数理统计
第三章
点估计

2026 年 4 月 13 日

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

矩法：是由K.Pearson在1894年提出的点估计的古老方法。

矩法：是由K.Pearson在1894年提出的点估计的古老方法。

它的特点是：直观性强，用此法获得估计量简便、易行，且不要求事先知道总体的分布，在一定条件下矩估计量还具有相合性和渐近正态性。

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

矩法：是由K.Pearson在1894年提出的点估计的古老方法。

它的特点是：直观性强，用此法获得估计量简便、易行，且不要求事先知道总体的分布，在一定条件下矩估计量还具有相合性和渐近正态性。

它的缺点是：在参数分布族场合，没有充分利用提供的有关参数的信息，小样本性质不突出。此外，矩估计量不具有唯一性。

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

下面讨论矩估计的无偏性和渐近无偏性。

下面讨论矩估计的无偏性和渐近无偏性。

（1）样本k阶原点矩a_{nk}是总体k阶原点矩α_k（$k=1,2,\ldots$）的无偏估计。

下面讨论矩估计的无偏性和渐近无偏性。

（1）样本k阶原点矩a_{nk}是总体k阶原点矩α_k（$k = 1, 2, \ldots$）的无偏估计。

由

$$E(a_{nk}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_k = \alpha_k,$$

下面讨论矩估计的无偏性和渐近无偏性。

（1）样本k阶原点矩a_{nk}是总体k阶原点矩α_k（$k=1,2,\ldots$）的无偏估计。

由

$$E(a_{nk})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k=\alpha_k,$$

即可得到该结论。

（2）对$k \geq 2$，样本k阶中心矩不是总体k阶中心距的无偏估计。

（2）对$k \geq 2$，样本k阶中心矩不是总体k阶中心距的无偏估计。

（i）由例3.2.1可知

（2）对$k \geq 2$，样本k阶中心矩不是总体k阶中心距的无偏估计。

（i）由例3.2.1可知

$$E(m_{n2}) = \frac{n-1}{n}\mu_2,$$

（2）对$k \geq 2$，样本k阶中心矩不是总体k阶中心距的无偏估计。

（i）由例3.2.1可知

$$E(m_{n2}) = \frac{n-1}{n}\mu_2,$$

将其修正，得

（2）对$k \geq 2$，样本k阶中心矩不是总体k阶中心距的无偏估计。

（i）由例3.2.1可知

$$E(m_{n2}) = \frac{n-1}{n}\mu_2,$$

将其修正，得

$$m_{n2}^* = S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot m_{n2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

是μ_2的无偏估计。

（ii）经过计算可知样本3阶中心矩m_{n3}也不是总体3阶中心距μ_3的无偏估计，事实上，

（ii）经过计算可知样本3阶中心矩m_{n3}也不是总体3阶中心距μ_3的无偏估计，事实上，

$$E(m_{n3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3. \tag{1}$$

（ii）经过计算可知样本3阶中心矩m_{n3}也不是总体3阶中心距μ_3的无偏估计，事实上，

$$E(m_{n3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3. \tag{1}$$

证明如下：不妨设$\alpha_1 = E(X) = 0$，则有

$\mu_2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \alpha_2$，并且

（ii）经过计算可知样本3阶中心矩m_{n3}也不是总体3阶中心距μ_3的无偏估计，事实上，

$$E(m_{n3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3. \tag{1}$$

证明如下：不妨设$\alpha_1 = E(X) = 0$，则有

$\mu_2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \alpha_2$，并且

$$E(m_{n3}) = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3\right]$$

$$=$$

（ii）经过计算可知样本3阶中心矩m_{n3}也不是总体3阶中心距μ_3的无偏估计，事实上，

$$E(m_{n3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3. \tag{1}$$

证明如下：不妨设$\alpha_1 = E(X) = 0$，则有

$\mu_2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \alpha_2$，并且

$$\begin{aligned} E(m_{n3}) =& \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3\right] \\ =& \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^3 - 3X_i^2\bar{X} + 3X_i\bar{X}^2 - \bar{X}^3)\right] \end{aligned}$$

