

数理统计  
第二章  
抽样分布及若干预备知识

2026 年 3 月 16 日

## 1 2.1 引言

## 2 2.2 正态总体样本均值和样本方差的分布

- 2.2.1 正态变量线性函数的分布
- 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

## 2.1 引言

- 样本是随机变量，有一定的概率分布，称为**样本分布**。

## 2.1 引言

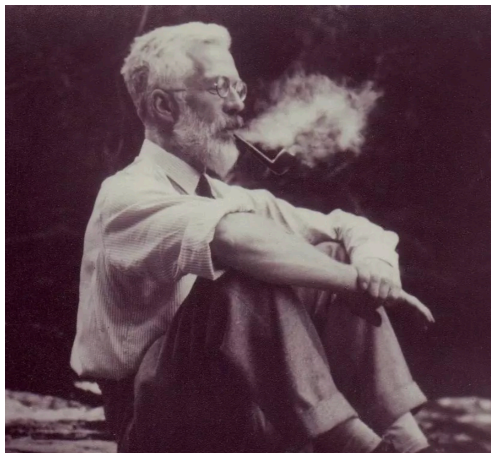
- 样本是随机变量，有一定的概率分布，称为**样本分布**。
- 统计量是样本的函数，故它也是随机变量，也有其概率分布。这个概率分布原则上可由样本分布导出。统计量的概率分布称为**抽样分布**。

## 2.1 引言

- 样本是随机变量，有一定的概率分布，称为**样本分布**。
- 统计量是样本的函数，故它也是随机变量，也有其概率分布。这个概率分布原则上可由样本分布导出。统计量的概率分布称为**抽样分布**。
- 研究统计量的性质和评价一个统计推断方法的优良性，完全取决于其抽样分布的性质。确定种种统计量的抽样分布是数理统计学的一项基本问题，也是较难的问题。

## 2.1 引言

- 近代统计学的奠基人之一，英国统计学家 R. A. Fisher 曾把**抽样分布**、**参数估计**和**假设检验**看作统计推断的三个中心内容。



## 2.1 引言

- 当总体 $X$ 的分布类型已知时，若对任一自然数 $n$ ，都能导出统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 分布的表达式，这种分布称为 $T$ 的**精确抽样分布**。

## 2.1 引言

- 当总体 $X$ 的分布类型已知时，若对任一自然数 $n$ ，都能导出统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 分布的表达式，这种分布称为 $T$ 的**精确抽样分布**。
- 能求出统计量精确分布的情形不多。已知的精确抽样分布大多是在正态条件下得到的。有些情形下虽能求出统计量的精确分布，但其表达式太复杂，使用上不方便。

## 2.1 引言

- 当总体 $X$ 的分布类型已知时，若对任一自然数 $n$ ，都能导出统计量 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 分布的表达式，这种分布称为 $T$ 的**精确抽样分布**。
- 能求出统计量精确分布的情形不多。已知的精确抽样分布大多是在正态条件下得到的。有些情形下虽能求出统计量的精确分布，但其表达式太复杂，使用上不方便。
- 在更多的情形下统计量的精确抽样分布很难求出，作为替代方法，研究其**极限分布**。当样本容量 $n \rightarrow \infty$ 时统计量的分布称为极限分布。只要样本容量足够大，且极限分布的形式比较简单，就可以用统计量的极限分布作为其精确分布的近似。

### 本章内容:

- ① 正态总体样本均值和样本方差的分布
- ②  $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布和 $F$ 分布
- ③ 次序统计量的分布
- ④ 统计量的极限分布
- ⑤ 充分统计量

## 1 2.1 引言

## 2 2.2 正态总体样本均值和样本方差的分布

- 2.2.1 正态变量线性函数的分布
- 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

先讨论正态变量的线性组合的分布。

### 定理 (2.2.1)

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且 $X_k \sim N(a_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。

令 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为常数, 记 $T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ , 则 $T \sim N(\mu, \tau^2)$ , 其

