,\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)\right]$$

已知 $n=15$，$1-\alpha=0.95$，所以 $\alpha=0.05$，计算得

$$\overline{x}=2.8\,,\quad s=0.2236068$$

于是，该参数均值的置信系数为 95% 的置信区间是

$$\left[\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)\,,\,\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)\right]=[2.676171\,,\,2.923829]$$

上述计算可以利用以下 R 代码实现：

```
x = c(3.0, 2.7, 2.9, 2.8, 3.1, 2.6, 2.5, 2.8, 2.4, 2.9, 2.7, 2.6,
         3.2, 3.0, 2.8) # 样本数据
x.bar = mean(x) # 样本均值
x.bar
s = sd(x) # 样本标准差
s
n = length(x) # 样本容量
alpha = 0.05 # 置信系数 1 - alpha
lower.x = x.bar - (s / sqrt(n)) * qt(alpha/2, n-1, lower.tail = FALSE)
```

```
lower.x # 单侧置信下限
upper.x = x.bar + (s / sqrt(n)) * qt(alpha/2, n-1, lower.tail = FALSE)
upper.x # 单侧置信上限
```

6. 某电子产品的某一参数服从正态分布，今从某天生产的产品中随机抽取 15 只，测得该参数值如下：

$$3.0,\ 2.7,\ 2.9,\ 2.8,\ 3.1,\ 2.6,\ 2.5,\ 2.8,\ 2.4,\ 2.9,\ 2.7,\ 2.6,\ 3.2,\ 3.0,\ 2.8$$

求该参数方差的置信系数为 95% 的置信区间. (2 分)

【解】

均值未知时，正态总体方差的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\,,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$

已知 $n=15$，$1-\alpha=0.95$，所以 $\alpha=0.05$，计算得

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}=0.02680047\,,\qquad \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}=0.1243621$$

所以，该参数方差的置信系数为 95% 的置信区间是 $[0.02680047\,,\ 0.1243621]$. 计算可用以下代码完成：

```
x = c(3.0, 2.7, 2.9, 2.8, 3.1, 2.6, 2.5, 2.8, 2.4, 2.9, 2.7, 2.6,
        3.2, 3.0, 2.8) # 样本数据
x.bar = mean(x) # 样本均值
x.bar
s2 = var(x) # 样本方差
s2
n = length(x) # 样本容量
alpha = 0.05 # 置信系数 1 - alpha
lower.sigma2 = (n-1) * s2 / qchisq(alpha/2, n-1, lower.tail = FALSE)
lower.sigma2 # 置信区间左端点
upper.sigma2 = (n-1) * s2 / qchisq(1 - alpha/2, n-1, lower.tail = FALSE)
upper.sigma2 # 置信区间右端点
```

7. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，为使 $\dfrac{1}{4}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$ 成为 σ 的置信系数为 0.95 的单侧置信下限，问样本容量 n 至少应取多少？ (2 分)

【解】

均值未知时，正态总体方差的置信系数为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha)}$$

为使

$$\frac{1}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

成为 σ 的置信系数为 0.95 的单侧置信下限，则有

$$\begin{aligned}
P\left(\sigma \geq \frac{1}{4}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right) \geq 0.95 &\Longleftrightarrow P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \leq 16\right) \geq 0.95 \\
&\Longleftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq 16\right) \geq 0.95 \\
&\Longleftrightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 16\right) < 0.05
\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，所以我们要找一个 χ^2 分布，使得它大于 16 的概率小于 0.05. 因为

$$P\left(\chi^2_7 > 16\right) = 0.0251\,, \quad P\left(\chi^2_8 > 16\right) = 0.0424\,, \quad P\left(\chi^2_9 > 16\right) = 0.0669\,, \quad P\left(\chi^2_{10} > 16\right) = 0.0996$$

我们看到，当自由度大于 9 时，χ^2 分布大于 16 的概率就超过了 0.05，因此，欲使 χ^2 分布大于 16 的概率小于 0.05，其自由度不得大于 9，即 $n-1 \leq 8$，从而有 $n \leq 9$，所以样本容量 n 最多取 9. χ^2 分布大于 16 的概率可以用以下代码获得：

```
pchisq(16, df = 7, lower.tail = FALSE) # 自由度7的Chisquare分布大于16的概率
pchisq(16, df = 8, lower.tail = FALSE) # 自由度8的Chisquare分布大于16的概率
pchisq(16, df = 9, lower.tail = FALSE) # 自由度9的Chisquare分布大于16的概率
pchisq(16, df = 10, lower.tail = FALSE) # 自由度10的Chisquare分布大于16的概率
```

8. [选做（2 分）] 已知置信系数为$1-\alpha$，样本$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$是从总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的简单样本，请将下列表格补充完整.

表 8.1: 单个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
μ	σ^2已知				
μ	σ^2未知				
σ^2	μ已知				
σ^2	μ未知				

【解】

已知$X_1,\ldots,X_n \sim i.i.d.N(\mu,\sigma^2)$，令$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，$S^2=\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{n-1}$，$S_\mu^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{n}$，$u_\alpha$为标准正态分布的上侧$\alpha$分位数，$t_n(\alpha)$为自由度为$n$的t分布的上侧$\alpha$分位数，$\chi_n^2(\alpha)$为自由度为$n$的卡方分布的上侧$\alpha$分位数。

表 8.2: 单个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
μ	σ^2已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\bar{X}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}-u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}+u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
μ	σ^2未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$\bar{X}\pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}-t_{n-1}(\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}+t_{n-1}(\alpha)\frac{S}{\sqrt{n}}$
σ^2	μ已知	$\frac{nS_\mu^2}{\sigma^2}$	$\left[\frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})},\frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$	$\frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(\alpha)}$	$\frac{nS_\mu^2}{\chi_n^2(1-\alpha)}$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})},\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha)}$	$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha)}$

Chapter 9

第 9 周课后作业参考答案

1. 随机地从 A 批导线中抽取 4 根，从 B 批导线中抽取 5 根，测量电阻（单位：Ω）为

A 批导线	0.143	0.142	0.143	0.137	
B 批导线	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

假设测试数据分别服从正态分布 $N(a_1, \sigma^2)$ 和 $N(a_2, \sigma^2)$，并且它们相互独立，a_1, a_2, σ^2 均未知，求 $a_1 - a_2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】

这是两个正态总体方差未知但相等时均值差的置信区间，其结果为

$$\overline{X} - \overline{Y} - t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}\,,\ \overline{X} - \overline{Y} + t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

其中

$$S_w^2 = \frac{(m-1)\,S_X^2 + (n-1)\,S_Y^2}{m+n-2} = \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2\right]$$

已知 $1-\alpha = 0.95$，$m = 4$，$n = 5$，利用 R 计算得：

$$\overline{x} - \overline{y} - t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot s_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = -0.001996351$$

$$\overline{x} - \overline{y} + t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot s_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 0.006096351$$

故 $a_1 - a_2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间为 $[-0.001996351, 0.006096351]$. 计算的 R 代码如下：

```
rm(list = ls(all = TRUE)) # clear all variables
x = c(0.143, 0.142, 0.143, 0.137)
m = length(x); m # 样本容量
bar.x = mean(x); bar.x # 样本均值
var.x = var(x); var.x # 样本方差
```

```
y = c(0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140)
n = length(y); n # 样本容量
bar.y = mean(y); bar.y # 样本均值
var.y = var(y); var.y # 样本方差
alpha = 0.05 # 显著水平 1 - alpha = 0.95
S_w = sqrt(((m-1) * var.x + (n-1) * var.y) / (m + n - 2))
S_w # 合并样本标准差
Lower = bar.x - bar.y - qt(alpha/2, m+n-2, lower.tail = FALSE) *
        S_w * sqrt(1/m + 1/n)
Lower # 置信区间左端点
Upper = bar.x - bar.y + qt(alpha/2, m+n-2, lower.tail = FALSE) *
        S_w * sqrt(1/m + 1/n)
Upper # 置信区间右端点
```