$$=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{i=1}^{n}X_i$$
$$+\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}X_i(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2-\frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^3]$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
=&E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{i=1}^{n}X_i \\
&+\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}X_i(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2-\frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^3] \\
=&E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i^3+\binom{n}{2}2!X_i^2X_j) \\
&+\frac{2}{n^3}(\sum_{i=1}^{n}X_i^3+\binom{n}{2}\binom{3}{2}2!X_i^2X_j+\binom{n}{3}3!X_iX_jX_k)] \\
=&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sum_{i=1}^{n}X_i \\
&+\frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}X_i(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2-\frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^3] \\
=&E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i^3+\binom{n}{2}2!X_i^2X_j) \\
&+\frac{2}{n^3}(\sum_{i=1}^{n}X_i^3+\binom{n}{2}\binom{3}{2}2!X_i^2X_j+\binom{n}{3}3!X_iX_jX_k)] \\
=&E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^3-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^3+\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}X_i^3)
\end{aligned}
$$

$$=\mu_3 - \frac{3}{n}\mu_3 + \frac{2}{n^2}\mu_3$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&=\mu_3-\frac{3}{n}\mu_3+\frac{2}{n^2}\mu_3\\
&=\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\mu_3=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_3 - \frac{3}{n}\mu_3 + \frac{2}{n^2}\mu_3 \\
&= \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\mu_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3.
\end{aligned}
$$

将矩估计m_{n3}修正，得

$$
\begin{aligned}
&= \mu_3 - \frac{3}{n}\mu_3 + \frac{2}{n^2}\mu_3 \\
&= \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)\mu_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3.
\end{aligned}
$$

将矩估计m_{n3}修正，得

$$
m_{n3}^* = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_{n3},
$$

它是μ_3的无偏估计。 □

（iii）更进一步，可以证明对$k \geq 4$有

（iii）更进一步，可以证明对$k \geq 4$有

$$E(m_{nk}) = \mu_k + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

（iii）更进一步，可以证明对$k \geq 4$有

$$E(m_{nk}) = \mu_k + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

因此对$k \geq 4$，m_{nk}也不是总体k阶中心矩μ_k的无偏估计。

（iii）更进一步，可以证明对$k \geq 4$有

$$E(m_{nk}) = \mu_k + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

因此对$k \geq 4$，m_{nk}也不是总体k阶中心矩μ_k的无偏估计。证明略。

（3）当待估函数$g(\theta)$为总体分布一些矩的函数时，即

（3）当待估函数$g(\theta)$为总体分布一些矩的函数时，即

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \mu_2, \cdots, \mu_s) \tag{3}$$

时，

（3）当待估函数$g(\theta)$为总体分布一些矩的函数时，即

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \mu_2, \cdots, \mu_s) \tag{3}$$

时，矩估计

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \cdots, a_{nk};\ m_{n2}, \cdots, m_{ns}) \tag{4}$$

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

（3）当待估函数$g(\theta)$为总体分布一些矩的函数时，即

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \cdots, \alpha_k; \mu_2, \cdots, \mu_s) \tag{3}$$

时，矩估计

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \cdots, a_{nk};\ m_{n2}, \cdots, m_{ns}) \tag{4}$$

一般不是$g(\theta)$的无偏估计。

但若$g(\theta)$为若干总体原点矩的线性组合时，即

$$g(\theta) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i$$

时，

但若$g(\theta)$为若干总体原点矩的线性组合时，即

$$g(\theta) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i$$

时，其矩估计

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ni}$$

是$g(\theta)$的无偏估计。

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

（4）矩估计一般具有渐近无偏性。

（4）矩估计一般具有渐近无偏性。

由下式

（4）矩估计一般具有渐近无偏性。

由下式

$$\lim_{n\to\infty} E(m_{n2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\mu_2 = \mu_2,$$
$$\lim_{n\to\infty} E(m_{n3}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3 = \mu_3,$$
$$\lim_{n\to\infty} E(m_{nv}) = \lim_{n\to\infty} \left[\mu_v + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \mu_v, \quad v \geq 4,$$