中 $\mu = \sum_{k=1}^n c_k a_k$ ,  $\tau^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

先讨论正态变量的线性组合的分布。

### 定理 (2.2.1)

设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且  $X_k \sim N(a_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。

令  $c_1, c_2, \dots, c_n$  为常数, 记  $T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$ , 则  $T \sim N(\mu, \tau^2)$ , 其

中  $\mu = \sum_{k=1}^n c_k a_k$ ,  $\tau^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$ 。

证 因  $X_k \sim N(a_k, \sigma_k^2)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , 故其特征函数 (c.f.) 为

$$\phi_{X_k}(t) = E(e^{itX_k}) = e^{ia_k t - \frac{1}{2}t^2 \sigma_k^2},$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

由特征函数的性质， $n$ 个独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积，可得到 $T$ 的 c.f. 为

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

由特征函数的性质， $n$ 个独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积，可得到 $T$ 的 c.f. 为

$$\phi_T(t) = E(e^{itT}) = E(e^{it \sum_{k=1}^n c_k X_k}) = \prod_{k=1}^n E[e^{i(c_k t) X_k}] = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(c_k t)$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

由特征函数的性质， $n$ 个独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积，可得到 $T$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned}\phi_T(t) &= E(e^{itT}) = E(e^{it \sum_{k=1}^n c_k X_k}) = \prod_{k=1}^n E[e^{i(c_k t) X_k}] = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(c_k t) \\ &= \prod_{k=1}^n (e^{i c_k a_k t - \frac{1}{2} t^2 c_k^2 \sigma_k^2}) = e^{it(\sum_{k=1}^n c_k a_k) - \frac{1}{2} t^2 (\sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2)}.\end{aligned}$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

由特征函数的性质， $n$ 个独立的随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积，可得到 $T$ 的 c.f. 为

$$\begin{aligned}\phi_T(t) &= E(e^{itT}) = E(e^{it \sum_{k=1}^n c_k X_k}) = \prod_{k=1}^n E[e^{i(c_k t) X_k}] = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(c_k t) \\ &= \prod_{k=1}^n (e^{i c_k a_k t - \frac{1}{2} t^2 c_k^2 \sigma_k^2}) = e^{it(\sum_{k=1}^n c_k a_k) - \frac{1}{2} t^2 (\sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2)}.\end{aligned}$$

由特征函数的唯一性定理（分布函数由其特征函数唯一决定）可知，

$T \sim N(\mu, \tau^2)$ ，其中  $\mu = \sum_{k=1}^n c_k a_k$ ， $\tau^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$ 。 □

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

利用此定理，容易得到如下推论。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

利用此定理，容易得到如下推论。

### 推论 (2.2.1)

在定理2.2.1中，若 $a_1 = \cdots = a_n = a$ ， $\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ ，则有

$$T \sim N \left( a \sum_{k=1}^n c_k, \sigma^2 \sum_{k=1}^n c_k^2 \right).$$

若进一步假定 $c_1 = \cdots = c_n = 1/n$ ，则 $T = \sum_{k=1}^n X_k/n = \bar{X}$ ，且有

$$\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n).$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

对独立同分布的正态变量的线性变换，有如下结论。

### 定理 (2.2.2)

设  $X_1, \dots, X_n$  *i.i.d.*  $\sim N(a, \sigma^2)$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ,

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$ ,  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为  $n \times n$  的常数方阵，记  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ，即

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad (1)$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

### 定理 (2.2.2 (续))

则有

(1)  $Y_1, \dots, Y_n$  也是正态随机变量, 且

$$E(Y_i) = a \sum_{k=1}^n a_{ik}, \quad D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2,$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}.$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

### 定理 (2.2.2 (续))

则有

(1)  $Y_1, \dots, Y_n$  也是正态随机变量, 且

$$E(Y_i) = a \sum_{k=1}^n a_{ik}, \quad D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2,$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}.$$

(2) 特别当  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶正交阵时,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  也相互独立且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ , 此处  $\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