2. 枪弹的速度（单位：米/秒）服从正态分布，为了比较两种枪弹的速度，在相同的条件下进行速度测定. 经计算得相关数据如下：

$$\text{枪弹甲：} m = 110，\bar{X} = 2805，S_1 = 120.41$$

$$\text{枪弹乙：} n = 100，\bar{Y} = 2680，S_2 = 105.00$$

求这两种枪弹的平均速度之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】这是两个正态总体方差未知、大样本时均值差的置信区间，其近似结果为

$$\overline{X} - \overline{Y} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}\ ,\ \overline{X} - \overline{Y} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}$$

已知 $1 - \alpha = 0.95$，将题给数据代入计算可得

$$\overline{x} - \overline{y} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}} = 94.50664$$

$$\overline{x} - \overline{y} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}} = 155.4934$$

故两种枪弹的平均速度之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间为 [94.50664, 155.4934]. 计算的 R 代码如下：

```
rm(list = ls(all = TRUE)) # clear all variables
Lower = 2805 - 2680 - qnorm(0.025, 0, 1, lower.tail = FALSE) *
        sqrt(120.41^2 / 110 + 105.00^2 / 100)
Lower # 置信区间左端点
Upper = 2805 - 2680 + qnorm(0.025, 0, 1, lower.tail = FALSE) *
```

```
        sqrt(120.41^2 / 110 + 105.00^2 / 100)
Upper # 置信区间右端点
```

3. 设 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m$ 是来自正态总体 $N\left(a,\ \sigma_1^2\right)$ 的简单随机样本，$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n$ 是来自正态总体 $N\left(b,\ \sigma_2^2\right)$ 的简单随机样本，且两组样本相互独立. 当 $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=\lambda$ 且 λ 已知时，确定 $b-a$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间. (2 分)

【解】

因为

$$\overline{X}\sim N\left(a,\ \frac{\sigma_1^2}{m}\right),\quad \overline{Y}\sim N\left(b,\ \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

并且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，因此

$$\overline{Y}-\overline{X}\sim N\left(b-a,\ \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)=N\left(b-a,\left(\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}\right)\sigma_1^2\right)$$

标准化可得

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(b-a)}{\sigma_1\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{\lambda}{n}}}\sim N(0,\ 1)$$

又因为

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}=\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2_{m-1}$$

$$\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}=\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2=\frac{1}{\sigma_1^2}\cdot\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\sim\chi^2_{n-1}$$

再利用独立性的条件可知

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right]\sim\chi^2_{m+n-2}$$

由 t 分布的结构性定义，我们有

$$\frac{\dfrac{\overline{Y}-\overline{X}-(b-a)}{\sigma_1\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{\lambda}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma_1^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right]\cdot\dfrac{1}{m+n-2}}}\sim t_{m+n-2}$$

记

$$S_p^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right]$$

则有

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(b-a)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{\lambda}{n}}}\sim t_{m+n-2}$$

于是

$$P\left(-t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(b-a)}{S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}}\leq t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha$$

即

$$P\left(\overline{Y}-\overline{X}-t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}\leq b-a\leq\overline{Y}-\overline{X}+t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}\right)=1-\alpha$$

故 $b-a$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{Y}-\overline{X}-t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}},\quad \overline{Y}-\overline{X}+t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}\right]$$

由此可得 $b-a$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信下限和置信上限分别为

$$\overline{Y}-\overline{X}-t_{m+n-2}(\alpha)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}\qquad 和\qquad \overline{Y}-\overline{X}+t_{m+n-2}(\alpha)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{\lambda}{n}}$$

4. 有甲、乙两台机床加工同样的产品，分别从他们加工的产品中抽取若干个产品，测量各个产品的直径，计算得相关数据如下：

机床甲：$m=8$，$\bar{x}=30.97$，$S_1=36.7$

机床乙：$n=7$，$\bar{y}=21.99$，$S_2=8.1$

假设产品直径服从正态分布，求

(a) 这两台机床加工产品的平均直径之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】这是两个正态总体方差未知、小样本时均值差的置信区间. 其结果近似为

$$\overline{X}-\overline{Y}-S_*\cdot t_r\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \overline{X}-\overline{Y}+S_*\cdot t_r\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

其中

$$S_*^2=\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}$$

r 取最接近于

$$r=\frac{S_*^4}{\dfrac{S_1^4}{m^2(m-1)}+\dfrac{S_2^4}{n^2(n-1)}}$$

的整数. 由所给数据计算可得

$$s_*^2 = 177.7341$$

$$r = \frac{s_*^4}{\dfrac{s_1^4}{m^2(m-1)} + \dfrac{s_2^4}{n^2(n-1)}} = 7.772984 \approx 8$$

已知置信水平 $1-\alpha = 0.95$，计算得

$$\overline{x} - \overline{y} - s_* \cdot t_r\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -21.76294$$

$$\overline{x} - \overline{y} + s_* \cdot t_r\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 39.72294$$

故两台机床加工产品的平均直径之差的置信水平近似为 0.95 的置信区间为

$$[-21.76294,\ 39.72294]$$

计算的 R 代码如下：

```
rm(list = ls(all = TRUE)) # clear all variables
S2_star = 36.7^2 / 8 + 8.1^2 / 7
S2_star
r = S2_star^2 / (36.7^4 / (8^2 * (8-1)) + 8.1^4 / (7^2 * (7-1)))
r # 最接近r的整数为 8
Lower = 30.97 - 21.99 - qt(0.025, 8, lower.tail = FALSE) * sqrt(S2_star)
Lower # 置信区间左端点
Upper = 30.97 - 21.99 + qt(0.025, 8, lower.tail = FALSE) * sqrt(S2_star)
Upper # 置信区间右端点
```

(b) 这两台机床加工精度（即方差）之比的置信水平为 0.90 的置信区间. (2 分)

【解】 这是两个正态总体均值未知时方差比的置信区间，其结果为

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,\,n-1}\,(\alpha/2)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,\,n-1}\,(1-\alpha/2)}\right]$$

已知置信水平 $1-\alpha = 0.90$，算得

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,\,n-1}\,(\alpha/2)} = 4.880056$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{m-1,\,n-1}\,(1-\alpha/2)} = 79.36343$$

故这两台机床加工精度（即方差）之比的置信水平为 0.90 的置信区间为 [4.880056, 79.36343]. 计算的 R 代码如下：

```
Lower = (36.7^2 / 8.1^2) * (1 / qf(0.05, 8-1, 7-1, lower.tail = FALSE))
Lower # 置信区间左端点
Upper = (36.7^2 / 8.1^2) * (1 / qf(0.95, 8-1, 7-1, lower.tail = FALSE))
Upper # 置信区间右端点
```

5. 某学校计划组织一次大型活动，为此要了解学生对该活动的支持程度，随机地对 100 名学生进行了解，其中有 22 名支持者. 若记该校学生中支持这项活动的人数比例为 p，并假设该校学生人数足够多.

(a) 求 p 的置信系数为 0.99 的置信区间. (2 分)

【解】这是二项分布参数 p 大样本时的置信区间，其结果为

$$\left[\widehat{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}\,,\quad \widehat{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

已知 $n = 100$，$1-\alpha = 0.99$，$\sum\limits_{i=1}^{100} X_i = 22$，计算可得

$$\widehat{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}} = 0.1132972$$

$$\widehat{p} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}} = 0.3267028$$

所以 p 的置信系数为 0.99 的置信区间为 [0.1132972, 0.3267028]. 计算的 R 代码如下：

```
Lower = 22/100 - qnorm(0.005, 0, 1, lower.tail = FALSE) *
        sqrt((22/100) * (1 - 22/100) / 100)
Lower # 置信区间左端点
Upper = 22/100 + qnorm(0.005, 0, 1, lower.tail = FALSE) *
        sqrt((22/100) * (1 - 22/100) / 100)
Upper # 置信区间右端点
```

(b) 若只关心 p 的置信下限，求出置信系数为 0.95 的置信下限. (2 分)

【解】二项分布参数 p 大样本时的置信下限为：

$$\widehat{p} - u_{\alpha}\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}$$

