数理统计
第二章
抽样分布及若干预备知识

2026 年 3 月 31 日

目录

2.6.1 引言与定义

统计量的充分性是数理统计的一个基本概念，它是由R. A. Fisher 在其1922年的奠基性工作中提出来的。

2.6.1 引言与定义

统计量的充分性是数理统计的一个基本概念，它是由R. A. Fisher 在其1922年的奠基性工作中提出来的。

统计量是对样本的简化，希望达到：（1）简化的程度高；（2）信息的损失少。

2.6.1 引言与定义

统计量的充分性是数理统计的一个基本概念，它是由R. A. Fisher 在其1922年的奠基性工作中提出来的。

统计量是对样本的简化，希望达到：（1）简化的程度高；（2）信息的损失少。

一个统计量能集中样本中信息的多少，与统计量的具体形式有关，也依赖于问题的统计模型。

2.6.1 引言与定义

统计量的充分性是数理统计的一个基本概念，它是由R. A. Fisher 在其1922年的奠基性工作中提出来的。

统计量是对样本的简化，希望达到：（1）简化的程度高；（2）信息的损失少。

一个统计量能集中样本中信息的多少，与统计量的具体形式有关，也依赖于问题的统计模型。

最好的情况是统计量把样本中的全部信息都集中起来，也就是说信息无损失，称这样的统计量为**充分统计量**。

例如，设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，即$P(X_i = 1) = \theta$，$P(X_i = 0) = 1 - \theta$，$0 < \theta < 1$。

例如，设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，

即$P(X_i = 1) = \theta$，$P(X_i = 0) = 1 - \theta$，$0 < \theta < 1$。

记$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$，如果目的仅仅为了推断$\theta$，则$T(\boldsymbol{X})$是充分统计量。

从直观上看，知道了$T(\boldsymbol{X})$推断θ的效果，与知道样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$一样，因为$T(\boldsymbol{X})$表示事件A在n次独立的Bernoulli试验中成功的次数。

从直观上看，知道了$T(\boldsymbol{X})$推断θ的效果，与知道样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$一样，因为$T(\boldsymbol{X})$表示事件A在n次独立的Bernoulli试验中成功的次数。

而$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$比$T(\boldsymbol{X})$更详细的地方在于指出了事件A是在哪几次试验中发生是随机的。因此，知道了A出现的总次数后，再知道上述细节对推断θ不会有更多的用处。

2.6.1 引言与定义

一大堆原始资料，加工成统计量$T(\boldsymbol{X})$后，一般来说在信息上会有损失。

2.6.1 引言与定义

一大堆原始资料，加工成统计量$T(\boldsymbol{X})$后，一般来说在信息上会有损失。

但也有可能，将样本$\boldsymbol{X}$加工成$T(\boldsymbol{X})$时抓住了问题的实质，即$T(\boldsymbol{X})$中保留了样本$\boldsymbol{X}$中所含参数θ的全部信息，所丢掉的只是无关紧要的东西。

2.6.1 引言与定义

一大堆原始资料，加工成统计量$T(\boldsymbol{X})$后，一般来说在信息上会有损失。

但也有可能，将样本$\boldsymbol{X}$加工成$T(\boldsymbol{X})$时抓住了问题的实质，即$T(\boldsymbol{X})$中保留了样本$\boldsymbol{X}$中所含参数θ的全部信息，所丢掉的只是无关紧要的东西。

如果一个统计量满足这个要求，即使没有样本$\boldsymbol{X}$也能恢复参数θ的信息，则称此统计量为充分的。

仍看上例，样本$\boldsymbol{X}$的分布为

仍看上例，样本$\boldsymbol{X}$的分布为

$$\begin{aligned} P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) =& P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \\ =& \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ =& \theta^t(1-\theta)^{n-t}, \end{aligned} \tag{1}$$

仍看上例，样本$\boldsymbol{X}$的分布为

$$
\begin{aligned}
P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) =& P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \\
=& \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\
=& \theta^t(1-\theta)^{n-t},
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中$t=\sum_{i=1}^n x_i$。

仍看上例，样本$\boldsymbol{X}$的分布为

$$\begin{aligned} P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) =& P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \\ =& \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ =& \theta^t(1-\theta)^{n-t}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中$t=\sum_{i=1}^n x_i$。

而$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,\theta)$，故有

仍看上例，样本$\boldsymbol{X}$的分布为

$$
\begin{aligned}
P_\theta(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}) =& P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n) \\
=& \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\
=& \theta^t(1-\theta)^{n-t},
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中$t=\sum_{i=1}^n x_i$。

而$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,\theta)$，故有

$$
P_\theta(T(\boldsymbol{X})=t)=\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t},\ t=0,1,2,\ldots,n,\ 0<\theta<1. \tag{2}
$$

