数理统计
第二章
抽样分布及若干预备知识

2026 年 3 月 18 日

目录

2.3.1 χ^2分布

当总体分布为正态情形时，许多重要统计量的抽样分布可以求得，它们多与下面讨论的χ^2分布、t分布和F分布这三个分布有密切关系。

2.3.1 χ^2分布

当总体分布为正态情形时，许多重要统计量的抽样分布可以求得，它们多与下面讨论的χ^2分布、t分布和F分布这三个分布有密切关系。

这三个分布在后面几章中有重要应用。下面将分别介绍它们的定义和有关性质。

1. χ^2分布的定义和密度函数

1. χ^2分布的定义和密度函数

定义 (2.3.1 χ^2分布)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n,\ i.i.d. \sim N(0,1)$，则称

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

是自由度为n的χ^2变量，其分布称为自由度为n的χ^2分布，记为$\xi \sim \chi_n^2$。

2.3.1 χ^2分布

定理 (2.3.1)

设随机变量ξ是自由度为n的χ^2随机变量，则其概率密度函数为

定理 (2.3.1)

设随机变量ξ是自由度为n的χ^2随机变量，则其概率密度函数为

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

定理 (2.3.1)

设随机变量ξ是自由度为n的χ^2随机变量，则其概率密度函数为

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中$\Gamma(n/2) = \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-x} dx$。

2.3.1 χ^2分布

定理 (2.3.1)

设随机变量ξ是自由度为n的χ^2随机变量，则其概率密度函数为

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中$\Gamma(n/2) = \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-x} dx$。

注：伽马分布$\Gamma(r, \lambda)$的密度函数为：

$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ r > 0, \lambda > 0$。

2.3.1 χ^2分布

定理 (2.3.1)

设随机变量ξ是自由度为n的χ^2随机变量，则其概率密度函数为

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

其中$\Gamma(n/2) = \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-x} dx$。

注：伽马分布$\Gamma(r, \lambda)$的密度函数为：

$f(x; r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x},\ x \ge 0,\ r > 0, \lambda > 0$。

显然χ_n^2的密度函数与Gamma分布$\Gamma(n/2, 1/2)$的密度函数相同。

证明 1（利用Gamma分布）：

由于$X_1 \sim N(0,1)$, $-\infty < x < \infty$，令$Y = X_1^2$，可得出$X_1 = \pm\sqrt{Y}$，雅可比行列式的绝对值为$|J| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial Y}\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$。

证明 1（利用Gamma分布）：

由于$X_1 \sim N(0,1)$，$-\infty < x < \infty$，令$Y = X_1^2$，可得出$X_1 = \pm\sqrt{Y}$，雅可比行列式的绝对值为$|J| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial Y}\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$。

随机变量Y的密度函数为

证明 1（利用Gamma分布）：

由于$X_1 \sim N(0,1)$, $-\infty < x < \infty$，令$Y = X_1^2$，可得出$X_1 = \pm\sqrt{Y}$，雅可比行列式的绝对值为$|J| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial Y}\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$。

随机变量Y的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& f_X(x(y))|J| \\ =& \end{aligned}$$

证明 1（利用Gamma分布）：

由于$X_1 \sim N(0,1)$, $-\infty < x < \infty$，令$Y = X_1^2$，可得出$X_1 = \pm\sqrt{Y}$，雅可比行列式的绝对值为$|J| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial Y}\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$。

随机变量Y的密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) =& f_X(x(y))|J| \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\}\frac{1}{2\sqrt{y}}I(x>0) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}\}\frac{1}{2\sqrt{y}}I(x\leq 0) \\
=&
\end{aligned}
$$

证明 1（利用Gamma分布）：

由于$X_1 \sim N(0,1)$, $-\infty < x < \infty$，令$Y = X_1^2$，可得出$X_1 = \pm\sqrt{Y}$，雅可比行列式的绝对值为$|J| = \left|\frac{\partial X_1}{\partial Y}\right| = \left|\pm\frac{1}{2\sqrt{Y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{Y}}$。

随机变量Y的密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) =& f_X(x(y))|J| \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}\}\frac{1}{2\sqrt{y}}I(x>0) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}\}\frac{1}{2\sqrt{y}}I(x\leq 0) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}},\ y>0.
\end{aligned}
$$

这是伽马分布$\Gamma(1/2, 1/2)$的密度函数。

这是伽马分布$\Gamma(1/2, 1/2)$的密度函数。

由定义2.3.1知$\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，且$Y_1, \ldots, Y_n$独立同分布于Gamma分布$\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，即卡方分布$\chi_1^2$。由Gamma分布的再生性，可得到$\xi$服从Gamma分布$\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$，即自由度为$n$的$\chi^2$分布。 $\square$