已知 $n=100$，$1-\alpha=0.95$，$\sum\limits_{i=1}^{100} X_i=22$，计算可得

$$\widehat{p}-u_\alpha\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}=0.1518625$$

所以 p 的置信系数为 0.95 的单侧置信下限为 0.1518625. 计算的 R 代码如下：

```
Lower = 22/100 - qnorm(0.05, 0, 1, lower.tail = FALSE) *
        sqrt((22/100) * (1 - 22/100) / 100)
Lower # 单侧置信下限
```

6. 电话总机在单位时间内接到的呼唤次数服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$. 观察单位时间内呼唤次数 40 次，获得如下数据：

接到的呼唤次数	0	1	2	3	4	5	6	7
观察次数	5	10	12	8	3	2	0	0

求 λ 的置信水平近似为 0.95 的置信区间. (2 分)

【解】因为 $n=40$，所以可看做大样本时 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 参数的置信区间，其结果为

$$\left[\widehat{\lambda}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{n}},\quad \widehat{\lambda}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{n}}\right]$$

已知 $1-\alpha=0.95$，计算得

$$\widehat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1\times 10+2\times 12+3\times 8+4\times 3+5\times 2}{40}=2$$

$$\widehat{\lambda}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{n}}=1.561739$$

$$\widehat{\lambda}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\lambda}}{n}}=2.438261$$

故 λ 的置信水平近似为 0.95 的置信区间为 [1.561739, 2.438261]. 计算的 R 代码如下：

```
x = c(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
y = c(5, 10, 12, 8, 3, 2, 0, 0)
bar.lambda = sum(x*y) / sum(y) # 样本均值
bar.lambda
Lower = bar.lambda - qnorm(0.025, 0, 1, lower.tail = F) * sqrt(bar.lambda/40)
```

```
Lower # 置信区间左端点
Upper = bar.lambda + qnorm(0.025, 0, 1, lower.tail = F) * sqrt(bar.lambda/40)
Upper # 置信区间右端点
```

7. [选做（2 分）] 设$X_1,\dots,X_m$是自正态总体$N(a,\sigma_1^2)$抽取的简单样本，$Y_1,\dots,Y_n$是自正态总体$N(b,\sigma_2^2)$抽取的简单样本，且$X_1,\dots,X_m$和$Y_1,\dots,Y_n$独立。已知置信系数为$1-\alpha$，请将下列表格补充完整.

表 9.1: 两个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
$b-a$	σ_1^2,σ_2^2未知，$m=n$已知				
$b-a$	σ_1^2,σ_2^2已知				
$b-a$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知				
$b-a$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$未知，m和n充分大				
$b-a$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$未知，m和n不是充分大				
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a,b已知				
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a,b未知				

【解】

已知$X_1,\dots,X_m$ $i.i.d.$ $\sim$ $N(a,\sigma_1^2)$，$Y_1,\dots,Y_n$ $i.i.d.$ $\sim$ $N(b,\sigma_2^2)$，令$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2}{m-1}$，$S_2^2=\frac{\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar{Y})^2}{n-1}$分别为$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$的样本方差。令$S_a^2=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2}{m}$，$S_b^2=\frac{\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar{Y})^2}{n}$。
当$m=n$时，令$Z_i=Y_i-X_i$，$S_z^2=\sum_{i=1}^n(Z_i-\bar{Z})^2/(n-1)$。
当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$且未知时，令

$$S_w^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^n(Y_i-\bar{Y})^2\right]=\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}.$$

当$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$皆未知，且m,n都不是充分大的情形，令$S_*^2=\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}$，$T_*=\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{S_*}$，

$$r=S_*^4/\left[\frac{S_1^4}{m^2(m-1)}+\frac{S_2^4}{n^2(n-1)}\right].$$

表 9.2: 两个正态总体参数的置信区间

参数	条件	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
$b-a$	$m=n$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{Z}-(b-a))}{S_z}$	$\bar{Z} \pm \frac{S_z}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$	$\bar{Z} - \frac{S_z}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$	$\bar{Z} + \frac{S_z}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$
$b-a$	σ_1^2, σ_2^2已知	$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$\bar{Y}-\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} - u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} + u_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$
$b-a$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	$\bar{Y}-\bar{X} \pm S_w \cdot t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} - S_w \cdot t_{m+n-2}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} + S_w \cdot t_{m+n-2}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$
$b-a$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知，大样本	$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}}$	$\bar{Y}-\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} - u_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}$	$\bar{Y}-\bar{X} + u_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}$
$b-a$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知，小样本	$\frac{\bar{Y}-\bar{X}-(b-a)}{S_*}$	$\bar{Y}-\bar{X} \pm S_* \cdot t_r(\frac{\alpha}{2})$	$\bar{Y}-\bar{X} - S_* \cdot t_r(\alpha)$	$\bar{Y}-\bar{X} + S_* \cdot t_r(\alpha)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a,b已知	$\frac{S_a^2}{S_b^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$\left[\frac{S_a^2}{S_b^2}\frac{1}{F_{m,n}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{S_a^2}{S_b^2}\frac{1}{F_{m,n}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$	$\frac{S_a^2}{S_b^2}\frac{1}{F_{m,n}(\alpha)}$	$\frac{S_a^2}{S_b^2}\frac{1}{F_{m,n}(1-\alpha)}$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	a,b未知	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$	$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\alpha)}$	$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\alpha)}$

8. [选做（2 分）] 已知置信系数为$1-\alpha$，请将下列表格补充完整.

表 9.3: 非正态总体参数的置信区间

分布与条件	参数	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
指数分布$Exp(\lambda)$	λ				
均匀分布$U(0,\theta)$	θ				
二项分布$B(n,p)$ 大样本	p				
泊松分布$P(\lambda)$ 大样本	λ				

【解】

表 9.4: 非正态总体参数的置信区间

分布与条件	参数	枢轴变量	置信区间	置信下限	置信上限
指数$Exp(\lambda)$	λ	$2\lambda n\bar{X}$	$[\frac{\chi_{2n}^2(1-\frac{\alpha}{2})}{2n\bar{X}}, \frac{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}{2n\bar{X}}]$	$\frac{\chi_{2n}^2(1-\alpha)}{2n\bar{X}}$	$\frac{\chi_{2n}^2(\alpha)}{2n\bar{X}}$
均匀分布$U(0,\theta)$	θ	$\frac{X_{(n)}}{\theta}$	$\left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}\right]$	$\frac{X_{(n)}}{(1-\alpha)^{1/n}}$	$\frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}$
二项分布$B(n,p)$ 大样本	p	$\sqrt{n}\frac{(\bar{X}-p)}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}$	$\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$	$\bar{X}-u_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$	$\bar{X}+u_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}$
泊松分布$Poisson(\lambda)$ 大样本	λ	$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\lambda}{\sqrt{\bar{X}}}$	$\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}, \bar{X}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}\right]$	$\bar{X}-u_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$	$\bar{X}+u_{\alpha}\sqrt{\frac{\bar{X}}{n}}$

Chapter 10

第 10 周课后作业参考答案

1. 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_{20})$ 为从两点分布总体 $b(1, p)$ 中抽取的简单随机样本，对未知参数 p 的检验问题为 $H_0: p = 0.2 \longleftrightarrow H_1: p \neq 0.2$，取检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7 \text{ 或 } \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求此检验函数在 $p = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1.0$ 时的功效函数. (2 分)

【解】因为 $X_i \sim b(1, p)$ 且相互独立，所以 $\sum_{i=1}^{20} X_i \sim b(20, p)$. 于是，功效函数

$$\begin{aligned}
\beta_\varphi(p) = E[\varphi(\boldsymbol{x})] &= P\left(\sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7\right) + P\left(\sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1\right) \\
&= \sum_{k=7}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k} + \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20} + \binom{20}{1} p(1-p)^{19} \\
&= 1 - \sum_{k=2}^{6} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}
\end{aligned}$$

p	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\beta_\varphi(p)$	1.0000	0.3941331	0.1558678	0.3996274	0.7505134	0.9423609
p	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$\beta_\varphi(p)$	0.9935345	0.9997390	0.9999982	1.0000	1.0000	