（4）矩估计一般具有渐近无偏性。

由下式

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E(m_{n2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\mu_2 = \mu_2, \\
\lim_{n\to\infty} E(m_{n3}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3 = \mu_3, \\
\lim_{n\to\infty} E(m_{nv}) &= \lim_{n\to\infty} \left[\mu_v + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \mu_v, \quad v \geq 4,
\end{aligned}
$$

可见m_{nv} $(v \geq 2)$是总体v阶中心矩μ_v的渐近无偏估计。

那么，当待估参数为

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s)$$

时，

那么，当待估参数为

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s)$$

时，其矩估计

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \ldots, a_{nk}; m_{n2}, \ldots, m_{ns})$$

是否具有渐近无偏性？

那么，当待估参数为

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s)$$

时，其矩估计

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \ldots, a_{nk}; m_{n2}, \ldots, m_{ns})$$

是否具有渐近无偏性？

可以证明对函数G加上适当的条件，这个结论是对的。(证明略)

例 (3.2.9)

设$X_1, \ldots, X_n$ $(n > 1)$ $i.i.d.$ $\sim$指数分布$Exp(\lambda)$，其密度为$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{[x>0]}$。求$\lambda$的矩估计量$\hat{\lambda}$，并讨论它的无偏性。

例 (3.2.9)

设$X_1, \ldots, X_n$ $(n > 1)$ $i.i.d.$ $\sim$指数分布$Exp(\lambda)$，其密度为$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{[x>0]}$。求$\lambda$的矩估计量$\hat{\lambda}$，并讨论它的无偏性。

解 由于$\alpha_1 = \int_0^\infty x f_\lambda(x) dx = 1/\lambda$，解得$\lambda = 1/\alpha_1$，将$\alpha_1$用其矩估计量$a_{n1} = \bar{X}$代入，得到$\lambda$的矩估计量为

例 (3.2.9)

设$X_1, \ldots, X_n$ $(n > 1)$ $i.i.d.$ $\sim$指数分布$Exp(\lambda)$，其密度为$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{[x>0]}$。求$\lambda$的矩估计量$\hat{\lambda}$，并讨论它的无偏性。

解 由于$\alpha_1 = \int_0^\infty x f_\lambda(x) dx = 1/\lambda$，解得$\lambda = 1/\alpha_1$，将$\alpha_1$用其矩估计量$a_{n1} = \bar{X}$代入，得到$\lambda$的矩估计量为

$$\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{\bar{X}}.$$

已知$X_i\ i.i.d. \sim \Gamma(1,\lambda)$，由伽马分布的再生性可知

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

已知$X_i\ i.i.d. \sim \Gamma(1,\lambda)$，由伽马分布的再生性可知

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda).$$

已知$X_i\ i.i.d. \sim \Gamma(1,\lambda)$，由伽马分布的再生性可知

$$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda).$$

经计算

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

已知$X_i\ i.i.d. \sim \Gamma(1, \lambda)$，由伽马分布的再生性可知

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda).$$

经计算

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) = nE\left(\frac{1}{Y}\right)$$
$$= n\int_0^{\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy = \frac{n}{n-1}\lambda \neq \lambda,$$

已知X_i $i.i.d. \sim \Gamma(1,\lambda)$，由伽马分布的再生性可知

$$Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda).$$

经计算

$$\begin{aligned}E(\hat{\lambda}) &= E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)=nE\left(\frac{1}{Y}\right)\\ &=n\int_0^{\infty}\frac{1}{y}\cdot\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\lambda y}dy=\frac{n}{n-1}\lambda\neq\lambda,\end{aligned}$$

可见$\hat{\lambda}(X_1,\ldots,X_n)=1/\bar{X}$不是$\lambda$的无偏估计。

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

因此矩估计量不一定都有无偏性。

3.2.3 矩估计的无偏性和渐近无偏性

因此矩估计量不一定都有无偏性。

但

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n-1}\cdot\lambda\right] = \lambda,$$

因此矩估计量不一定都有无偏性。

但

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n-1}\cdot\lambda\right] = \lambda,$$