可见，基于式（1）和式（2）推断参数θ的效果是相同的。因此$T(\boldsymbol{X})$为充分统计量。

可见，基于式（1）和式（2）推断参数θ的效果是相同的。因此$T(\boldsymbol{X})$为充分统计量。

充分性原则

如果$T(\boldsymbol{X})$为θ的充分统计量，则依赖样本$\boldsymbol{X}$对θ所作出的任何统计推断都可以仅通过统计量$T(\boldsymbol{X})$进行，不会有关于θ信息的损失。也就是说，如果$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$为满足$T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$的两个样本点，则无论是观测到$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$还是$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{y}$，关于$\theta$的推断都是相同的。

关于样本$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的信息可以设想成如下的公式:

2.6.1 引言与定义

关于样本$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$的信息可以设想成如下的公式：

$$\begin{aligned}\{\text{样本}\boldsymbol{X}\text{中的信息}\} =& \{T(\boldsymbol{X})\text{中所含样本的信息}\}\\ &+ \{\text{在知道T}(\boldsymbol{X})\text{后样本}\boldsymbol{X}\text{尚含有的剩余信息}\}.\end{aligned}$$

关于样本$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的信息可以设想成如下的公式：

$$
\begin{aligned}
\{\text{样本}\boldsymbol{X}\text{中的信息}\} = & \{T(\boldsymbol{X})\text{中所含样本的信息}\} \\
& + \{\text{在知道T}(\boldsymbol{X})\text{后样本}\boldsymbol{X}\text{尚含有的剩余信息}\}.
\end{aligned}
$$

故$T(\boldsymbol{X})$为充分统计量的要求归结为：要求后一项信息为0。

关于样本$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$的信息可以设想成如下的公式：

$$
\begin{aligned}
\{\text{样本}\boldsymbol{X}\text{中的信息}\} =& \{T(\boldsymbol{X})\text{中所含样本的信息}\} \\
&+ \{\text{在知道T}(\boldsymbol{X})\text{后样本}\boldsymbol{X}\text{尚含有的剩余信息}\}.
\end{aligned}
$$

故$T(\boldsymbol{X})$为充分统计量的要求归结为：要求后一项信息为0。

用统计的语言来描述，即要求$P_\theta(\boldsymbol{X} \in A | T = t)$与$\theta$无关，其中$A$为任一事件。

定义 (2.6.1)

设样本$\boldsymbol{X}$的分布族为$\{f(\boldsymbol{x},\theta),\ \theta\in\Theta\}$，$\Theta$是参数空间。令$T=T(\boldsymbol{X})$为一统计量，若在已知$T$的条件下，样本$\boldsymbol{X}$的条件分布与参数$\theta$无关，则称$T(\boldsymbol{X})$为$\theta$的**充分统计量**（sufficient statistics）。

例 (2.6.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$为充分统计量。

证：

例 (2.6.1)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i$为充分统计量。

证：

记$T=T(\boldsymbol{X})$，当$\sum\limits_{i=1}^n x_i=t_0$时，按定义只要证明下列条件概率与$\theta$无关。

例 (2.6.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，则$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$为充分统计量。

证:

记$T = T(\boldsymbol{X})$，当$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t_0$时，按定义只要证明下列条件概率与$\theta$无关。

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t_0)$$

例 (2.6.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$为从0-1分布中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$为充分统计量。

证：

记$T = T(\boldsymbol{X})$，当$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = t_0$时，按定义只要证明下列条件概率与$\theta$无关。

$$
\begin{aligned}
& P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t_0) \\
= & \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, T = t_0)}{P_\theta(T = t_0)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)}{P_\theta(T = t_0)},$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i)}{P_\theta(T = t_0)}, \\
&= \frac{P_\theta(X_1 = x_1)P_\theta(X_2 = x_2)\cdots P_\theta(X_{n-1} = x_{n-1})P_\theta(X_n = t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i)}{P_\theta(T = t_0)} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=t_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i)}{P_\theta(T=t_0)},\\
&=\frac{P_\theta(X_1=x_1)P_\theta(X_2=x_2)\cdots P_\theta(X_{n-1}=x_{n-1})P_\theta(X_n=t_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i)}{P_\theta(T=t_0)}\\
&=\frac{\theta^{x_1}(1-\theta)^{1-x_1}\cdots\theta^{x_{n-1}}(1-\theta)^{1-x_{n-1}}\theta^{t_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i}(1-\theta)^{1-t_0+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i}}{\binom{n}{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}}
\end{aligned}
$$

2.6.1 引言与定义

$$= \frac{\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i + t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i} (1-\theta)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i - t_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i}}{\binom{n}{t_0} \theta^{t_0} (1-\theta)^{n-t_0}}$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n-1} x_i+t_0-\sum_{i=1}^{n-1} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n-1} x_i-t_0+\sum_{i=1}^{n-1} x_i}}{\binom{n}{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}} \\
&=\frac{\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}}{\binom{n}{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}} \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i + t_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i - t_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i}}{\binom{n}{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}} \\
&=\frac{\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}}{\binom{n}{t_0}\theta^{t_0}(1-\theta)^{n-t_0}} \\
&=\frac{1}{\binom{n}{t_0}},
\end{aligned}
$$