功效函数在 $p = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1.0$ 时的值可用以下 R 代码计算：

```
p = seq(0, 1, length.out = 11)
```

```
beta = c()
for (i in 1:length(p)) {
  P = 0
  for (k in 2:6) P = P + dbinom(k, 20, p[i])
  beta[i] = 1 - P
}
beta
```

(b) 利用 R 作功效函数的图形. (2 分)

【解】功效函数如图 10.1 所示，作图的代码如下：

```
f = function(p = 0.1){
  P = 0
  for (k in 2:6) P = P + dbinom(k, 20, p)
  1 - P
}
curve(f, 0, 1, xlim = c(0, 1), ylim = c(0, 1),
      axes = F, xlab = "", ylab = "", lwd = 3)
abline(h = 0, v = 0, lty = 2, col = "brown")
axis(1)
axis(2)
```


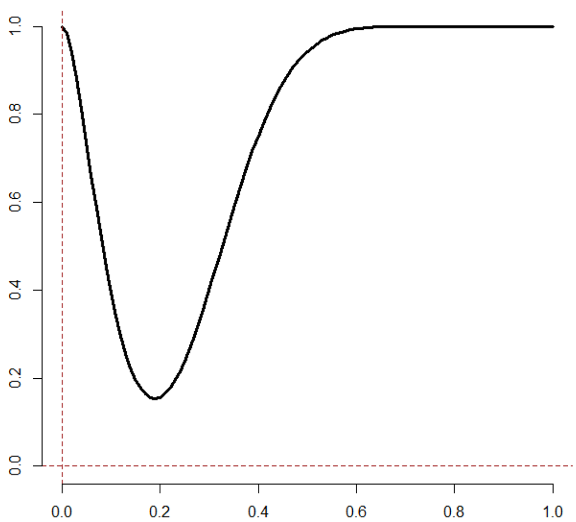

图 10.1: 两点分布参数 p 的假设检验的功效函数

(c) 求检验的水平 α 和 $p=0.10$ 时犯第 II 类错误的概率. (2 分)

【解】检验的水平为

$$\alpha=\beta_{\varphi}(0.2)=0.1558678$$

$p=0.10$ 时犯第 II 类错误的概率为

$$1-\beta_{\varphi}(0.10)=1-0.3941331=0.6058669$$

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 9)$，其中 μ 为未知参数，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值. 如果检验问题 $H_0: \mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0$ 的否定域为

$$\left\{(X_1, X_2, \ldots, X_n): \left|\overline{X}-\mu_0\right|\geq c\right\}.$$

(a) 确定常数 c，使检验水平 $\alpha=0.05$. (2 分)

【解】根据定义，检验水平为

$$\alpha=P\,(\text{拒绝 } H_0 \,|\, H_0\text{真})=P\left(|\overline{X}-\mu_0|\geq c \,|\, \mu=\mu_0\right)$$

因为 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 9)$，所以

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\mu, \frac{9}{n}\right)$$

当 H_0 真时有

$$\overline{X}\sim N\left(\mu_0, \frac{9}{n}\right) \implies \frac{\overline{X}-\mu_0}{3/\sqrt{n}}\sim N(0, 1)$$

于是有

$$\alpha=P\left(|\overline{X}-\mu_0|\geq c \,|\, \mu=\mu_0\right)=P\left(\frac{|\overline{X}-\mu_0|}{3/\sqrt{n}}\geq\frac{c\sqrt{n}}{3}\,\middle|\,\mu=\mu_0\right)=0.05$$

所以

$$\frac{c\sqrt{n}}{3}=u_{0.025} \implies c=\frac{3\,u_{0.025}}{\sqrt{n}}=\frac{5.879892}{\sqrt{n}}$$

(b) 求此检验的功效函数 $\beta(\mu)$. (2 分)

【解】检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & |\overline{X}-\mu_0|\geq c\\ 0, & |\overline{X}-\mu_0|<c\end{cases}$$

已知$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, 9)$，所以

$$\overline{X}\sim N\left(\mu, \frac{9}{n}\right) \implies \frac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{n}}\sim N(0, 1)$$

因此检验的功效函数为

$$\begin{aligned}
\beta_\varphi(\mu) &= E[\varphi(\boldsymbol{X})] = P\left(|\overline{X}-\mu_0| \geq c\right) = P\left(\overline{X} \leq \mu_0 - c\right) + P\left(\overline{X} \geq \mu_0 + c\right) \\
&= P\left(\overline{X}-\mu \leq \mu_0 - \mu - c\right) + P\left(\overline{X}-\mu \geq \mu_0 - \mu + c\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{n}} \leq \frac{\mu_0-\mu-c}{3/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0-\mu+c}{3/\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu-c}{3/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu+c}{3/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

(c) 固定样本容量 $n=25$，分析犯两类错误概率 α 和 β 之间的关系. (2 分)

【解】 当 $n=25$ 时，犯两类错误的概率为

$$\alpha = \begin{cases} \beta_\varphi(\mu), & \mu = \mu_0 \\ 0, & \mu \neq \mu_0 \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} 0, & \mu = \mu_0 \\ 1-\beta_\varphi(\mu), & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta_\varphi(\mu_0) &= \Phi\left(-\frac{5c}{3}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{5c}{3}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{5c}{3}\right) \\
1-\beta_\varphi(\mu) &= \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu+c}{3/5}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu-c}{3/5}\right)
\end{aligned}$$

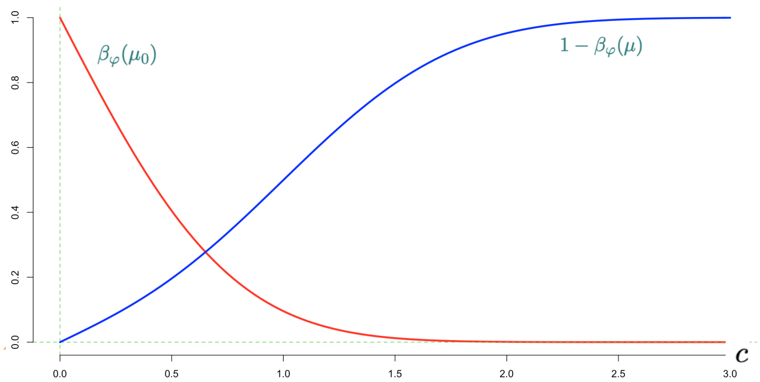

图 10.2: $n=25$ 时正态总体均值假设检验的功效函数

由图 10.2 可以看出，犯第 I 类错误的概率 $\beta_\varphi(\mu_0)$ 越大，则 c 较小，此时犯第 II 类错误的概率 $1-\beta_\varphi(\mu)$ 较小. 如果犯第 I 类错误的概率 $\beta_\varphi(\mu_0)$ 越小，则 c 较大，此时犯第 II 类错误的概率 $1-\beta_\varphi(\mu)$ 较大.

3. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0, \theta)$，其中 θ 为未知参数， $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. 对检验问题 $H_0: \theta \leq \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$，取检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} \geq c \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数，并证明它是 θ 的单调递增函数. (2 分)

【解】总体 $X \sim U(0,\ \theta)$ 的概率密度函数和分布函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & 其它 \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

因此 $X_{(n)} = \max\{X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\}$ 的概率密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(t) = n[F_X(t)]^{n-1} f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{nt^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < t < \theta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

于是，检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数为

$$\beta_\varphi(\theta) = E[\varphi(\boldsymbol{X})] = P\left(X_{(n)} > c\right) = \int_c^{+\infty} f_{X_{(n)}}(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & c \le 0 \\ \displaystyle\int_c^\theta \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}t, & 0 < c < \theta \\ 0, & c \ge \theta \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & c \le 0 \\ 1 - \left(\dfrac{c}{\theta}\right)^n, & 0 < c < \theta \\ 0, & c \ge \theta \end{cases}$$

当 $0 < c < \theta$ 时，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\beta_\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{nc^n}{\theta^{n+1}} > 0$$

所以功效函数 $\beta_\varphi(\boldsymbol{x})$ 是 θ 的单调递增函数.