故$\hat{\lambda}(X_1,\ldots,X_n)$是$\lambda$的渐近无偏估计。

因此矩估计量不一定都有无偏性。

但

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n-1} \cdot \lambda \right] = \lambda,$$

故$\hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$是$\lambda$的渐近无偏估计。

对$\hat{\lambda}$略作修正，可得λ的一个无偏估计

$$\hat{\lambda}^*(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \hat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\bar{X}}.$$

$\square$

3.2.4 矩估计的相合性

估计量的几种相合性的定义在3.1节中给出。

3.2.4 矩估计的相合性

估计量的几种相合性的定义在3.1节中给出。

一般说来，矩估计在较一般的条件下具有相合性。

3.2.4 矩估计的相合性

估计量的几种相合性的定义在3.1节中给出。

一般说来，矩估计在较一般的条件下具有相合性。

此处给出矩估计的强相合性，显然相应的矩估计的弱相合性也成立。

3.2.4 矩估计的相合性

估计量的几种相合性的定义在3.1节中给出。

一般说来，矩估计在较一般的条件下具有相合性。

此处给出矩估计的强相合性，显然相应的矩估计的弱相合性也成立。

定义 (A.8 连续映射定理（回顾）)

（1）若$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$以及$g$是连续函数，则$g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$。

（2）若$X_n \xrightarrow{a.s.} X$以及g是连续函数，则$g(X_n) \xrightarrow{a.s.} g(X)$。

（3）若$X_n \xrightarrow{P} X$以及g是连续函数，则$g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$。

（1）样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计。

3.2.4 矩估计的相合性

（1）样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计。

设$X_1, \ldots, X_n$是从总体F中抽取的简单样本，a_{nk}为样本的k阶原点矩，α_k为总体的k阶原点矩。

（1）样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计。

设$X_1, \ldots, X_n$是从总体F中抽取的简单样本，a_{nk}为样本的k阶原点矩，α_k为总体的k阶原点矩。

由独立同分布场合的柯尔莫哥洛夫强大数律可知

$$a_{nk} \xrightarrow{a.s.} \alpha_k, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

3.2.4 矩估计的相合性

（1）样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计。

设$X_1, \ldots, X_n$是从总体F中抽取的简单样本，a_{nk}为样本的k阶原点矩，α_k为总体的k阶原点矩。

由独立同分布场合的柯尔莫哥洛夫强大数律可知

$$a_{nk} \xrightarrow{a.s.} \alpha_k, \ k = 1, 2, \ldots,$$

即

$$P(\lim_{n \to \infty} a_{nk} = \alpha_k) = 1, \ k = 1, 2, \ldots.$$

3.2.4 矩估计的相合性

（2）样本k阶中心矩是总体k阶中心矩的强相合估计。

（2）样本k阶中心矩是总体k阶中心矩的强相合估计。

附录中的连续映射定理结论是对一元连续函数成立，我们把它推广到下列多元连续函数情形：

（2）样本k阶中心矩是总体k阶中心矩的强相合估计。

附录中的连续映射定理结论是对一元连续函数成立，我们把它推广到下列多元连续函数情形：

推论 (连续映射定理的多元连续函数情形)

设函数$f(y_1,\ldots,y_k)$在$(c_1,\ldots,c_k)$处连续，若

$$y_{n1}\xrightarrow{a.s.}c_1,\ldots,y_{nk}\xrightarrow{a.s.}c_k,$$

则

$$f(y_{n1},\ldots,y_{nk})\xrightarrow{a.s.}f(c_1,c_2,\ldots,c_k).$$

利用这一事实证明上述结论。证明如下：

利用这一事实证明上述结论。证明如下：

由于

利用这一事实证明上述结论。证明如下：

由于

$$\mu_k=\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\alpha_r\alpha_1^{k-r}=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k),$$

显见$f(\cdot)$是其变元的连续函数。

由$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i$，$i = 1, \ldots, k$，利用式

3.2.4 矩估计的相合性

由$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i$，$i = 1, \ldots, k$，利用式

$$m_{nk} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} a_{nr} a_{n1}^{k-r}$$