因此有

因此有

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | T = t_0)$$

$$=$$

因此有

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n|T=t_0)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{\binom{n}{t_0}}, & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=t_0,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\neq t_0.\end{cases}$$

因此有

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n|T=t_0)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{\binom{n}{t_0}}, & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=t_0,\\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\neq t_0.\end{cases}$$

上述条件概率与θ无关，因此$T(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$为$\theta$的充分统计量。 □

例 (2.6.2)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\theta, 1)$中抽取的简单样本，则$T(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$为$\theta$的充分统计量。

证:

例 (2.6.2)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(\theta,1)$中抽取的简单样本，则$T(\boldsymbol{X})=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}=\bar{X}$为$\theta$的充分统计量。

证：

如果直接证明在给定T时$\boldsymbol{X}$的条件概率密度与θ无关，则推导过程比较复杂。

例 (2.6.2)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(\theta, 1)$中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{X}$为$\theta$的充分统计量。

证：

如果直接证明在给定T时$\boldsymbol{X}$的条件概率密度与θ无关，则推导过程比较复杂。

采用如下办法：作正交变换

例 (2.6.2)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(\theta,1)$中抽取的简单样本，则$T(\boldsymbol{X})=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}=\bar{X}$为$\theta$的充分统计量。

证：

如果直接证明在给定T时$\boldsymbol{X}$的条件概率密度与θ无关，则推导过程比较复杂。

采用如下办法：作正交变换

$$(Y_1,\ldots,Y_n)^T=\boldsymbol{A}(X_1,\ldots,X_n)^T,$$

其中正交阵

其中正交阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.6.1 引言与定义

其中正交阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

由代数学中的$Schmidt$正交化方法可知上述正交阵$\boldsymbol{A}$是存在的。变换的Jacobi行列式的绝对值为$|J| = 1$。

由正交变换$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$可知

由正交变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$可知

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\bar{X}, \\
Y_j &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} X_k,\ j = 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

由正交变换$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$可知

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\bar{X},$$

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} X_k,\ j = 2, \ldots, n.$$

由定理2.2.3的证明过程可知$\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，$Y_1, \ldots, Y_n$是相互独立的，

并且

并且

$$Y_1 \sim N(\sqrt{n}\theta, 1),$$

$$Y_i \sim N(0,1),\ i = 2, \ldots, n.$$

并且

$$Y_1 \sim N(\sqrt{n}\theta, 1),$$

$$Y_i \sim N(0, 1),\ i = 2, \ldots, n.$$

显然，$\bar{X}$对原样本$\boldsymbol{X}$的充分性等价于Y_1对$(Y_1, \ldots, Y_n)$的充分性。

2.6.1 引言与定义

并且

$$Y_1 \sim N(\sqrt{n}\theta, 1),$$

$$Y_i \sim N(0, 1),\ i = 2, \ldots, n.$$

显然，$\bar{X}$对原样本$\boldsymbol{X}$的充分性等价于Y_1对$(Y_1, \ldots, Y_n)$的充分性。

因此，只要证明给定$Y_1 = y_1$时，$(Y_1, \ldots, Y_n)$的条件密度与θ无关即可。

易见$Y_1,\ldots,Y_n$的联合密度为

易见$Y_1,\ldots,Y_n$的联合密度为

$$f(y_1,\ldots,y_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}y_i^2-\frac{1}{2}(y_1-\sqrt{n}\theta)^2\}.$$

易见$Y_1,\ldots,Y_n$的联合密度为

$$f(y_1,\ldots,y_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}y_i^2-\frac{1}{2}(y_1-\sqrt{n}\theta)^2\}.$$

Y_1的边缘密度函数为

易见$Y_1,\ldots,Y_n$的联合密度为

$$f(y_1,\ldots,y_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}y_i^2-\frac{1}{2}(y_1-\sqrt{n}\theta)^2\}.$$

Y_1的边缘密度函数为

$$f(y_1,\ldots,y_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(y_1-\sqrt{n}\theta)^2\},$$

给定$Y_1 = y_1$时，$(Y_1, \ldots, Y_n)$的条件密度是

给定$Y_1 = y_1$时，$(Y_1, \ldots, Y_n)$的条件密度是

$$f(y_1, \ldots, y_n | y_1) = \frac{f(y_1, \ldots, y_n)}{f_{Y_1}(y_1)}$$

$$=$$

给定$Y_1=y_1$时，$(Y_1,\ldots,Y_n)$的条件密度是

$$f(y_1,\ldots,y_n|y_1)=\frac{f(y_1,\ldots,y_n)}{f_{Y_1}(y_1)}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}y_i^2\},$$

它与θ无关。

给定$Y_1 = y_1$时，$(Y_1, \dots, Y_n)$的条件密度是

$$f(y_1, \dots, y_n | y_1) = \frac{f(y_1, \dots, y_n)}{f_{Y_1}(y_1)}$$
$$= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} y_i^2\},$$