(b) 在检验问题 $H_0:\ \theta \le \dfrac{1}{2} \longleftrightarrow H_1:\ \theta > \dfrac{1}{2}$ 中，选择什么样的 c 使检验水平恰好为 0.05? (2 分)

【解】 检验水平 $\alpha = \sup\{\beta_\varphi(\theta),\ \theta \in \Theta_0\}$，这里 $\Theta_0 = \{\theta,\ \theta \le \frac{1}{2}\}$. 而 $\beta_\varphi(\theta)$ 是 θ 的单调增函数，所以当检验水平恰好为 0.05 时就有，

$$\alpha = \sup\{\beta_\varphi(\theta),\ \theta \in \Theta_0\} = \beta_\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (2c)^n = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{\sqrt[n]{0.95}}{2}$$

(c) 画出 $n = 20$ 时 (b) 中指定的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数的图形 (用 R 作图). (2 分)

【解】 当 $n=20$ 时，$c=\dfrac{\sqrt[20]{0.95}}{2}=0.4987193$，此时检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数为

$$\beta_\varphi(\theta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\sqrt[n]{0.95}}{2\theta}\right)^{20}, & \theta>0.4987193\\ 0, & \theta\le 0.4987193\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-\dfrac{0.95}{(2\theta)^{20}}, & \theta>0.4987193\\ 0, & \theta\le 0.4987193\end{cases}$$

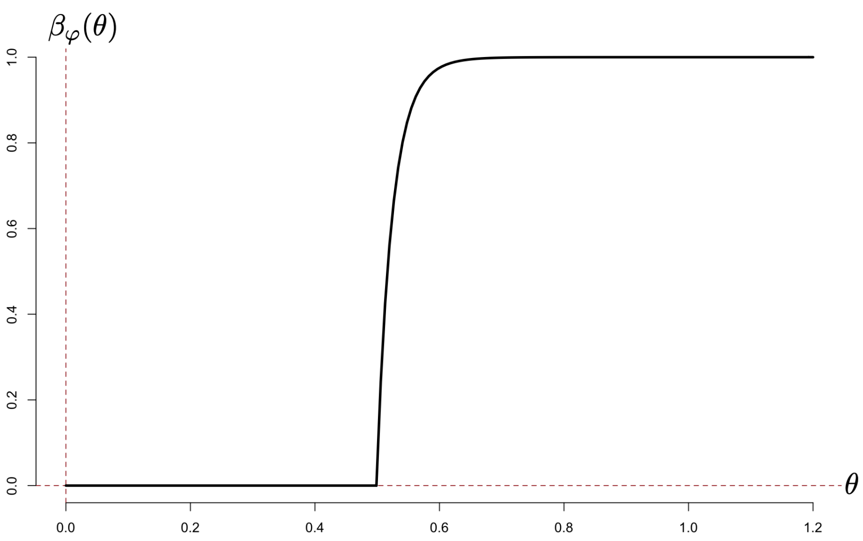

图 10.3: $n=25$ 时正态总体均值假设检验的功效函数

功效函数如图 10.3 所示，作图的 R 代码如下

```
f = function(x) 1 - 0.95/((2*x)^(20))
curve(f, 0.4987193, 1.2, xlim = c(0, 1.2), ylim = c(0, 1), axes = FALSE,
      xlab = "", ylab = "", lwd = 3)
lines(c(0, 0.4987193), c(0, 0), lwd = 3)
axis(1)
axis(2)
abline(h = 0, v = 0, lty = 2, col = "brown")
```

(d) n 取多大，能使 (b) 中指定的检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，当 $\theta=\dfrac{3}{4}$ 时的功效（即功效函数在 Θ_1 中某一点的值）为 0.98? (2 分)

【解】由于检验函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数为

$$\beta_\varphi(\theta)=\begin{cases}1, & c\le 0\\ 1-\dfrac{0.95}{(2\theta)^n}, & 0<c<\theta\\ 0, & c\ge\theta\end{cases}$$

其中的 $c=\dfrac{\sqrt[n]{0.95}}{2}$. 当 $\theta=\dfrac{3}{4}$ 时，为使其功效为 0.98，则有

$$1-\frac{0.95}{\left(2\times\dfrac{3}{4}\right)^n}=0.98 \Longrightarrow n=9.521731$$

所以取 $n=10$ 可以使 $\theta=\dfrac{3}{4}$ 时的功效为 0.98.

4. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ 为取自 Poisson 分布 $P(\lambda)$ 的简单随机样本.

(a) 用直观方法求单边假设检验问题 $H_0:\ \lambda\le 0.1 \longleftrightarrow H_1:\ \lambda>0.1$ 的水平为 $\alpha=0.05$ 的检验. (2 分)

【解】Poisson 分布 $P(\lambda)$ 参数 λ 的 MLE 为

$$\hat{\lambda}=\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i$$

对于假设检验问题

$$H_0:\ \lambda\le 0.1 \longleftrightarrow H_1:\ \lambda>0.1$$

当 H_0 真时，由于 $\bar{X}$ 估计的是一个比 0.1 小的值 λ，此时 $\bar{X}-0.1$ 取值应小于零或略大于零，因此当 $\bar{X}-0.1$ 取值远远大于零时倾向于否定 H_0，所以 H_0 的否定域具有形式 $\bar{X}-0.1>c$，即 $\bar{X}>c+0.1$，亦即

$$\sum_{i=1}^{10}X_i>10c+1$$

从而有检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \sum\limits_{i=1}^{10}X_i>10c+1\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{10}X_i\le 10c+1\end{cases}$$

根据 Poisson 分布的性质我们知道 $\sum\limits_{i=1}^{10}X_i$ 还服从 Poisson 分布，且参数为 10λ，于是该检验函

数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的功效函数为

$$\beta_\varphi(\lambda) = E[\varphi(\boldsymbol{X})] = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 10c+1\right) = \sum_{k=10c+2}^{\infty} \frac{(10\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-10\lambda}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\beta_\varphi(\lambda) = \mathrm{e}^{-10\lambda} \sum_{k=10c+2}^{\infty} \frac{10\cdot(10\lambda)^{k-1}}{k!}(k-10\lambda)$$

当 $\lambda \in \Theta_0 = \{\lambda,\ \lambda \le 0.1\}$ 时，上式中 $k > 1$，$10\lambda \le 1$，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\beta_\varphi(\lambda) > 0$，说明在 $\lambda \in \Theta_0$ 中功效函数 $\beta_\varphi(\lambda)$ 单调递增，因此检验水平

$$\alpha = \sup\{\beta_\varphi(\lambda),\ \lambda \in \Theta_0\} = \beta_\varphi(0.1) = \sum_{k=10c+2}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot \mathrm{e}^{-1} = 1 - \sum_{k=0}^{10c+1} \frac{1}{k!}\cdot \mathrm{e}^{-1}$$

欲使检验水平 $\alpha = 0.05$，则有

$$1 - \sum_{k=0}^{10c+1} \frac{1}{k!}\cdot \mathrm{e}^{-1} \le 0.05 \implies \sum_{k=0}^{10c+1} \frac{1}{k!} \ge 0.95\cdot \mathrm{e} = 2.582368 \implies c \ge 0.2$$

故单边假设检验问题 $H_0:\ \lambda \le 0.1 \longleftrightarrow H_1:\ \lambda > 0.1$ 的水平为 $\alpha = 0.05$ 的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{10} X_i > 3 \\ 0, & \sum_{i=1}^{10} X_i \le 3 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \bar{X} > 0.3 \\ 0, & \bar{X} \le 0.3 \end{cases}$$

(b) 求此检验的功效函数 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda = 0.05,\ 0.2,\ 0.3,\ \ldots,\ 0.9$ 时的值，并利用 R 画出 $\beta(\lambda)$ 的图形. (2 分)

【解】上述检验的功效函数为

$$\beta_\varphi(\lambda) = \sum_{k=10\times 0.2+2}^{\infty} \frac{(10\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-10\lambda} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(10\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-10\lambda} = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{(10\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-10\lambda}$$