证明 2（直接计算）：

由于$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(0,1)$，故其联合密度为

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}.$$

证明 2（直接计算）：

由于$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(0,1)$，故其联合密度为

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\}.$$

令$r.v.\ \xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$的分布函数为$G_n(x)$，则有

$$G_n(x) = P(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < x) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < x} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\} dx_1 \cdots x_n.$$

2.3.1 χ^2分布

作n维球坐标变换

2.3.1 χ^2分布

作n维球坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_2 = \rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \\ \cdots\cdots \\ x_n = \rho\sin\theta_1. \end{cases}$$

作n维球坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_2 = \rho\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \\ \cdots\cdots \\ x_n = \rho\sin\theta_1. \end{cases}$$

变换的雅可比（Jacobi）行列式的绝对值为

$$|J| = \left|\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(\rho, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})}\right| = \rho^{n-1}D(\theta_1\ldots\theta_{n-1}),$$

其中$D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$表示$\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$的某个函数；

$0 < \rho < \sqrt{x}$; $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$，$i = 1, \ldots, n-2; -\pi < \theta_{n-1} < \pi$。因此有

其中$D(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$表示$\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$的某个函数；

$0 < \rho < \sqrt{x}$; $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$，$i = 1, \ldots, n-2$; $-\pi < \theta_{n-1} < \pi$。因此有

$$
\begin{aligned}
G_n(x) =& (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_0^{\sqrt{x}} \rho^{n-1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \\
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D(\theta_1 \cdots \theta_{n-1}) d\theta_1 \cdots \theta_{n-1} \\
=& C_n \int_0^{\sqrt{x}} \rho^{n-1} e^{-\frac{\rho^2}{2}},
\end{aligned}
$$

其中$D(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$表示$\theta_1,\dots,\theta_{n-1}$的某个函数；

$0<\rho<\sqrt{x}$; $-\pi/2<\theta_i<\pi/2$，$i=1,\dots,n-2$; $-\pi<\theta_{n-1}<\pi$。因此有

$$\begin{aligned}
G_n(x)=&(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n\int_0^{\sqrt{x}}\rho^{n-1}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2}D(\theta_1\cdots\theta_{n-1})d\theta_1\cdots\theta_{n-1}\\
=&C_n\int_0^{\sqrt{x}}\rho^{n-1}e^{-\frac{\rho^2}{2}},
\end{aligned}$$

其中

$$C_n=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}D(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})d\theta_1\cdots\theta_{n-1}.$$

令$y=\rho^2$，则$d\rho=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}dy$，故有

令$y=\rho^2$，则$d\rho=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}dy$，故有

$$G_n(x)=\frac{1}{2}C_n\int_0^x y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy.$$

下面确定C_n。

由于

令$y=\rho^2$，则$d\rho=\frac{1}{2\sqrt{\rho}}dy$，故有

$$G_n(x)=\frac{1}{2}C_n\int_0^x y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy.$$

下面确定C_n。

由于

$$1=G_n(\infty)=\frac{1}{2}C_n\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy=C_n2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2}),$$

故有$C_n = 1/[2^{n/2-1}\Gamma(n/2)]$。

则可得

故有$C_n = 1/[2^{n/2-1}\Gamma(n/2)]$。

则可得

$$G_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy.$$

故有$C_n = 1/[2^{n/2-1}\Gamma(n/2)]$。

则可得

$$G_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy.$$

因此ξ的密度函数$g_n(x)$为

故有$C_n = 1/[2^{n/2-1}\Gamma(n/2)]$。

则可得

$$G_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^x y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy.$$