3.2.4 矩估计的相合性

由$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i$，$i = 1, \ldots, k$，利用式

$$m_{nk} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} a_{nr} a_{n1}^{k-r}$$

可得到

3.2.4 矩估计的相合性

由$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i$，$i = 1, \dots, k$，利用式

$$m_{nk} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} a_{nr} a_{n1}^{k-r}$$

可得到

$$m_{nk} = f(a_{n1}, \dots, a_{nk}) \xrightarrow{a.s.} f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \mu_k, \ k = 2, 3, \dots,$$

这就证明了结论。 □

3.2.4 矩估计的相合性

（3）设$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s)$，其矩估计为

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \ldots, a_{nk}; m_{n2}, \ldots, m_{ns}).$$

（3）设$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s)$，其矩估计为

$$\hat{g}(X_1, \ldots, X_n) = G(a_{n1}, \ldots, a_{nk}; m_{n2}, \ldots, m_{ns}).$$

关于此类矩估计的强相合性有下述定理。

定理 (3.2.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为从总体$F$中抽取的简单样本，待估函数

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; \mu_2, \ldots, \mu_s),$$

定理 (3.2.1)

设$\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$为从总体$F$中抽取的简单样本，待估函数

$$g(\theta) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \mu_2, \dots, \mu_s),$$

其矩估计量为

$$\hat{g}_n(\boldsymbol{X}) = G(a_{n1}, \dots, a_{nk}; m_{n2}, \dots, m_{ns}),$$

且G为其变元的连续函数，则$\hat{g}_n(\boldsymbol{X})$为$g(\theta)$之强相合估计。

证

由样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计（性质1）可知

$$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i,\ i = 1, \ldots, k.$$

证

由样本k阶原点矩是总体k阶原点矩的强相合估计（性质1）可知

$$a_{ni} \xrightarrow{a.s.} \alpha_i,\ i = 1, \ldots, k.$$

再由样本k阶中心矩是总体k阶中心矩的强相合估计（性质2）可知

$$m_{nj} \xrightarrow{a.s.} \mu_j,\ j = 2, \ldots, s.$$

已知矩估计量$\hat{g}_n(\boldsymbol{X}) = G(a_{n1}, \ldots, a_{nk}; m_{n2}, \ldots, m_{ns})$，且$G$是其变元的连续函数，立即可得

$$\hat{g}_n(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{a.s.} g(\theta).$$

□

3.2.4 矩估计的相合性

由这一定理可得出一些常见估计的相合性。

3.2.4 矩估计的相合性

由这一定理可得出一些常见估计的相合性。

例如，正态总体$N(a,\sigma^2)$中，样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是a和σ^2的强相合估计。

由这一定理可得出一些常见估计的相合性。

例如，正态总体$N(a,\sigma^2)$中，样本均值$\bar{X}$和样本方差S^2分别是a和σ^2的强相合估计。

证明： 由矩估计的相合性可知

$$\bar{X} = a_{n1} \xrightarrow{a.s.} \alpha_1 = a,\ n \to \infty,$$
$$S^2 = \frac{n}{n-1} m_{n2} \xrightarrow{a.s.} \mu_2 = E(X - E(X))^2 = \sigma^2,\ n \to \infty.$$

$\square$

例如，S^2是σ^2的均方相合估计（$r=2$）。

证：

例如，S^2是σ^2的均方相合估计（$r = 2$）。

证：

参考教材定理2.2.3的证明，对$\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$作正交变换，

$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{A}$为正交阵，设

例如，S^2是σ^2的均方相合估计（$r=2$）。

证：

参考教材定理2.2.3的证明，对$\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$作正交变换，

$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{A}$为正交阵，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

3.2.4 矩估计的相合性

可知$Y_i \sim \ i.i.d. N(0,\sigma^2),\ i=2,\ldots,n$。令$Z=\sum_{i=2}^{n} Y_i^2/\sigma^2$，则$Z \sim \chi^2(n-1)$，并且有