它与θ无关。所以$T(\boldsymbol{X}) = \bar{X}$是$\theta$的充分统计量。 $\square$

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X}) = X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X}) = X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

证：

在$T = T(\boldsymbol{X}) = X_1$的条件下，$(X_1, \ldots, X_n)$的条件密度为

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X})=X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

证：

在$T=T(\boldsymbol{X})=X_1$的条件下，$(X_1,\ldots,X_n)$的条件密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n|x_1)=\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{f_T(x_1)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}{f_T(x_1)}$$

$$=$$

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X}) = X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

证：

在$T = T(\boldsymbol{X}) = X_1$的条件下，$(X_1, \ldots, X_n)$的条件密度为

$$f(x_1, \ldots, x_n | x_1) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f_T(x_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}{f_T(x_1)}$$

$$= \prod_{i=2}^{n} f(x_i) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^{n-1} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(x_i - \theta)^2\},$$

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X})=X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

证：

在$T=T(\boldsymbol{X})=X_1$的条件下，$(X_1,\ldots,X_n)$的条件密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n|x_1)=\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{f_T(x_1)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}f(x_i)}{f_T(x_1)}$$

$$=\prod_{i=2}^{n}f(x_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(x_i-\theta)^2\},$$

与θ有关，

例 (2.6.3)

在例2.6.2中，令$T(\boldsymbol{X}) = X_1$，则$T(\boldsymbol{X})$不是充分统计量。

证：

在$T = T(\boldsymbol{X}) = X_1$的条件下，$(X_1, \ldots, X_n)$的条件密度为

$$f(x_1, \ldots, x_n | x_1) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f_T(x_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}{f_T(x_1)}$$

$$= \prod_{i=2}^{n} f(x_i) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^{n-1} \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} (x_i - \theta)^2\},$$

与θ有关，因此$T(\boldsymbol{X}) = X_1$不是充分统计量。 □

注： 上例中$T(\boldsymbol{X}) = X_1$不是充分统计量，这个道理是显然的。

注：上例中$T(\boldsymbol{X}) = X_1$不是充分统计量，这个道理是显然的。

因为 $T(\boldsymbol{X})$只使用了一个观察值X_1，把其余观察值$X_2, \ldots, X_n$全丢掉了，它当然不能把$X_1, X_2, \ldots, X_n$的全部信息集中起来。

2.6.1小节的例子表明，从定义出发验证一个统计量是充分的，计算太复杂。幸好有因子分解定理这一判别方法，在应用上很方便。

2.6.1小节的例子表明，从定义出发验证一个统计量是充分的，计算太复杂。幸好有因子分解定理这一判别方法，在应用上很方便。

因子分解定理是由R. A. Fisher 在20世纪20年代提出来的，它的最一般形式和严格数学证明是 Halmos 和 Savage 在1949年作出来的。

定理 (2.6.1（因子分解定理）)

设样本$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$的概率函数$f(\boldsymbol{x}, \theta)$依赖于参数$\theta$，$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$是一个统计量，则$T$为充分统计量的充要条件是$f(\boldsymbol{x}, \theta)$可以分解为

定理 (2.6.1（因子分解定理）)

设样本$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的概率函数$f(\boldsymbol{x}, \theta)$依赖于参数$\theta$，$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$是一个统计量，则$\boldsymbol{T}$为充分统计量的充要条件是$f(\boldsymbol{x}, \theta)$可以分解为

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}), \theta) h(\boldsymbol{x})$$

的形状。

定理 (2.6.1（因子分解定理）)

设样本$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的概率函数$f(\boldsymbol{x}, \theta)$依赖于参数$\theta$，$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$是一个统计量，则$\boldsymbol{T}$为充分统计量的充要条件是$f(\boldsymbol{x}, \theta)$可以分解为

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}), \theta)h(\boldsymbol{x})$$

的形状。

注意此处函数$h(\boldsymbol{x}) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$不依赖于$\theta$，$t(\boldsymbol{x})$为$T(\boldsymbol{X})$的观察值。

这里的概率函数是指若$\boldsymbol{X}$为连续型，则$f(\boldsymbol{x},\theta)$是其密度函数；

这里的概率函数是指若$\boldsymbol{X}$为连续型，则$f(\boldsymbol{x},\theta)$是其密度函数；

若$\boldsymbol{X}$是离散型，则$f(\boldsymbol{x},\theta)=P_\theta(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)$，即样本$\boldsymbol{X}$的概率分布。

证:

考虑$\boldsymbol{X}$有密度的情形。设统计量$\boldsymbol{T}=(T_1,\ldots,T_k)$，$T_1,\ldots,T_k$都是一维随机变量，$k$一般是较小的自然数，并可以找到$n-k$维统计量$\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_{n-k})$使得变换

证:

考虑$\boldsymbol{X}$有密度的情形。设统计量$\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_k)$，$T_1, \ldots, T_k$都是一维随机变量，$k$一般是较小的自然数，并可以找到$n-k$维统计量$\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n-k})$使得变换

$$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) \to (\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Y}) = (T_1, \ldots, T_k, Y_1, \ldots, Y_{n-k})$$