因此ξ的密度函数$g_n(x)$为

$$g_n(x) = G_n'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$\square$

2.3.1 χ^2分布

χ_n^2密度函数的支撑集（即使密度函数为正的变量取值集合）为$(0, \infty)$。

χ_n^2密度函数的支撑集（即使密度函数为正的变量取值集合）为$(0,\infty)$。

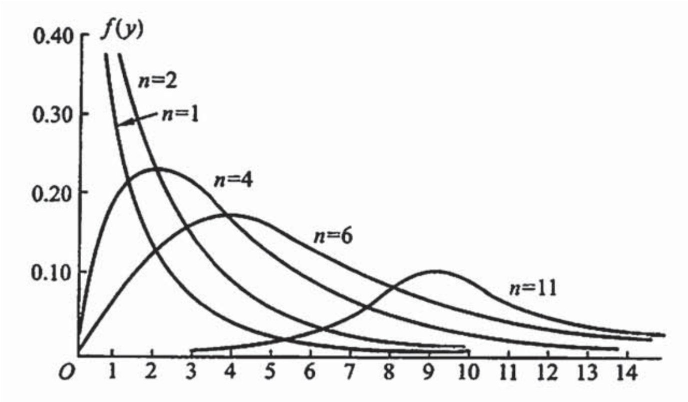

图: χ_n^2的密度函数形状图

- 当$n = 1, 2$时，曲线单调下降趋于0。

- 当$n = 1, 2$时，曲线单调下降趋于0。
- 当$n \geq 3$时，曲线有单峰，从0开始先单调上升，在一定位置达到峰值，然后单调下降趋于0。

2.3.1 χ^2分布

- 当$n = 1, 2$时，曲线单调下降趋于0。
- 当$n \geq 3$时，曲线有单峰，从0开始先单调上升，在一定位置达到峰值，然后单调下降趋于0。
- 当自由度n越大，χ_n^2的密度曲线越趋于“对称”。

设$\xi \sim \chi_n^2$，$0 < \alpha < 1$，令$P(\xi > c) = \alpha$，则称$c = \chi_n^2(\alpha)$为χ_n^2分布的上侧α分位数。

设$\xi \sim \chi_n^2$，$0 < \alpha < 1$，令$P(\xi > c) = \alpha$，则称$c = \chi_n^2(\alpha)$为χ_n^2分布的上侧α分位数。

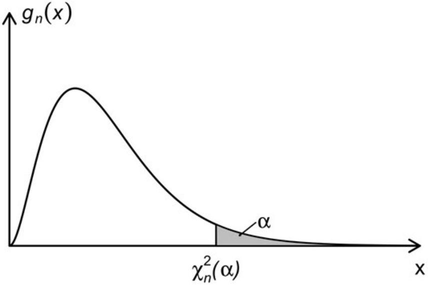

图: χ_n^2的上侧α分位数

2.3.1 χ^2分布

α通常取较小的数，如$\alpha = 0.05, \ 0.01$等。当α和n给定时，可查附表3（p.g. 371）求出$\chi^2_n(\alpha)$的值，如

α通常取较小的数，如$\alpha = 0.05, \ 0.01$等。当α和n给定时，可查附表3（p.g. 371）求出$\chi^2_n(\alpha)$的值，如

$$\chi^2_{10}(0.01) =$$

2.3.1 χ^2分布

α通常取较小的数，如$\alpha = 0.05,\ 0.01$等。当α和n给定时，可查附表3（p.g. 371）求出$\chi_n^2(\alpha)$的值，如

$$\chi_{10}^2(0.01) = 23.209,\ R:\ qchisq(0.99,\ 10)$$

α通常取较小的数，如$\alpha = 0.05,\ 0.01$等。当α和n给定时，可查附表3（p.g. 371）求出$\chi^2_n(\alpha)$的值，如

$$\chi^2_{10}(0.01) = 23.209,\ R:\ qchisq(0.99,\ 10)$$

$$\chi^2_6(0.05) =$$

α通常取较小的数，如$\alpha = 0.05,\ 0.01$等。当α和n给定时，可查附表3（p.g. 371）求出$\chi_n^2(\alpha)$的值，如

$$\chi_{10}^2(0.01) = 23.209,\ R:\ qchisq(0.99,\ 10)$$

$$\chi_6^2(0.05) = 12.592,\ R:\ qchisq(0.95,\ 6)$$

2. χ^2变量的性质

2. χ^2变量的性质

（1）设$r.v.\ \xi \sim \chi_n^2$，则ξ的特征函数为$\phi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$。（习题）

2. χ^2变量的性质

（1）设$r.v.\ \xi \sim \chi_n^2$，则ξ的特征函数为$\phi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$。（习题）

（2）$r.v.\ \xi$的均值和方差分别为$E(\xi) = n$，$Var(\xi) = 2n$。（习题）

2. χ^2变量的性质

（1）设$r.v.\ \xi \sim \chi_n^2$，则ξ的特征函数为$\phi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$。（习题）

（2）$r.v.\ \xi$的均值和方差分别为$E(\xi) = n$，$Var(\xi) = 2n$。（习题）

（3）设$Z_i \sim \chi_{n_i}^2$，$i = 1, 2, \ldots, k$且$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$相互独立，
则$\sum_{i=1}^k Z_i \sim \chi_{n_1+n_2+\cdots+n_k}^2$。