功效函数如图 10.4 所示，计算与作图的代码如下

```
f = function(x=0.1) 1 - (1 + 10*x + (10*x)^2/2 + (10*x)^3/6 ) * exp(-10*x)
f(0.05)
y = seq(0.2, 0.9, 0.1)
f(y)
curve(f, 0, 1.2, axes = F, xlab = "", ylab = "", lwd = 3)
abline(h = 0, v = 0, lty = 2, col = "brown")
axis(2)
axis(1)
```

λ	0.05	0.2	0.3	0.4	0.5
$\beta_\varphi(\lambda)$	0.001751623	0.1428765	0.3527681	0.5665299	0.7349741
λ	0.6	0.7	0.8	0.9	
$\beta_\varphi(\lambda)$	0.8487961	0.9182346	0.9576199	0.9787735	

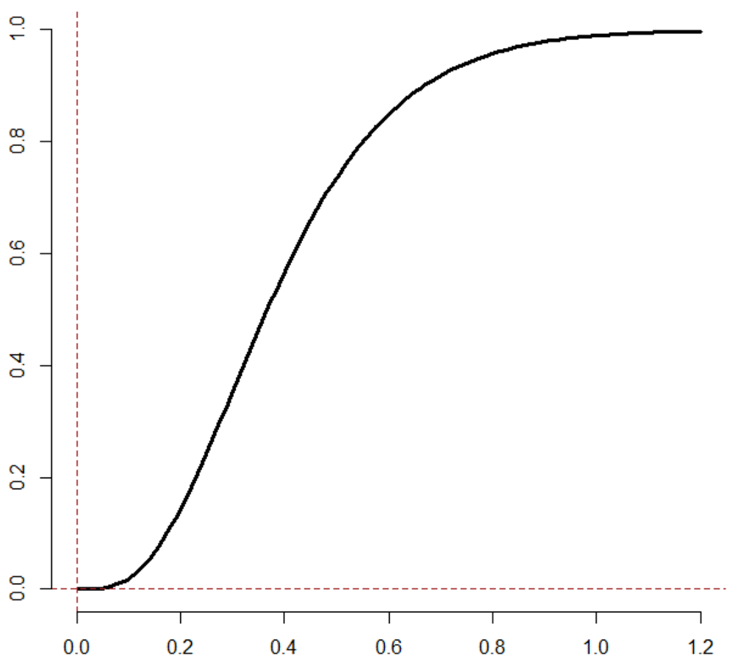

图 10.4: Poisson 分布参数假设检验的功效函数

5. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知. 给定检验水平为 α.

(a) 确定单边假设检验问题

$$H_0:\ \mu \geq \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1:\ \mu < \mu_0$$

的决策规则. (2 分)

【解】这是单正态总体方差未知时均值的单边假设检验问题，我们知道，样本均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

是总体均值 μ 的无偏估计量，且

$$\overline{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

又因为方差 σ^2 未知，但是样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

是总体方差的无偏估计量，并且 S^2 与 $\overline{X}$ 独立，

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

因此

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

当 $H_0 : \mu \geq \mu_0$ 为真时，统计量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 的取值应大于零或者稍小于零，所以当 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 的取值远远小于零时我们会拒绝 H_0，即 H_0 的拒绝域具有形式

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < c.$$

当 H_0 真时，如果 $\mu = \mu_0$，此时我们有

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

欲使检验犯第 I 类错误的概率不超过给定的水平 α，则有

$$\mathbb{P}(\text{拒绝 } H_0 | \, H_0 \text{ 真}) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < c \,\middle|\, \mu = \mu_0\right) \leq \alpha$$

由 t_{n-1} 分布的上侧 α 分位数的定义知，可取 $c = t_{n-1}(1-\alpha) = -t_{n-1}(\alpha)$. 当 H_0 真时，如果 $\mu > \mu_0$，此时我们知道

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

于是，上述拒绝域犯第 I 类错误的概率则为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\,(\text{拒绝 } H_0 |\, H_0 \text{ 真}) &= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha) \,\middle|\, \mu > \mu_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu+\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha) \,\middle|\, \mu > \mu_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha) - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu > \mu_0\right) \\
&\downarrow \qquad \mu > \mu_0 \quad \Longrightarrow \quad -t_{n-1}(\alpha) - \frac{\mu-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha). \\
&\leq \alpha
\end{aligned}
$$

因此，单边假设检验问题

$$
H_0:\ \mu \geq \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1:\ \mu < \mu_0
$$

的检验函数为

$$
\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{n-1}(\alpha) \\ 0, & \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq -t_{n-1}(\alpha) \end{cases}
$$

(b) 确定单边假设检验问题

$$
H_0:\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1:\ \sigma^2 > \sigma_0^2
$$

的决策规则. (2 分)

【解】这是单正态总体均值未知时方差的单边假设检验问题，我们知道

$$
S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2
$$

是总体方差的无偏估计量，并且

$$
\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.
$$

当 $H_0:\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ 为真时，统计量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的取值应小于 $n-1$ 或者稍大于 $n-1$，所以当 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的取值远远大于$n-1$ 时我们会拒绝 H_0. 即 H_0 的拒绝域具有形式:

$$
\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c.
$$

当 H_0 为真时，如果 $\sigma^2 = \sigma_0^2$，我们则有

$$
\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.
$$

为使检验犯第一类错误的概率不超过给定的水平 α，则有

$$\mathbb{P}(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 真}) = \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c \middle| \sigma^2 = \sigma_0^2\right) \le \alpha$$

利用 χ^2 分布上侧 α 分位数的定义知，可取 $c = \chi_{n-1}^2(\alpha)$.

当 H_0 为真时，如果 $\sigma^2 < \sigma_0^2$，此时我们知道

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

于是，上述拒绝域犯第一类错误的概率则为

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 真}) &= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha) \middle| \sigma^2 < \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha) \middle| \sigma^2 < \sigma_0^2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha) \cdot \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \middle| \sigma^2 < \sigma_0^2\right) \\
&\downarrow \qquad \sigma^2 < \sigma_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} > 1 \\
&\le \alpha
\end{aligned}$$

因此，单边假设检验问题

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha) \\ 0, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{n-1}^2(\alpha) \end{cases}$$

6. 根据长期经验和资料分析，某砖瓦厂生产的砖的抗断强度 X 服从方差为 σ^2 的正态分布，今从该厂所生产的一批砖中随机抽取 6 块，测得抗断强度 (单位：kg/cm^2) 如下:

$$32.56,\ 29.66,\ 31.64,\ 30.00,\ 31.87,\ 31.03$$

问这一批砖的平均抗断强度可否认为是 32.50 kg/cm^2? ($\alpha = 0.05$). (2 分)

【解】检验问题为

$$H_0: \mu = 32.50 \longleftrightarrow H_1: \mu \ne 32.50$$

该问题是方差未知时正态总体均值的双边检验问题，检验函数

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1}(\alpha/2) \\ 0, & \dfrac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} \le t_{n-1}(\alpha/2) \end{cases}$$

已知 $n=6$，$\mu_0=32.50$，$\alpha=0.05$，计算得 $\bar{x}=31.12667$，$s=1.122527$，$t_5(0.025)=2.570582$，检验统计量取值

$$\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}} = \frac{|31.12667-32.50|}{1.122527/\sqrt{6}} = 2.996772 > 2.570582 = t_5(0.025)$$

结论：检验水平 $\alpha=0.05$ 时否定 H_0，即认为这一批砖的平均抗断强度不等于 32.50 kg/cm^2.