是一个一一对应的变换，且有一阶连续偏导数。

2.6.2 充分性的判别准则——因子分解定理

假定$\boldsymbol{X}$的样本空间$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{T}$的样本空间$\mathcal{J}$皆为欧式的，即$\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$，$\mathcal{J} = \mathcal{R}^k$。

假定$\boldsymbol{X}$的样本空间$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{T}$的样本空间$\mathcal{J}$皆为欧式的，即$\mathcal{X}=\mathcal{R}^n$，$\mathcal{J}=\mathcal{R}^k$。

由变换是一一对应可知

假定$\boldsymbol{X}$的样本空间$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{T}$的样本空间$\mathcal{J}$皆为欧式的，即$\mathcal{X}=\mathcal{R}^n$，$\mathcal{J}=\mathcal{R}^k$。

由变换是一一对应可知

$$\begin{aligned}
X_i =& X_i(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y}) = X_i(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k}),\ i=1,2,\ldots,n;\\
T_j =& T_j(X_1,\ldots,X_n),\ j=1,2,\ldots,k;\\
Y_\ell =& Y_\ell(X_1,\ldots,X_n),\ \ell=1,2,\ldots,n-k.
\end{aligned}$$

假定$\boldsymbol{X}$的样本空间$\mathcal{X}$和$\boldsymbol{T}$的样本空间$\mathcal{J}$皆为欧式的，即$\mathcal{X}=\mathcal{R}^n$，$\mathcal{J}=\mathcal{R}^k$。

由变换是一一对应可知

$$
\begin{aligned}
X_i =& X_i(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})=X_i(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k}),\ i=1,2,\ldots,n;\\
T_j =& T_j(X_1,\ldots,X_n),\ j=1,2,\ldots,k;\\
Y_\ell =& Y_\ell(X_1,\ldots,X_n),\ \ell=1,2,\ldots,n-k.
\end{aligned}
$$

变换的Jacobi行列式的绝对值为$|J|=\left|\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}\right|\triangleq w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$，此处$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$为$\boldsymbol{T}$的观察值，$\boldsymbol{y}$为$\boldsymbol{Y}$的观察值，$w$是$(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$的函数。

$\boxed{\text{充分性的证明}}$:

$\boxed{\text{充分性的证明}}$:

已知因子分解定理成立，即

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}).$$

故$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})=(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k})$的联合密度为

故$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Y}) = (T_1, \ldots, T_k, Y_1, \ldots, Y_{n-k})$的联合密度为

$$k(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}; \theta) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}), \theta)|J| = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}), \theta)h(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})$$

$$=$$

故$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})=(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k})$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta) =& f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\theta)|J| = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}) \\
&= g(\boldsymbol{t},\theta)\underset{\sim\sim\sim}{h(x_1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\ldots,x_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}))w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})} \\
&=
\end{aligned}
$$

2.6.2 充分性的判别准则——因子分解定理

故$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})=(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k})$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta) =& f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\theta)|J| = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}) \\
&= g(\boldsymbol{t},\theta)h(x_1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\ldots,x_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}))w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}) \\
&= g(\boldsymbol{t},\theta)\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),
\end{aligned}
$$

故$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})=(T_1,\ldots,T_k,Y_1,\ldots,Y_{n-k})$的联合密度为

$$\begin{aligned}k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)=&f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\theta)|J|=g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x})w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})\\&=g(\boldsymbol{t},\theta)\underline{h(x_1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\ldots,x_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}))w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}\\&=g(\boldsymbol{t},\theta)\underline{\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})},\end{aligned}$$

此处$\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})=h(x_1(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}),\ldots,x_n(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}))w(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})$与$\theta$无关。

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$$V(\boldsymbol{t};\theta)=\int_{\mathcal{R}^{n-k}}k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)d\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}}\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$$V(\boldsymbol{t};\theta) = \int_{\mathcal{R}^{n-k}} k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)d\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

故给定$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度为

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$$V(\boldsymbol{t};\theta) = \int_{\mathcal{R}^{n-k}} k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)d\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

故给定$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度为

$$q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t}) = \frac{k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)}{V(\boldsymbol{t};\theta)} = \frac{g(\boldsymbol{t},\theta)\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}}$$

$$=$$

2.6.2 充分性的判别准则——因子分解定理

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$$V(\boldsymbol{t};\theta) = \int_{\mathcal{R}^{n-k}} k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)d\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

故给定$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度为

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t}) = & \frac{k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)}{V(\boldsymbol{t};\theta)} = \frac{g(\boldsymbol{t},\theta)\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}} \\ = & \frac{\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}}, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$的边缘密度为

$$V(\boldsymbol{t};\theta) = \int_{\mathcal{R}^{n-k}} k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)d\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}} \mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