2.3.2 t分布

t分布是英国统计学家 W. S. Gosset 在1908年以笔名 Student 发表的论文中提出的，故后人称为“学生氏（student）分布”或"t分布"。

2.3.2 t分布

t分布是英国统计学家 W. S. Gosset 在1908年以笔名 Student 发表的论文中提出的，故后人称为“学生氏（student）分布”或"t分布"。

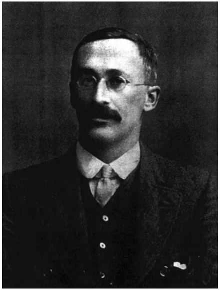

图: 威廉.希利.戈塞 1908

1. t分布的定义和密度函数

1. t分布的定义和密度函数

定义 (2.3.2 (t分布))

设随机变量$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi_n^2$且X和Y独立，则称

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

是自由度为n的t变量，其分布称为自由度为n的t分布，记为$T \sim t_n$。

2.3.2 t分布

自由度为n的t变量的概率密度函数由下面的定理给出。

自由度为n的t变量的概率密度函数由下面的定理给出。

定理 (2.3.2)

若随机变量$T \sim t_n$，则其密度函数为

$$t_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

该密度函数的推导采用下列方法：（习题）

该密度函数的推导采用下列方法：（习题）

（1）求出$\sqrt{Y/n}$的密度函数，其中$Y \sim \chi_n^2$；

该密度函数的推导采用下列方法：（习题）

（1）求出$\sqrt{Y/n}$的密度函数，其中$Y \sim \chi_n^2$；

（2）利用求独立随机变量商的密度函数公式求出T的密度函数。

2.3.2 t分布

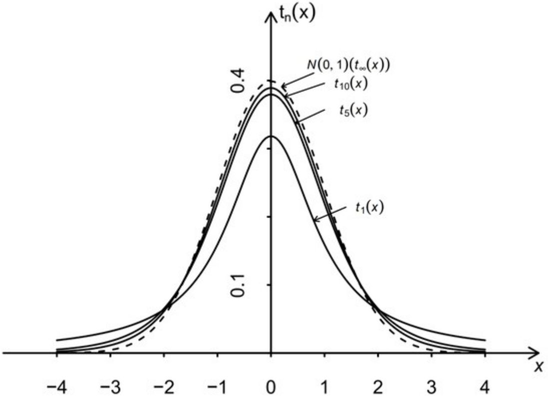

图: t_n的密度函数$t_n(x)$形状图

2.3.2 t分布

t_n的密度函数与标准正态分布$N(0,1)$密度很相似，它们都是关于原点对称、单峰的偶函数，在$x=0$处达到极大。

2.3.2 t分布

t_n的密度函数与标准正态分布$N(0,1)$密度很相似，它们都是关于原点对称、单峰的偶函数，在$x=0$处达到极大。

但t_n的峰值低于$N(0,1)$的峰值，t_n的密度函数尾部都要比$N(0,1)$的两侧尾部粗一些。

2.3.2 t分布

设$T \sim t_n$，$0 < \alpha < 1$，令$P(|T| > c) = \alpha$，则称$c = t_n(\alpha/2)$为自由度为n的t分布的双侧上α分位数。

2.3.2 t分布

设$T \sim t_n$，$0 < \alpha < 1$，令$P(|T| > c) = \alpha$，则称$c = t_n(\alpha/2)$为自由度为n的t分布的双侧上α分位数。当α和n给定时，可查附表2求出$t_n(\alpha)$，$t_n(\alpha/2)$等。

设$T \sim t_n$，$0 < \alpha < 1$，令$P(|T| > c) = \alpha$，则称$c = t_n(\alpha/2)$为自由度为n的t分布的双侧上α分位数。当α和n给定时，可查附表2求出$t_n(\alpha)$，$t_n(\alpha/2)$等。