3.2.4 矩估计的相合性

可知$Y_i \sim \ i.i.d. N(0,\sigma^2)$, $i = 2,\ldots,n$。令$Z = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2/\sigma^2$，
则$Z \sim \chi^2(n-1)$，并且有

$$E(Z^2) = Var(Z) + (EZ)^2 = 2(n-1) + (n-1)^2 = n^2 - 1.$$

可知$Y_i \sim \ i.i.d.N(0,\sigma^2)$, $i=2,\ldots,n$。令$Z=\sum\limits_{i=2}^{n} Y_i^2/\sigma^2$，
则$Z \sim \chi^2(n-1)$，并且有

$$E(Z^2)=Var(Z)+(EZ)^2=2(n-1)+(n-1)^2=n^2-1.$$

又因为$S^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}Y_i^2}{n-1}$，有

$$
\begin{aligned}
&E(S^2-\sigma^2)^2 = ES^4 - \sigma^4 \\
=&E\left(\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} Y_i^2}{n-1}\right)^2 - \sigma^4 = E\left(\frac{\sigma^4}{(n-1)^2} Z^2\right) - \sigma^4 \\
=&\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}(n^2-1) - \sigma^4 = \frac{2}{n-1}\sigma^4 \longrightarrow 0,\ \text{当} n \to \infty,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(S^2-\sigma^2)^2 &= ES^4-\sigma^4 \\
=&E\left(\frac{\sum\limits_{i=2}^{n} Y_i^2}{n-1}\right)^2-\sigma^4 = E\left(\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}Z^2\right)-\sigma^4 \\
=&\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}(n^2-1)-\sigma^4 = \frac{2}{n-1}\sigma^4 \longrightarrow 0,\ \text{当} n\to\infty,
\end{aligned}
$$

所以S^2是σ^2的均方相合估计。 $\square$

其实，对任何$r > 0$，S^2是σ^2的r阶矩相合估计（证明略）。

3.2.4 矩估计的相合性

其实，对任何$r > 0$，S^2是σ^2的r阶矩相合估计（证明略）。

在例3.2.5中定义的偏度、峰度和变异系数的矩估计都是强相合的。

例 (3.2.10)

证明例3.2.3中θ_1和θ_2的矩估计量分别是θ_1和θ_2的强相合估计。

例 (3.2.10)

证明例3.2.3中θ_1和θ_2的矩估计量分别是θ_1和θ_2的强相合估计。

证：

由例3.2.3知，总体$X\ i.i.d. \sim U(\theta_1, \theta_2)$，且$\theta_1$和$\theta_2$的矩估计量分别为

例 (3.2.10)

证明例3.2.3中θ_1和θ_2的矩估计量分别是θ_1和θ_2的强相合估计。

证:

由例3.2.3知，总体$X\ i.i.d. \sim U(\theta_1, \theta_2)$，且$\theta_1$和$\theta_2$的矩估计量分别为

$$\hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X} - \sqrt{3}S_n,$$

$$\hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X} - \sqrt{3}S_n.$$

3.2.4 矩估计的相合性

由强大数定律（矩估计的相合性：性质1和2）可知$\bar{X}$和S_n^2分别是$\alpha_1 = E(X)$和$\mu_2 = Var(X)$的强相合估计。

由强大数定律（矩估计的相合性：性质1和2）可知$\bar{X}$和S_n^2分别是$\alpha_1 = E(X)$和$\mu_2 = Var(X)$的强相合估计。

又$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是$\bar{X}$和S_n^2的连续函数，故由定理3.2.1（矩估计的相合性：性质3）可知，当$n \to \infty$时，

由强大数定律（矩估计的相合性：性质1和2）可知$\bar{X}$和S_n^2分别是$\alpha_1 = E(X)$和$\mu_2 = Var(X)$的强相合估计。

又$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是$\bar{X}$和S_n^2的连续函数，故由定理3.2.1（矩估计的相合性：性质3）可知，当$n \to \infty$时，

$$\hat{\theta}_1 \xrightarrow{a.s.} \alpha_1 - \sqrt{3\mu_2} = \theta_1,$$
$$\hat{\theta}_2 \xrightarrow{a.s.} \alpha_1 + \sqrt{3\mu_2} = \theta_2.$$

$\square$