### 定理 (2.2.2 (续))

(3) 若再进一步假定  $a = 0$ , 则  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  *i.i.d.*  $\sim N(0, \sigma^2)$ 。此事实说明: 独立同分布的正态分布  $N(0, \sigma^2)$  随机变量经正交变换后仍变为独立同分布的  $N(0, \sigma^2)$  的随机变量。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

证 (1) 由式(1)可知  $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 再由推论2.2.1可知

$$Y_i \sim N \left( a \sum_{k=1}^n a_{ik}, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 \right).$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

证 (1) 由式(1)可知 $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 再由推论2.2.1可知

$$Y_i \sim N \left( a \sum_{k=1}^n a_{ik}, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 \right).$$

因此有 $E(Y_i) = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

证 (1) 由式(1)可知 $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 再由推论2.2.1可知

$$Y_i \sim N \left( a \sum_{k=1}^n a_{ik}, \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right).$$

因此有 $E(Y_i) = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$ 。

同理有 $Y_j = \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell} X_{\ell} \sim N(a \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}, \sigma^2 \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}^2)$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

而

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = E[(Y_i - EY_i)(Y_j - EY_j)]$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

而

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= E[(Y_i - EY_i)(Y_j - EY_j)] \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}X_k - a \sum_{k=1}^n a_{ik}\right)\left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}X_{\ell} - a \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}\right) \end{aligned}$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

而

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= E[(Y_i - EY_i)(Y_j - EY_j)] \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}X_k - a \sum_{k=1}^n a_{ik}\right)\left(\sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}X_\ell - a \sum_{\ell=1}^n a_{j\ell}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik}a_{j\ell}E[(X_k - a)(X_\ell - a)] \end{aligned}$$

由 $X_1, \dots, X_n$ 是服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 的独立同分布的随机变量可知，当 $k = \ell$ 时， $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = \text{Var}(X_k) = \sigma^2$ ，而当 $k \neq \ell$ 时， $\text{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

因此，可得到

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

因此，可得到

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} E[(X_k - a)(X_\ell - a)]$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

因此, 可得到

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} E[(X_k - a)(X_\ell - a)] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} \cdot \delta_{k\ell} \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}, \end{aligned}$$

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

因此, 可得到

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} E[(X_k - a)(X_\ell - a)] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} \cdot \delta_{k\ell} \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}, \end{aligned}$$

此处  $\delta_{kl} = 1$ , 当  $k = \ell$ ;  $\delta_{kl} = 0$ , 当  $k \neq \ell$ 。故 (1) 得证。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

(2) 当  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为  $n$  阶正交阵时,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = I_{n \times n}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

(2) 当  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为  $n$  阶正交阵时,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = I_{n \times n}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$ 。

已知  $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 由推论2.2.1可知  $\mu_i = E(Y_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k$ ,  
 $D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sigma^2$ , 且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

(2) 当  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶正交阵时,  $A^T A = I_{n \times n}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$ 。

已知  $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 由推论 2.2.1 可知  $\mu_i = E(Y_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k$ ,  
 $D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sigma^2$ , 且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ 。

又由正交阵  $A$  的不同行和列的正交性可知: 当  $i \neq j$  时,

$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0$ , 故  $Cov(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0$ 。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

(2) 当  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶正交阵时,  $A^T A = I_{n \times n}$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$ 。

已知  $Y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k$ , 由推论 2.2.1 可知  $\mu_i = E(Y_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k$ ,  
 $D(Y_i) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sigma^2$ , 且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ 。

又由正交阵  $A$  的不同行和列的正交性可知: 当  $i \neq j$  时,

$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0$ , 故  $Cov(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = 0$ 。

因此  $Y_1, \dots, Y_n$  相互独立且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ 。从而定理中的 (2) 得证。

## 2.2.1 正态变量线性函数的分布

(3) 特别若 $a = 0$ , 由(2) 显见 $\mu_i = 0, i = 1, \dots, n$ , 故此  
时 $Y_1, \dots, Y_n$  *i.i.d.*  $\sim N(0, \sigma^2)$ , 故定理中的(3) 得证。 □