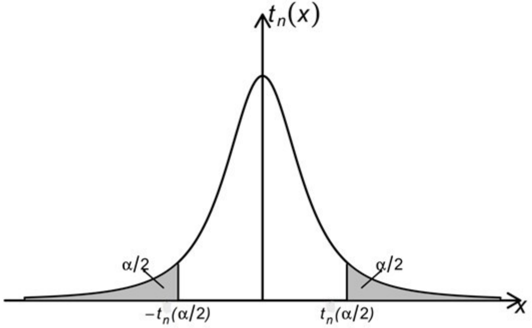

图: t_n的双侧α分位数

2.3.2 t分布

例如：

例如：

$$t_{12}(0.05) =$$

例如：

$$t_{12}(0.05) = 1.7823, \; R: \; qt(0.95, \; 12),$$

$$t_9(0.025) =$$

2.3.2 t分布

例如：

$$t_{12}(0.05) = 1.7823,\ R:\ qt(0.95,\ 12),$$

$$t_9(0.025) = 2.2622,\ R:\ qt(0.975,\ 9).$$

2. t变量的性质

2. t变量的性质

（1）若随机变量$T \sim t_n$，则$E(T^r)$只有当$r < n$（$n > 1$）时存在，且

2. t变量的性质

（1）若随机变量$T \sim t_n$，则$E(T^r)$只有当$r < n$（$n > 1$）时存在，且

$$E(T^r) = \begin{cases} n^{\frac{r}{2}} \dfrac{\Gamma(\frac{r+1}{2})\Gamma(\frac{n-r}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}, & r\text{为偶数}, \\ 0, & r\text{为奇数}. \end{cases}$$

2. t变量的性质

（1）若随机变量$T \sim t_n$，则$E(T^r)$只有当$r < n$（$n > 1$）时存在，且

$$E(T^r) = \begin{cases} n^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})\Gamma(\frac{n-r}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}, & r\text{为偶数}, \\ 0, & r\text{为奇数}. \end{cases}$$

特别当$n \geq 2$时，$E(T) = 0$。当$n \geq 3$时，$Var(T) = \frac{n}{n-2}$。

2.3.2 t分布

（2）当$n = 1$时，t分布就是Cauchy分布，此时分布密度函数为

$$t_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ -\infty < x < \infty.$$

（2）当$n=1$时，t分布就是Cauchy分布，此时分布密度函数为

$$t_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\ -\infty<x<\infty.$$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} t_n(x)=\varphi(x)$，此处$\varphi(x)$是$N(0,1)$变量的密度函数，即$t$变量的极限分布为标准正态分布$N(0,1)$。

2.3.3 F分布

1. F分布的定义和密度函数

1. F分布的定义和密度函数

定义 (2.3.3（F分布）)

设$r.v.\ X \sim \chi_m^2$，$Y \sim \chi_n^2$，且X和Y独立，则称

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

1. F分布的定义和密度函数

定义 (2.3.3（F分布）)

设$r.v.$ $X \sim \chi_m^2$，$Y \sim \chi_n^2$，且X和Y独立，则称

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

是自由度为m和n的F变量，其分布称为自由度是m和n的F分布，记为$F \sim F_{m,n}$。

2.3.3 F分布

定理 (2.3.3)

若随机变量$Z \sim F_{m,n}$，则其密度函数为

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

2.3.3 F分布

定理 (2.3.3)

若随机变量$Z \sim F_{m,n}$，则其密度函数为

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

该密度函数的推导方法如下：

2.3.3 F分布

定理 (2.3.3)

若随机变量$Z \sim F_{m,n}$，则其密度函数为

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

该密度函数的推导方法如下：

（1）分别求出X/m和Y/n的密度函数；

定理 (2.3.3)

若随机变量$Z \sim F_{m,n}$，则其密度函数为

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x > 0, \\ 0, \text{ 其他}. \end{cases}$$