7. 测定某种溶液中的水分，它的 10 个测定值给出 $\overline{x}=0.452\%$，$s=0.037\%$，假设测定值总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，取显著性水平 $\alpha=0.05$，检验

(a) $H_0:\mu\le 0.5\% \quad\longleftrightarrow\quad H_1:\mu>0.5\%$. (2 分)

【解】这是正态总体方差未知时，关于总体均值的单边假设检验问题，检验统计量为

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

H_0 的否定域为

$$D=\left\{(X_1,\ldots,X_n)\,\middle|\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}>t_{n-1}(\alpha)\right\}$$

已知 $n=10$，$\overline{x}=0.452$，$\mu_0=0.5$，$s=0.037$，$\alpha=0.05$，查表得 $t_9(0.05)=1.833113$，计算得检验统计量的值为

$$T=\frac{0.452-0.5}{0.037/\sqrt{10}}=-4.102414$$

因为检验统计量的值

$$T=-4.102414<-1.833113=-t_{n-1}(\alpha)$$

所以，在检验的显著水平 $\alpha=0.05$ 时，我们不拒绝 H_0，即，认为溶液中的水分含量不超过 0.5%.

(b) $H_0:\sigma\ge 0.04\% \quad\longleftrightarrow\quad H_1:\sigma<0.04\%$. (2 分)

【解】这是正态总体均值未知时，关于总体方差的单边假设检验问题，检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$$

H_0 的否定域为

$$D=\left\{(X_1,\ldots,X_n)\,\middle|\,\chi^2=\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{n-1}(1-\alpha)\right\}$$

已知 $n=10$，$\sigma_0=0.04$，$s=0.037$，$\alpha=0.05$，查表得 $\chi^2_9(0.95)=3.325113$，计算得检验统计

量的值为

$$\chi^2 = \frac{9 \times 0.037^2}{0.04^2} = 7.700625$$

因为检验统计量的值

$$\chi^2 = 7.700625 > 3.325113 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha)$$

所以，在检验的显著水平 $\alpha = 0.05$ 时，我们不拒绝 H_0，即，认为其标准差不低于 0.04%.

Chapter 11

第 11 周课后作业参考答案

1. 有甲乙两台机床加工同样产品，从这两台机床加工的产品中随机抽取若干产品，测得产品直径（单位：mm）为

   机床甲：20.5, 29.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

   机床乙：19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

   假定产品直径服从正态分布，且两者方差相同，试比较甲乙两台机床加工的质量有无显著差异 ($\alpha = 0.05$)？(2 分)

   【解】 设甲机床加工的零件长度的样本为 $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_8$ i.i.d. $\sim N(\mu_1,\ \sigma^2)$，乙机床加工的零件长度的样本为 $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_7$ i.i.d. $\sim N(\mu_2,\ \sigma^2)$，检验问题为

   $$H_0:\ \mu_2 - \mu_1 = 0 \longleftrightarrow H_1:\ \mu_2 - \mu_1 \neq 0$$

   这是两个正态总体方差未知但相等时，均值差的双边假设检验，检验函数为

   $$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\left|\bar{Y} - \bar{X}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} > t_{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 0, & \dfrac{\left|\bar{Y} - \bar{X}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \leq t_{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

   已知 $m = 8,\ n = 7,\ \alpha = 0.05$，计算得

   $$\begin{aligned} &\bar{x} = 21.175,\ \ \bar{y} = 20.000,\ \ s_1^2 = 12.35929,\ \ s_2^2 = 0.3966667 \\ &s_w^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} = 6.838077,\ \ t_{13}(0.025) = 2.160369 \\ &\frac{\left|\bar{Y} - \bar{X}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} = 0.868199 \end{aligned}$$

因为 $0.868199 < 2.160369$，所以检验水平 $\alpha = 0.05$ 时接受 $H_0: \mu_2 - \mu_1 = 0$，认为甲乙两台机床加工的质量无显著差异.

2. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ 是取自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ 是取自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，且两样本相互独立，其中 μ_1, μ_2, σ^2 均未知. 在检验水平为 α 时，确定单边假设检验问题

$$H_0: \mu_2 - \mu_1 \geq \mu_0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1: \mu_2 - \mu_1 < \mu_0$$

的决策规则. (2 分)

【解】这是两个正态总体方差未知但相等时均值差的单边假设检验问题，由

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{m}\right), \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

并且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，可知

$$\overline{Y} - \overline{X} \sim N\left(\mu_2 - \mu_1, \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\sigma^2\right)$$

又因为

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 \Longrightarrow \frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2 \Longrightarrow \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

并且 S_1^2 与 S_2^2 相互独立，可知

$$\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m+n-2}$$

记

$$S_w^2 \triangleq \frac{1}{m+n-2}\left[(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2\right]$$

则有

$$\frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m+n-2}$$

于是可得

$$\frac{\dfrac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2} \cdot \dfrac{1}{m+n-2}}} = \frac{\overline{Y} - \overline{X} - (\mu_2 - \mu_1)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}$$

当 H_0：$\mu_2-\mu_1\geq\mu_0$ 为真时，变量

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

的取值应大于 0 或者稍小于 0，所以当它的取值远远小于 0 时我们会拒绝 H_0. 即 H_0 的拒绝域具有形式：

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<c$$

当 H_0 为真时，如果 $\mu_2-\mu_1=\mu_0$，我们则有

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t_{m+n-2}$$

为使检验犯第一类错误的概率不超过给定的水平 α，则有

$$P\left(\text{拒绝 } H_0|\, H_0 \text{ 真}\right)=P\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<c\,\middle|\,\mu_2-\mu_1=\mu_0\right)\leq\alpha$$

利用 t 分布上侧 α 分位数的定义知，可取 $c=t_{m+n-2}(1-\alpha)=-t_{m+n-2}(\alpha)$.

当 H_0 为真时，如果 $\mu_2-\mu_1>\mu_0$，此时我们知道

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(\mu_2-\mu_1)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t_{m+n-2}$$

于是，上述拒绝域犯第一类错误的概率则为

$$\begin{aligned}
P\left(\text{拒绝 } H_0|\, H_0 \text{ 真}\right)&=P\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{m+n-2}(\alpha)\,\middle|\,\mu_2-\mu_1>\mu_0\right)\\
&=P\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(\mu_2-\mu_1)+(\mu_2-\mu_1)-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{m+n-2}(\alpha)\,\middle|\,\mu_2-\mu_1>\mu_0\right)\\
&=P\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(\mu_2-\mu_1)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}+\frac{(\mu_2-\mu_1)-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{m+n-2}(\alpha)\,\middle|\,\mu_2-\mu_1>\mu_0\right)\\
&=P\left(\frac{\overline{Y}-\overline{X}-(\mu_2-\mu_1)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{m+n-2}(\alpha)-\frac{(\mu_2-\mu_1)-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\,\middle|\,\mu_2-\mu_1>\mu_0\right)\\
&\downarrow\qquad \mu_2-\mu_1>\mu_0\quad\Longrightarrow\quad\frac{(\mu_2-\mu_1)-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}>0\\
&\leq\alpha
\end{aligned}$$

因此，单边假设检验问题

$$H_0:\ \mu_2-\mu_1\geq\mu_0 \quad\longleftrightarrow\quad H_1:\ \mu_2-\mu_1<\mu_0$$

的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1, & \dfrac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{m+n-2}\\[3ex] 0, & \dfrac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\geq-t_{m+n-2}\end{cases}$$

其中

$$S_w^2\triangleq\frac{1}{m+n-2}\left[(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2\right]$$

3. 两台机床加工同一零件，分别取 6 个和 9 个零件，测量其长度 $X_i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$ 和 $Y_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$ 后算得

$$Q_1^2=\sum_{i=1}^{6}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=1.725\,,\quad Q_2^2=\sum_{j=1}^{9}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2=2.856$$

若零件长度服从正态分布，问是否可以认为两台机床加工的零件的方差无显著差异 $(\alpha=0.02)$？(2 分)

【解】这是两个正态总体方差的假设检验，检验问题为

$$H_0:\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=1\longleftrightarrow H_1:\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\neq1$$

检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\begin{cases}1, & \dfrac{S_2^2}{S_1^2}<F_{n-1,\ m-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)\ \text{或}\ >F_{n-1,\ m-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\\[3ex] 0, & F_{n-1,\ m-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\leq\dfrac{S_2^2}{S_1^2}\leq F_{n-1,\ m-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\end{cases}$$

已知 $m=6,\ n=9,\ \alpha=0.02$，计算得

$$\begin{aligned}s_1^2&=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1.725}{5}=0.345\\ s_2^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2=\frac{2.856}{8}=0.357\\ \frac{s_2^2}{s_1^2}&=1.034783\,,\quad F_{8,\ 5}\left(1-\frac{0.02}{2}\right)=0.1507881\,,\quad F_{8,\ 5}\left(\frac{0.02}{2}\right)=10.28931\end{aligned}$$

因为 $0.1507881<1.034783<10.28931$，所以检验水平 $\alpha=0.02$ 时接受 H_0，即可以认为两台机床加工的零件的方差无显著差异.