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

下述定理给出了正态变量样本均值和样本方差的分布和它们的独立性。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

下述定理给出了正态变量样本均值和样本方差的分布和它们的独立性。

### 定理 (2.2.3)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n, i.i.d. \sim N(a, \sigma^2)$ ,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$  和  $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$  分别为样本均值和样本方差, 则有

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

下述定理给出了正态变量样本均值和样本方差的分布和它们的独立性。

### 定理 (2.2.3)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n, i.i.d. \sim N(a, \sigma^2)$ ,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$  和  $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$  分别为样本均值和样本方差, 则有

- (1)  $\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$ ;
- (2)  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ ;
- (3)  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

下述定理给出了正态变量样本均值和样本方差的分布和它们的独立性。

### 定理 (2.2.3)

设  $X_1, X_2, \dots, X_n, i.i.d. \sim N(a, \sigma^2)$ ,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$  和  $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}$  分别为样本均值和样本方差, 则有

(1)  $\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$ ;

(2)  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ ;

(3)  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立。

此处  $\chi_{n-1}^2$  表示自由度为  $n-1$  的卡方分布, 它是通过  $n-1$  个相互独立的标准正态随机变量平方和的分布来定义的 (参见定义 2.3.1)。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

证 (1) 令  $a_k = a$ ,  $c_k = \frac{1}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , 由推论 2.2.1 可得  $\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$ 。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

证 (1) 令  $a_k = a$ ,  $c_k = \frac{1}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , 由推论 2.2.1 可得  $\bar{X} \sim N(a, \sigma^2/n)$ 。

下面证 (2) 和 (3)。设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为一正交阵。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

作正交变换 $Y = AX$ ，其中 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ 和 $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ，  
故有

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

作正交变换 $Y = AX$ ，其中 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ 和 $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ ，  
故有

$$Y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(X_1, \dots, X_n)^T = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n}\bar{X}.$$

所以 $Y_1^2 = n\bar{X}^2$ 。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由正交变换保持向量长度不变，即

$$Y^T Y = (AX)^T (AX) = X^T A^T A X = X^T (A^T A) X = X^T X,$$

可知

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2.$$

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由正交变换保持向量长度不变，即

$$Y^T Y = (AX)^T (AX) = X^T A^T A X = X^T (A^T A) X = X^T X,$$

可知

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2.$$

所以

$$\begin{aligned} (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2. \end{aligned} \tag{2}$$

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由定理 2.2.2 (2) 可知  $Y_1, \dots, Y_n$  相互独立且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ , 这里  $\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由定理 2.2.2 (2) 可知  $Y_1, \dots, Y_n$  相互独立且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ , 这里  $\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

再由  $A$  的行向量正交性得

$$\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik} = \sqrt{na} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot a_{ik} = 0, \quad (3)$$

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由定理 2.2.2 (2) 可知  $Y_1, \dots, Y_n$  相互独立且  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ , 这里  $\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

再由  $A$  的行向量正交性得

$$\mu_i = a \sum_{k=1}^n a_{ik} = \sqrt{na} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot a_{ik} = 0, \quad (3)$$

即  $Y_2, \dots, Y_n$  *i.i.d.*  $\sim N(0, \sigma^2)$ , 故  $Y_2/\sigma, \dots, Y_n/\sigma$  *i.i.d.*  $\sim N(0, 1)$ 。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由式 (2)  $(n-1)S^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2$  可得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n (Y_i/\sigma)^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

故 (2) 得证。

## 2.2.2 正态变量样本均值和样本方差的分布

由式 (2)  $(n-1)S^2 = \sum_{i=2}^n Y_i^2$  可得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^n (Y_i/\sigma)^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

故 (2) 得证。

由上述 (2) 的证明中可知  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立, 而  $S^2$  只和  $Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  有关,  $\bar{X}$  只和  $Y_1$  有关, 因此  $\bar{X}$  和  $S^2$  独立, 故 (3) 得证。

□