该密度函数的推导方法如下：

（1）分别求出X/m和Y/n的密度函数；

（2）利用求随机变量商的密度函数公式求F的密度函数。

2.3.3 F分布

自由度为m, n的F分布的密度函数，其自由度m和n是有顺序的。

自由度为m, n的F分布的密度函数，其自由度m和n是有顺序的。

当$m \neq n$时，若将自由度m和n顺序颠倒一下，得到的是两个不同的F分布。

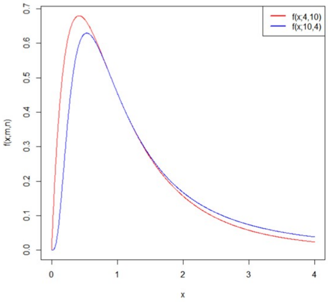

图: $F_{4,10}$和$F_{10,4}$的密度函数形状图

2.3.3 F分布

由下图可见，给定F分布第一个自由度$m=10$，对第二个自由度n取不同值时，密度曲线$f_{m,n}(x)$的图形是偏态（右偏）的，n越小，偏态越严重。

2.3.3 F分布

由下图可见，给定F分布第一个自由度$m=10$，对第二个自由度n取不同值时，密度曲线$f_{m,n}(x)$的图形是偏态（右偏）的，n越小，偏态越严重。

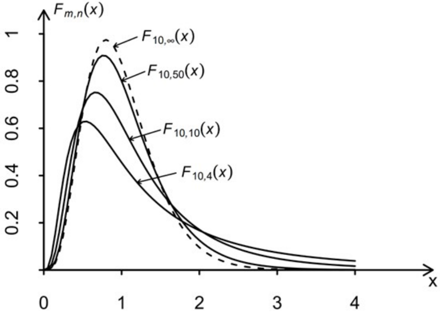

图: $F_{m,n}$的密度函数$f_{m,n}(x)$形状图

2.3.3 F分布

设$F \sim F_{m,n}$，$0 < \alpha < 1$，令$P(F > c) = \alpha$，则称$c = F_{m,n}(\alpha)$为F分布的上侧α分位数。

设$F \sim F_{m,n}$，$0 < \alpha < 1$，令$P(F > c) = \alpha$，则称$c = F_{m,n}(\alpha)$为F分布的上侧α分位数。

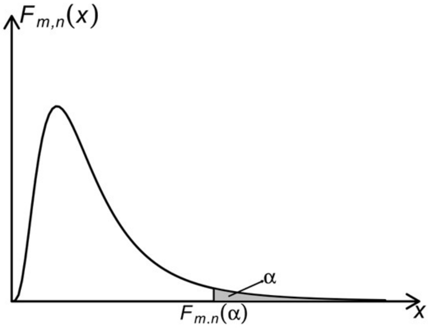

图: $F_{m,n}$的上侧α分位数

2.3.3 F分布

当m，n和α给定时，可以通过查附表4求出$F_{m,n}(\alpha)$之值。例如，

2.3.3 F分布

当m，n和α给定时，可以通过查附表4求出$F_{m,n}(\alpha)$之值。例如，

$$F_{4,10}(0.05) =$$

当m，n和α给定时，可以通过查附表4求出$F_{m,n}(\alpha)$之值。例如，

$$F_{4,10}(0.05) = 3.48, \; R: \; qf(0.95, \; 4, \; 10),$$

$$F_{10,15}(0.01) =$$

2.3.3 F分布

当m，n和α给定时，可以通过查附表4求出$F_{m,n}(\alpha)$之值。例如，

$$F_{4,10}(0.05) = 3.48, \ R: \ qf(0.95, \ 4, \ 10),$$

$$F_{10,15}(0.01) = 3.80, \ R: \ qf(0.99, \ 10, \ 15).$$

2. F变量的性质

2. F变量的性质

（1）若$Z \sim F_{m,n}$，则$1/Z \sim F_{n,m}$。

2. F变量的性质

（1）若$Z \sim F_{m,n}$，则$1/Z \sim F_{n,m}$。

（2）若$Z \sim F_{m,n}$，则对$r > 0$有

$$E(Z^r) = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+r)\Gamma(\frac{n}{2}-r)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})},\ 2r < n.$$

2. F变量的性质

（1）若$Z \sim F_{m,n}$，则$1/Z \sim F_{n,m}$。

（2）若$Z \sim F_{m,n}$，则对$r > 0$有

$$E(Z^r) = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+r)\Gamma(\frac{n}{2}-r)}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})},\ 2r < n.$$

特别地，

$$E(Z) = \frac{n}{n-2},\ n > 2,$$

$$Var(Z) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},\ n > 4.$$

（3）若$T \sim t_n$，则$T^2 \sim F_{1,n}$。

（3）若$T \sim t_n$，则$T^2 \sim F_{1,n}$。

（4）$F_{m,n}(1-\alpha) = 1/F_{n,m}(\alpha)$。（习题）

（3）若$T \sim t_n$，则$T^2 \sim F_{1,n}$。

（4）$F_{m,n}(1-\alpha) = 1/F_{n,m}(\alpha)$。（习题）

其性质（4）在区间估计和假设检验问题中会常常用到。

（3）若$T \sim t_n$，则$T^2 \sim F_{1,n}$。

（4）$F_{m,n}(1-\alpha) = 1/F_{n,m}(\alpha)$。（习题）

其性质（4）在区间估计和假设检验问题中会常常用到。

当α为较小的数，如$\alpha = 0.05$或$\alpha = 0.01$，m，n给定时，从已有的F分布表上查不到$F_{m,n}(1-0.05)$和$F_{m,n}(1-0.01)$的值，但它们的值可利用性质（4）求得，因为$F_{n,m}(0.05)$和$F_{n,m}(0.01)$是可以通过查F分布表求得的。