故给定$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度为

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t}) = & \frac{k(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y};\theta)}{V(\boldsymbol{t};\theta)} = \frac{g(\boldsymbol{t},\theta)\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{t},\theta)\int_{\mathcal{R}^{n-k}}\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}} \\ = & \frac{\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{\int_{\mathcal{R}^{n-k}}\mu(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}}, \end{aligned}$$

与θ无关，故$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$为充分统计量。

$\boxed{\text{必要性的证明}}$:

$\boxed{\text{必要性的证明}}$:

此时已知$\boldsymbol{T}=T(\boldsymbol{X})$为充分统计量，因此给定$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度$q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})$与$\theta$无关。

$\boxed{\text{必要性的证明}}$:

此时已知$\boldsymbol{T}=T(\boldsymbol{X})$为充分统计量，因此给定$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度$q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})$与$\theta$无关。$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{Y})$的联合密度为

$\boxed{\text{必要性的证明}}$:

此时已知$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$为充分统计量，因此给定$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}$时$\boldsymbol{Y}$的条件密度$q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})$与$\theta$无关。$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{Y})$的联合密度为

$$k(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}; \theta) = q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})g(\boldsymbol{t}, \theta).$$

故通过前面的一一对应变换可知$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合密度为

故通过前面的一一对应变换可知$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合密度为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \theta) =& k(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}; \theta) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| \\ = & \end{aligned}$$

故通过前面的一一对应变换可知$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合密度为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \theta) =& k(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}; \theta) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| \\ =& g(\boldsymbol{t}, \theta) \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t}) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right|} \\ =& \end{aligned}$$

2.6.2 充分性的判别准则——因子分解定理

故通过前面的一一对应变换可知$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合密度为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}, \theta) =& k(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}; \theta) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| \\ =& g(\boldsymbol{t}, \theta) q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t}) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| \\ =& g(\boldsymbol{t}, \theta) \cdot h(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{3}$$

将

$$\boldsymbol{t} = (t_1(x_1, \ldots, x_n), \cdots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_{n-k}(x_1, \cdots, x_n))$$

代入式（3）中$q(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{t})\left|\frac{\partial(\boldsymbol{t},\boldsymbol{y})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|$的表达式中，可见它是$x_1, \ldots, x_n$的函数。

用$h(\boldsymbol{x})$表示，即

$$h(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{t}) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \right|.$$

用$h(\boldsymbol{x})$表示，即

$$h(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{t}) \left| \frac{\partial(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \right|.$$

显而易见，$h(\boldsymbol{x})$与θ无关。因此由式（3）可知因子分解定理成立。 $\square$

推论 (2.6.1)

设$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$为$\theta$的充分统计量，$S = \varphi(\boldsymbol{T})$是单值可逆函数，

则$S = \varphi(\boldsymbol{T})$也是$\theta$的充分统计量。

推论 (2.6.1)

设$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$为$\theta$的充分统计量，$S = \varphi(\boldsymbol{T})$是单值可逆函数，则$S = \varphi(\boldsymbol{T})$也是$\theta$的充分统计量。

证 由于$S = \varphi(\boldsymbol{T})$为单值可逆函数，故

$$\{\boldsymbol{X} : T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{t}_0\} = \{\boldsymbol{X} : S = \varphi(\boldsymbol{T}) = s_0\}$$

表示相同的事件。

故对任一事件A,

故对任一事件A，

$$P(A|\boldsymbol{T}=\boldsymbol{t}_0)=P(A|S=s_0)$$

与θ无关，按充分统计量的定义2.6.1可知$S=\varphi(\boldsymbol{T})$也是充分统计量。 $\square$

利用因子分解定理也不难证明推论2.6.1。

利用因子分解定理也不难证明推论2.6.1。

证明如下：

利用因子分解定理也不难证明推论2.6.1。

证明如下：

已知$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$是$\theta$的充分统计量，由因子分解定理有

利用因子分解定理也不难证明推论2.6.1。

证明如下：

已知$\boldsymbol{T} = T(\boldsymbol{X})$是$\theta$的充分统计量，由因子分解定理有

$$f(\boldsymbol{x};\theta) = g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x});\theta)h(\boldsymbol{x}),$$

这里$h(\boldsymbol{x})$与θ无关。

又因为$S=\varphi(\boldsymbol{T})$是单值可逆函数，则$S(\boldsymbol{X})=\varphi(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}))$是样本$\boldsymbol{X}$统计量；$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\varphi^{-1}(S)$，$\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|$是统计量$s$的函数。经计算

2.6.2 充分性的判别准则——因子分解定理

又因为$S=\varphi(\boldsymbol{T})$是单值可逆函数，则$S(\boldsymbol{X})=\varphi(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}))$是样本$\boldsymbol{X}$统计量；$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\varphi^{-1}(S)$，$\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|$是统计量$s$的函数。经计算

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\theta) =& g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x});\theta)h(\boldsymbol{x}) \\
=& \underbrace{g(\varphi^{-1}(s);\theta)\left|\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right|}h(\boldsymbol{x}) \\
=& \underbrace{q(s(\boldsymbol{x});\theta)}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