4. 为研究矽肺患者功能的变化情况，某医院对 I、II 期矽肺患者各 33 名测定其肺活量，得到 I 期患者

的平均数为 2710 ml，标准差为 147 ml， II 期患者的平均数为 2830 ml，标准差为 118 ml，对水平 $\alpha = 0.10$，问第 I、II 期患者的肺活量有无显著差异（假定肺活量服从正态分布）. (2 分)

【解】这是两个正态总体均值差的双边检验问题，但是没有两个正态总体的方差是否相等的条件，由于两个正态总体的样本标准差分别为 $s_1 = 147$ 和 $s_2 = 118$，因为其差异不大，所以我们先来检验

$$H_0:\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \longleftrightarrow H_1:\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1$$

该问题的检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_2^2}{S_1^2} < F_{n-1,\ m-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \text{ 或 } > F_{n-1,\ m-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 0, & F_{n-1,\ m-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \le \dfrac{S_2^2}{S_1^2} \le F_{n-1,\ m-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

已知 $m = n = 33,\ \alpha = 0.10$，计算得

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} = 0.6443611\,,\ F_{32,\ 32}\left(1 - \frac{0.10}{2}\right) = 0.5541758\,,\ F_{32,\ 32}\left(\frac{0.10}{2}\right) = 1.804482$$

因为 $0.5541758 < 0.6443611 < 1.804482$，所以检验水平 $\alpha = 0.10$ 时接受 H_0，即认为两个正态总体的方差相等. 再来讨论检验问题

$$H_0:\ \mu_2 - \mu_1 = 0 \longleftrightarrow H_1:\ \mu_2 - \mu_1 \neq 0$$

这是两个正态总体在方差未知但相等时关于均值差的检验问题，检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\left|\overline{Y} - \overline{X}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} > t_{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 0, & \dfrac{\left|\overline{Y} - \overline{X}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} \le t_{m+n-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

已知 $\bar{x} = 2710,\ \bar{y} = 2830$，计算得

$$s_w^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2} = 17766.5\,,\ \frac{|\bar{y} - \bar{x}|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}} = 3.656977\,,\ t_{64}(0.05) = 1.669013$$

因为 $3.656977 > 1.669013$，所以检验水平 $\alpha = 0.10$ 时拒绝 H_0，即认为第 I、II 期患者的肺活量有显著差异.

5. 在 10 块土地上同时种植甲、乙两个品种的农作物，假定每种农作物的产量服从正态分布，收获后计

算得农作物产量的样本均值和样本标准差为:

$$\bar{X}=30.97,\ \ \bar{Y}=21.79,\ \ S_x=26.7,\ \ S_y=10.1$$

问这两种农作物的产量有无显著差异 $(\alpha=0.02)$? (2 分)

【解】 这是两个正态总体均值差的双边检验问题

$$H_0:\ \mu_2-\mu_1=0 \longleftrightarrow H_1:\ \mu_2-\mu_1\neq 0$$

由于 $S_x=26.7,\ S_y=10.1$ 差异较大，所以属于方差未知且不等的情形，由于样本容量 $m=n=10$ 较小，所以采用 Behrens-Fisher 小样本方法的近似解，其检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\begin{cases}1, & \dfrac{|\overline{Y}-\overline{X}|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{m}+\dfrac{S_2^2}{n}}}>t_r\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\\[2ex] 0, & \dfrac{|\overline{Y}-\overline{X}|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{m}+\dfrac{S_2^2}{n}}}\leq t_r\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\end{cases}$$

已知 $\overline{x}=30.97,\ \overline{y}=21.79,\ \alpha=0.02$，计算得

$$r=\frac{\left(\dfrac{s_x^2}{m}+\dfrac{s_y^2}{n}\right)^2}{\dfrac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\dfrac{s_y^4}{n^2(n-1)}}=11.524\approx 12$$

$$\frac{|\overline{Y}-\overline{X}|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{m}+\dfrac{S_2^2}{n}}}=1.016929\,,\quad t_{12}(0.01)=2.680998$$

因为 $1.016929<2.680998$，所以检验水平 $\alpha=0.02$ 时接受 H_0，即认为这两种农作物的产量无显著差异.

6. 为了确定肥料的效果，取 1000 株植物做试验，在没有施肥的 100 株植物中有 53 株长势良好，在已施肥的 900 株中，则有 783 株长势良好，问施肥的效果是否显著 $(\alpha=0.01)$? (2 分)

【解】这是两个二项分布总体参数的大样本检验问题，设没有施肥的样本为

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m\ \text{i.i.d.}\sim b(1,\ p_1)$$

已施肥的样本为

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n\ \text{i.i.d.}\sim b(1,\ p_2)$$

检验问题为

$$H_0:\ p_2-p_1\leq 0 \longleftrightarrow H_1:\ p_2-p_1>0$$

记

$$\hat{p} = \frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + \sum_{j=1}^{n} Y_j\right)$$

检验函数为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} > u_\alpha \\ 0, & \overline{Y}-\overline{X}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}} \leq u_\alpha \end{cases}$$

已知 $m = 100$，$n = 900$，$\alpha = 0.01$，$\sum\limits_{i=1}^{m} X_i = 53$，$\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j = 783$，计算得

$$\hat{p} = \frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \frac{53+783}{1000} = 0.836$$

$$\bar{x} = 0.53, \quad \bar{y} = 0.87$$

$$\frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} = 8.711142, \quad u_{0.01} = 2.326348$$

因为 $8.711142 > 2.326348$，所以检验水平 $\alpha = 0.01$ 时拒绝 H_0，即认为施肥的效果显著.

7. 设有两工厂生产同一种产品，为了检验它们的次品率 p_1 与 p_2 是否相同，在第一、第二工厂的产品中各自独立抽取了 $n_1 = 1500$ 个以及 $n_2 = 1800$ 个，经检测分别有次品 300 个以及320 个，问在 5% 的水平上，可否认为两工厂产品的次品率相同. (2 分)

【解】这是两个二项分布的大样本检验问题，设工厂一的样本 X_1，X_2，…，X_{n_1} 来自总体 $X \sim b(1,\ p_1)$，工厂二的样本 Y_1，Y_2，…，Y_{n_2} 来自总体 $Y \sim b(1,\ p_2)$，则要检验的假设为

$$H_0;\ p_2 - p_1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad H_1;\ p_2 - p_1 \neq 0$$

检验统计量为

$$\widetilde{U} = \frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

其中

$$\widehat{p} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right)$$

检验水平近似为 α 的否定域为

$$D = \left\{(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_{n_1};\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{n_2}) : \left|\widetilde{U}\right| > u_{\alpha/2}\right\}$$

已知

$$
\begin{aligned}
&n_1 = 1500\,, \quad \overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i = \frac{300}{1500} = 0.2 \\
&n_2 = 1800\,, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_1} Y_j = \frac{320}{1800} = 0.1778 \\
&\widehat{p} = \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right) = \frac{300+320}{1500+1800} = 0.1879 \\
&\alpha = 0.05\,, \quad u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96
\end{aligned}
$$

计算得检验统计量的值为

$$
\widetilde{U} = \frac{\overline{Y}-\overline{X}}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} = \frac{0.1778-0.2}{\sqrt{0.1898\times(1-0.1898)}} \cdot \sqrt{\frac{1500\times 1800}{1500+1800}} = -1.6273
$$

因为 $\left|\widetilde{U}\right| = 1.6273 < 1.96$，故当检验水平 $\alpha = 0.05$ 时我们接受 H_0，即认为两工厂产品的次品率相同.