下面这一推论给出了指数分布随机变量的线性函数的分布与χ^2分布的关系。这在指数分布总体参数的区间估计和假设检验问题中有重要应用。

2.3.4 几个重要推论

下面这一推论给出了指数分布随机变量的线性函数的分布与χ^2分布的关系。这在指数分布总体参数的区间估计和假设检验问题中有重要应用。

推论 (2.3.1)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d.$服从密度函数为$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$的指数分布$Exp(\lambda)$，则有

$$2\lambda n\bar{X} = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}.$$

证 首先证明$2\lambda X_1 \sim \chi_2^2$。令$Y = 2\lambda X_1$，则有

证 首先证明$2\lambda X_1 \sim \chi_2^2$。令$Y = 2\lambda X_1$，则有

$$\begin{aligned}F(y) =& P(Y < y) = P(2\lambda X_1 < y) \\ =& P(X_1 < \frac{y}{2\lambda}) = \int_0^{\frac{y}{2\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ =& - e^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{y}{2\lambda}} = 1 - e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0.\end{aligned}$$

证 首先证明$2\lambda X_1 \sim \chi_2^2$。令$Y = 2\lambda X_1$，则有

$$\begin{aligned} F(y) =& P(Y < y) = P(2\lambda X_1 < y) \\ =& P(X_1 < \frac{y}{2\lambda}) = \int_0^{\frac{y}{2\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ =& -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{y}{2\lambda}} = 1 - e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0. \end{aligned}$$

所以

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

可见$Y \sim Exp(\frac{1}{2}) = \Gamma(1, \frac{1}{2}) = \chi_2^2$，即$2\lambda X_1 \sim \chi_2^2$。

因为$2\lambda X_i \sim \chi_2^2$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且它们相互独立，利用$\chi^2$分布的可加性（性质3），有$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_{2n}^2$。 □

2.3.4 几个重要推论

多元正态分布随机变量的二次型的分布和χ^2分布有着密切的关系。

多元正态分布随机变量的二次型的分布和χ^2分布有着密切的关系。

推论 (2.3.2)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^\top$服从$p$元正态分布，$E(\boldsymbol{X}) = \mu_{p\times 1}$，$Cov(\boldsymbol{X}) = \Sigma_{p\times p} > 0$，则$U = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})$服从自由度为$p$的$\chi^2$分布。

证

由于$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，故有$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$，其中$\boldsymbol{I} = diag(1, \ldots, 1)$为单位阵。

证

由于$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，故有$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$，其中$\boldsymbol{I} = diag(1, \ldots, 1)$为单位阵。

由多元正态分布的性质可知$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \ i.i.d. \sim N(0, 1)$。

证

由于$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，故有$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$，其中$\boldsymbol{I} = diag(1, \ldots, 1)$为单位阵。

由多元正态分布的性质可知$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\ i.i.d. \sim N(0, 1)$。

因此由χ^2分布定义可知

证

由于$\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，故有$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$，其中$\boldsymbol{I} = diag(1, \ldots, 1)$为单位阵。

由多元正态分布的性质可知$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \ i.i.d. \sim N(0, 1)$。

因此由χ^2分布定义可知

$$\begin{aligned} U =& (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}) \\ =& \boldsymbol{Y}^\top \boldsymbol{Y} = Y_1^2 + \cdots + Y_p^2 \sim \chi_p^2. \end{aligned}$$

□

推论 (2.3.3)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(a, \sigma^2)$，则

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{S} \sim t_{n-1},$$

其中$\bar{X}$为样本均值，$S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$。

证

由定理2.2.3（p.g.50）可知$\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$。

2.3.4 几个重要推论

证

由定理2.2.3（p.g.50）可知$\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$。

将其标准化得$\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma \sim N(0, 1)$。

证

由定理2.2.3（p.g.50）可知$\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$。

将其标准化得$\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma \sim N(0,1)$。

又$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且$\bar{X}$和$S^2$独立，按$t$分布的定义2.3.2有

证

由定理2.2.3（p.g.50）可知$\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$。

将其标准化得$\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma \sim N(0, 1)$。

又$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且$\bar{X}$和$S^2$独立，按$t$分布的定义2.3.2有

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - a}{S} \sim t_{n-1}.$$

$\square$

推论 (2.3.4)

设$X_1, X_2, \ldots, X_m \ i.i.d. \sim N(a_1, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \ i.i.d. \sim N(a_2, \sigma^2)$，且样本$X_1, X_2, \ldots, X_m$与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$独立，则