又因为$S=\varphi(\boldsymbol{T})$是单值可逆函数，则$S(\boldsymbol{X})=\varphi(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}))$是样本$\boldsymbol{X}$统计量；$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\varphi^{-1}(S)$，$\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|$是统计量$s$的函数。经计算

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\theta) =& g(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x});\theta)h(\boldsymbol{x}) \\
=& \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{g(\varphi^{-1}(s);\theta)\left|\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s}\right|}h(\boldsymbol{x}) \\
=& \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{q(s(\boldsymbol{x});\theta)}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

这里$q(s(\boldsymbol{x});\theta)=g(\varphi^{-1}(s(\boldsymbol{x}));\theta)\left|\frac{\partial t}{\partial s}\right|$是统计量$s(\boldsymbol{x})$和参数$\theta$的函数，$h(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{x}$的函数与$\theta$无关，故由因子分解定理，$S=\varphi(\boldsymbol{T})$也是$\theta$的充分统计量。 □

例 (2.6.4)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(a, \sigma^2)$中抽取的简单样本，令$\boldsymbol{\theta} = (a, \sigma^2)$，则$(\bar{X}, S^2)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量，此处$\bar{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差。

例 (2.6.4)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(a,\sigma^2)$中抽取的简单样本，令$\boldsymbol{\theta}=(a,\sigma^2)$，则$(\bar{X},S^2)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量，此处$\bar{X},S^2$分别为样本均值和样本方差。

证:

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

例 (2.6.4)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从正态总体$N(a, \sigma^2)$中抽取的简单样本，令$\boldsymbol{\theta} = (a, \sigma^2)$，则$(\bar{X}, S^2)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量，此处$\bar{X}, S^2$分别为样本均值和样本方差。

证：

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right\}$$

$$=$$

例 (2.6.4)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从正态总体$N(a,\sigma^2)$中抽取的简单样本，令$\boldsymbol{\theta}=(a,\sigma^2)$，则$(\bar{X},S^2)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量，此处$\bar{X},S^2$分别为样本均值和样本方差。

证：

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) =& \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\right\} \\
=& \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2a\sum_{i=1}^{n}x_i+na^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$= g(t(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{\theta}) h(\boldsymbol{x}).$$

$$= g(t(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{x}).$$

此处$g(t(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + na^2\right)\right\}$，$h(\boldsymbol{x}) = 1$，由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量。

$$= g(t(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{x}).$$

此处$g(t(\boldsymbol{x});\boldsymbol{\theta}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^n x_i + na^2\right)\right\}$，$h(\boldsymbol{x}) = 1$，由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量。

由于$\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$与$(\bar{X}, S^2)$为一一对应的变换，由推论2.6.1可知$(\bar{X}, S^2)$也是$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量。 □

例 (2.6.5)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从总体$B(1,\theta)$中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^n X_i$是$\theta$的充分统计量。

例 (2.6.5)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从总体$B(1, \theta)$中抽取的简单样本，则$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$是$\theta$的充分统计量。

证：

样本$\boldsymbol{X}$的联合分布是

例 (2.6.5)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从总体$B(1,\theta)$中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$是$\theta$的充分统计量。

证：

样本$\boldsymbol{X}$的联合分布是

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x},\theta) =& P_\theta(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ =& \theta^{\sum\limits_{i=1}^n x_i}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^n x_i} = g(t(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

其中$g(t(\boldsymbol{x}),\theta)=\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，$h(\boldsymbol{x})=1$，由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$为$\theta$的充分统计量。 □

例 (2.6.6)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从均匀分布$U(0, \theta)$中抽取的简单样本，

则$T(\boldsymbol{X}) = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$为$\theta$的充分统计量。

证

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

证

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{\{0<x_{(1)}\leq\cdots\leq x_{(n)}<\theta\}}$$

$$=$$

证

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{\{0<x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}<\theta\}}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}I_{\{x_{(n-1)}\le x_{(n)}<\theta\}}I_{\{0<x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n-1)}\}}=g(t(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}),$$

证

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x},\theta) &= \frac{1}{\theta^n} I_{\{0<x_{(1)}\leq\cdots\leq x_{(n)}<\theta\}} \\
&= \frac{1}{\theta^n} I_{\{x_{(n-1)}\leq x_{(n)}<\theta\}} I_{\{0<x_{(1)}\leq\cdots\leq x_{(n-1)}\}} = g(t(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

其中$g(t(\boldsymbol{x}),\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{\{x_{(n-1)}\leq x_{(n)}<\theta\}}$，$h(\boldsymbol{x})=I_{\{0<x_{(1)}\leq\cdots\leq x_{(n-1)}\}}$与$\theta$无关。由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X})=X_{(n)}$为$\theta$的充分统计量。 □

例 (2.6.7)

设$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$为从均匀分布$U(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$中抽取的简单样本，其中$-\infty<\theta<\infty$，$\theta$是区间$[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]$的中点，也是总体分布的均值。利用因子分解定理，验证样本均值$\bar{X}$不是充分统计量。

