2024017349　统计24-1班　李倩倩

3.11　《数理统计》　Chaper 1

1. 试举出一个有限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】: 总体：10岁儿童的可能的身高集合（身高数据的单位为cm, 保留到小数点后一位）。该总体的概率分布为正态分布。

2. 试举出一个无限总体的例子，并指出其概率分布. (2 分)

   【解】: 总体：对一个物体进行称重，一切可能出现的称量结果的集合（单位：g）。该总体的概率分布为正态分布。

3. 一个总体有 N 个元素，其指标分别为 $a_1 > a_2 > \cdots > a_N$，指定自然数 $M < N$，$n < N$，并设
$$m = \frac{nM}{N}$$
为整数. 在 $(a_1, a_2, \ldots, a_M)$ 中不放回地随机抽出 m 个，在 $(a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_N)$ 中不放回地随机抽出 $n-m$ 个. 写出所得样本的分布. (2 分)

   【解】: 得出的样本的分布为几何，其概率质量函数为
$$P(X=m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

4. 一物体的重量 a 未知，有两架天平可用，其随机误差分别服从正态分布 $N(0, \sigma_1^2)$ 和 $N(0, \sigma_2^2)$，其中 σ_1^2 和 σ_2^2 都未知. 先把物体在第一架天平上称两次得 X_1, X_2，再在第二架天平上称两次得 X_3, X_4，然后视 $|X_1 - X_2| \le |X_3 - X_4|$ 与否而在第一架或第二架天平上再称 $n-4$ 次得 $X_5, \ldots, X_n$. 写出 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的密度. (2 分)

   【解】: 易知正态分布的概率密度函数为$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
   由题易知X_1, X_2相互独立且$X_i \sim N(a, \sigma_1)^2, i = 1, 2$
   X_3, X_4相互独立且$X_j \sim N(a, \sigma_2)^2, j = 3, 4$
   设事件$A = \{|x_1 - x_2| \le |x_3 - x_4|\}$
   当A发生时，
$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - a}{\sigma_1}\right)^2} \cdot \prod_{j=3}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - a}{\sigma_2}\right)^2} \cdot \prod_{k=5}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - a}{\sigma_1}\right)^2}$$
   当$\overline{A}$发生时，
$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - a}{\sigma_1}\right)^2} \cdot \prod_{j=3}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - a}{\sigma_2}\right)^2} \cdot \prod_{k=5}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - a}{\sigma_2}\right)^2}$$

化简后写成分段函数可得

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma_1^{-(n-2)}\sigma_2^{-2}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{\sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2+\sum_{k=5}^{n}(x_k-a)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{j=3}^{4}(x_j-a)^2}{\sigma_2^2}]\}\\ ,\quad |x_1-x_2|\le|x_3-x_4|\\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-(n-2)}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{\sum_{i=1}^{2}(x_i-a)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{j=3}^{4}(x_j-a)^2+\sum_{k=5}^{n}(x_k-a)^2}{\sigma_2^2}]\}\\ ,\quad |x_1-x_2|>|x_3-x_4|\end{cases}$$

5. 设总体 X 服从两点分布 $b(1,p)$ （即 $P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$），其中 p 是未知参数，$X=(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5)$ 为从此总体中抽取的简单样本，

(a) 写出样本空间 $\mathcal{X}$ 和 X 的概率分布. (2 分)

【解】:

$$\mathcal{X}=\{0,1\}^5,P(X=x)=p^{\sum x_i}(1-p)^{5-\sum x_i}$$

, 其中$x=(x_1,\cdots,x_5)$是样本空间的一个样本点。

(b) 指出 X_1+X_2，$\min\limits_{1\le i\le 5}X_i$，$X_5+2p$，$X_5-E(X_1)$，$\dfrac{(X_5-X_1)^2}{D(X_1)}$ 哪些是统计量，哪些不是统计量，并说明理由. (2 分)

【解】: 其中，X_1+X_2，$\min\limits_{1\le i\le 5}X_i$，$X_5-E(X_1)$，$\dfrac{(X_5-X_1)^2}{D(X_1)}$ 是统计量，X_5+2p不是统计量，因为X_5+2p与未知参数p有关。

6. 设 $a\neq 0$ 和 b 皆为常数，令 $y_i=ax_i+b$，$i=1,2,\ldots,n$.

(a) 证明 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的样本均值 $\overline{y}$ 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的样本均值 $\overline{x}$ 之间的关系为 $\overline{y}=a\overline{x}+b$. (2 分)

【证明】:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

,则

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\frac{1}{n}(a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb)=a\cdot\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x_i+b=a\overline{x}+b$$

(b) 证明 $y_1,y_2,\ldots,y_n$ 的样本方差 S_y^2 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的样本方差 S_x^2 之间的关系为 $S_y^2=a^2S_x^2$. (2 分)

【证明】:

$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$$S_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[ax_i+b-(a\overline{x}+b)]^2=\frac{a^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=a^2S_x^2$$

(c) 根据上述结果，利用适当的变换，求下列数据的样本均值和样本方差: (2 分)

$$480,\ 550,\ 500,\ 590,\ 510,\ 560,\ 490,\ 600,\ 580.$$

【解】: 令$y_1 = 480, y_2 = 550, y_3 = 500, y_4 = 590, y_5 = 510, y_6 = 560, y_7 = 490, y_8 = 600, y_9 = 580$

$x_1 = -2, x_2 = 5, x_3 = 0, x_4 = 9, x_5 = 1, x_6 = 6, x_7 = -1, x_8 = 10, x_9 = 8$

则易知$y_i = 10x_i + 500$

又$\overline{x} = \frac{1}{9}(-2 + 5 + 0 + 9 + 1 + 6 - 1 + 10 + 8) = 4$

则$\overline{y} = 10\overline{x} + 500 = 540$

又

$$S_x^2 = \frac{1}{9-1}\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{8}(6^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2 + 6^2 + 4^2) = 21$$

则

$$S_y^2 = 10^2 \cdot S_x^2 = 2100$$