推论 (2.3.4)

设$X_1, X_2, \dots, X_m$ $i.i.d. \sim N(a_1, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ $i.i.d. \sim N(a_2, \sigma^2)$，且样本$X_1, X_2, \dots, X_m$与$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$独立，则

$$T_w = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{S_w} \cdot \sqrt{\frac{mn}{n+m}} \sim t_{n+m-2},$$

其中$(n+m-2)S_w^2 = (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2$，此处

2.3.4 几个重要推论

推论 (2.3.4)

设$X_1, X_2, \ldots, X_m \ i.i.d. \sim N(a_1, \sigma^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \ i.i.d. \sim N(a_2, \sigma^2)$，且样本$X_1, X_2, \ldots, X_m$与$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$独立，则

$$T_w = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{S_w} \cdot \sqrt{\frac{mn}{n+m}} \sim t_{n+m-2},$$

其中$(n+m-2)S_w^2 = (m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2$，此处

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2, \ S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2.$$

证

由定理2.2.3可知$\bar{X} \sim N(a_1, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(a_2, \sigma^2/n)$，故有$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(a_1 - a_2, \frac{(n+m)\sigma^2}{nm})$。

证

由定理2.2.3可知$\bar{X} \sim N(a_1, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(a_2, \sigma^2/n)$，故

有$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(a_1 - a_2, \frac{(n+m)\sigma^2}{nm})$。

将其标准化得

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0, 1). \tag{1}$$

证

由定理2.2.3可知$\bar{X} \sim N(a_1, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(a_2, \sigma^2/n)$，故

有$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(a_1 - a_2, \frac{(n+m)\sigma^2}{nm})$。

将其标准化得

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sigma} \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0, 1). \tag{1}$$

又$(m-1)S_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

证

由定理2.2.3可知$\bar{X} \sim N(a_1, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(a_2, \sigma^2/n)$，故

有$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(a_1 - a_2, \frac{(n+m)\sigma^2}{nm})$。

将其标准化得

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0,1). \tag{1}$$

又$(m-1)S_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

利用χ^2分布的性质可知

证

由定理2.2.3可知$\bar{X} \sim N(a_1, \sigma^2/m)$，$\bar{Y} \sim N(a_2, \sigma^2/n)$，故

有$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(a_1 - a_2, \frac{(n+m)\sigma^2}{nm})$。

将其标准化得

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \sim N(0,1). \tag{1}$$

又$(m-1)S_1^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

利用χ^2分布的性质可知

$$\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2}. \tag{2}$$

再由式（1）和式（2）中$(\bar{X},\bar{Y})$与(S_1^2,S_2^2)相互独立，由t变量的定义可知

再由式（1）和式（2）中$(\bar{X},\bar{Y})$与(S_1^2,S_2^2)相互独立，由t变量的定义可知

$$T_w = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(a_1-a_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\Big/\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{\sigma^2(n+m-2)}}$$

再由式（1）和式（2）中$(\bar{X},\bar{Y})$与(S_1^2,S_2^2)相互独立，由t变量的定义可知

$$
\begin{aligned}
T_w =& \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(a_1-a_2)}{\sigma}\sqrt{\frac{mn}{m+n}} \Big/ \sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{\sigma^2(n+m-2)}} \\
=& \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(a_1-a_2)}{S_w}\sqrt{\frac{nm}{m+n}} \sim t_{n+m-2}.
\end{aligned}
$$

□

2.3.4 几个重要推论

推论 (2.3.5)

设$X_1, X_2, \ldots, X_m$ $i.i.d. \sim N(a_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ $i.i.d. \sim N(a_2, \sigma_2^2)$，且样本$X_1, X_2, \ldots, X_m$和$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$独立，则

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1},$$

此处S_1^2和S_2^2定义如推论*2.3.4*所述。

证

由定理2.2.3可知$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

证

由定理2.2.3可知$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

由F分布的定义可知

证

由定理2.2.3可知$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{m-1}^2$，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi_{n-1}^2$，且二者独立。

由F分布的定义可知

$$F = \frac{\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} =$$

证

由定理2.2.3可知$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_{m-1}^2$，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi_{n-1}^2$，且二者独立。

由F分布的定义可知

$$F=\frac{\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$$

证

由定理2.2.3可知$(m-1)S_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi^2_{m-1}$，$(n-1)S_2^2/\sigma_2^2 \sim \chi^2_{n-1}$，且二者独立。

由F分布的定义可知

$$F = \frac{\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

□