例 (2.6.7)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从均匀分布$U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$中抽取的简单样本，其中$-\infty < \theta < \infty$，$\theta$是区间$[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$的中点，也是总体分布的均值。利用因子分解定理，验证样本均值$\bar{X}$不是充分统计量。

证

记$X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$，$X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$，

$T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$。

样本 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \frac{1}{2} < x_{(1)} \le x_{(n)} < \theta + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=$$

样本 $\boldsymbol{X}$ 的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x},\theta)=\begin{cases}1, & \theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=I_{\{\theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}\}}$$

$$=g(t(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}).$$

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x},\theta) &= \begin{cases} 1, & \theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= I_{\{\theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}\}} \\
&= g(t(\boldsymbol{x}),\theta)h(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

其中$g(t(\boldsymbol{x}),\theta)=I_{\{\theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}\}}$，$h(\boldsymbol{x})=1$，因此由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X})$是充分统计量。

又因为该样本的概率密度函数$f(x;\theta)$不能表示成$g(\bar{x};\theta)h(\boldsymbol{x})$的形式，因此$\bar{X}$不是充分统计量。 $\square$

例 (2.6.8)

若$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从指数族（1.5.1）

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta}) T_i(x)\right\} h(x),$$

中抽取的简单样本，其中$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$，求$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量。

解：

解：

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

解:

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} \left[C(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{Q_i(\boldsymbol{\theta})T_i(x_j)\right\} h(x_j)\right]$$

$$=$$

解：

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} [C(\boldsymbol{\theta}) \exp\{Q_i(\boldsymbol{\theta})T_i(x_j)\} h(x_j)]$$

$$= [C(\boldsymbol{\theta})]^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta}) \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j)\right\} \prod_{j=1}^{n} h(x_j)$$

$$=$$

解：

样本$\boldsymbol{X}$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{j=1}^{n} f(x_j;\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} \left[C(\boldsymbol{\theta})\exp\left\{Q_i(\boldsymbol{\theta})T_i(x_j)\right\} h(x_j)\right] \\
&= [C(\boldsymbol{\theta})]^n \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta}) \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j)\right\} \prod_{j=1}^{n} h(x_j) \\
&= \widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{T}_i(\boldsymbol{x})\right\} \widetilde{h}(\boldsymbol{x}) = g(\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta})\widetilde{h}(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

其中

$$\widetilde{T}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j),\ i = 1, \ldots, k,$$

其中

$$\widetilde{T}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j),\ i = 1, \ldots, k,$$

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) = [C(\boldsymbol{\theta})]^n,\ \ \widetilde{h}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} h(x_j),$$

其中

$$\widetilde{T}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j),\ i = 1, \ldots, k,$$

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) = [C(\boldsymbol{\theta})]^n,\ \ \widetilde{h}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} h(x_j),$$

$$g(\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{T}_i(\boldsymbol{x})\right\}.$$

其中

$$\widetilde{T}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} T_i(x_j),\ i = 1, \ldots, k,$$

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) = [C(\boldsymbol{\theta})]^n,\ \ \widetilde{h}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} h(x_j),$$

$$g(\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{\theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\boldsymbol{\theta})\widetilde{T}_i(\boldsymbol{x})\right\}.$$

由因子分解定理立得$\widetilde{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) = (\widetilde{T}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \widetilde{T}_k(\boldsymbol{x}))$为$\boldsymbol{\theta}$的充分统计量。 □

例 (2.6.9)

次序统计量的充分性。

例 (2.6.9)

次序统计量的充分性。

设$\mathcal{F} = \{f(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$，$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$是从分布族$\mathcal{F}$中抽取的简单样本，则次序统计量

$$T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$$

是充分统计量。

证：

特别地，若总体X是连续型的，由定理2.4.1可知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合密度为

证:

特别地，若总体X是连续型的，由定理2.4.1可知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

$$=$$

证:

特别地，若总体X是连续型的，由定理2.4.1可知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合密度为

$$f(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

$$=\frac{1}{n!}f(x_{(1)},\ldots,x_{(n)};\theta)$$

$$=$$

证：

特别地，若总体X是连续型的，由定理2.4.1可知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n;\theta)&=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)\\
&=\frac{1}{n!}f(x_{(1)},\ldots,x_{(n)};\theta)\\
&=g(T(\boldsymbol{x});\theta)h(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

证：

特别地，若总体X是连续型的，由定理2.4.1可知$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合密度为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n;\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \\
&= \frac{1}{n!} f(x_{(1)},\ldots,x_{(n)};\theta) \\
&= g(T(\boldsymbol{x});\theta)h(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

其中$h(\boldsymbol{x})=1$，$g(T(\boldsymbol{x});\theta)=\frac{1}{n!}f(x_{(1)},\ldots,x_{(n)};\theta)$。由因子分解定理可知$T(\boldsymbol{X})=(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$为充分统计量。 □