

数理统计

第一章

绪论

2026 年 3 月 8 日

- 数理统计是统计学专业的一门重要的基础课程，课程内容如下：
 - ① 数理统计的基本概念（第一章、第二章）
 - ② 参数估计（第三章、第四章）
 - ③ 参数假设检验（第五章）

- 数理统计是统计学专业的一门重要的基础课程，课程内容如下：
 - ① 数理统计的基本概念（第一章、第二章）
 - ② 参数估计（第三章、第四章）
 - ③ 参数假设检验（第五章）
- 学习数理统计基本概念、理论、推导、证明、应用

预期目标

- 理解总体、样本、统计量、抽样分布等概念，掌握正态总体样本均值与样本方差的分布， χ^2 分布， t 分布， F 分布，了解充分统计量的定义及相关性质

预期目标

- 理解总体、样本、统计量、抽样分布等概念，掌握正态总体样本均值与样本方差的分布， χ^2 分布， t 分布， F 分布，了解充分统计量的定义及相关性质
- 掌握参数点估计的基本方法（矩估计、极大似然估计），掌握点估计的优良性准则（无偏性、有效性、相合性），了解一致最小方差无偏估计和Cramer-Rao不等式，理解区间估计的概念，掌握构造区间估计的枢轴变量法

预期目标

- 理解总体、样本、统计量、抽样分布等概念，掌握正态总体样本均值与样本方差的分布， χ^2 分布， t 分布， F 分布，了解充分统计量的定义及相关性质
- 掌握参数点估计的基本方法（矩估计、极大似然估计），掌握点估计的优良性准则（无偏性、有效性、相合性），了解一致最小方差无偏估计和Cramer-Rao不等式，理解区间估计的概念，掌握构造区间估计的枢轴变量法
- 了解假设检验的基本概念，掌握正态总体参数的假设检验以及似然比检验，了解假设检验与区间估计的关系

- 《数理统计学》，第二版，茆诗松与吕晓玲编著，中国人民大学出版社。

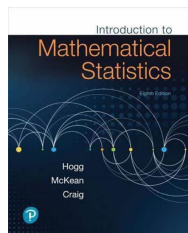
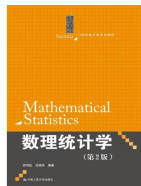
- 《数理统计学》，第二版，茆诗松与吕晓玲编著，中国人民大学出版社。
- 《数理统计》，第三版，韦来生编著，科学出版社。

教材与参考书

- 《数理统计学》，第二版，茆诗松与吕晓玲编著，中国人民大学出版社。
- 《数理统计》，第三版，韦来生编著，科学出版社。
- 《Introduction to Mathematical Statistics》，第八版，Hogg McKean Craig编著，Pearson 2019。

教材与参考书

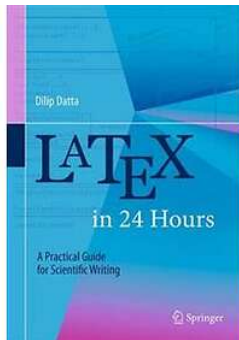
- 《数理统计学》，第二版，茆诗松与吕晓玲编著，中国人民大学出版社。
- 《数理统计》，第三版，韦来生编著，科学出版社。
- 《Introduction to Mathematical Statistics》，第八版，Hogg McKean Craig编著，Pearson 2019。



主要工具

- R软件
- LaTeX

- R软件
- LaTeX



成绩构成

- 过程性考核 (40%): 作业 (75%, 共30分)、考勤 (15%, 共6分)、章节自测 (10%, 共4分)

成绩构成

- 过程性考核 (40%): 作业 (75%, 共30分)、考勤 (15%, 共6分)、章节自测 (10%, 共4分)
- 期末考试成绩 (60%, 共60分)

成绩构成

- 过程性考核（40%）：作业（75%，共30分）、考勤（15%，共6分）、章节自测（10%，共4分）
- 期末考试成绩（60%，共60分）

- 作业成绩为课程全部教学周成绩的平均分

成绩构成

- 过程性考核 (40%): 作业 (75%, 共30分)、考勤 (15%, 共6分)、章节自测 (10%, 共4分)
- 期末考试成绩 (60%, 共60分)

- 作业成绩为课程全部教学周成绩的平均分
- 每周三或周四布置本周的课后作业, 每周三上课时上交上周的作业

成绩构成

- 过程性考核（40%）：作业（75%，共30分）、考勤（15%，共6分）、章节自测（10%，共4分）
- 期末考试成绩（60%，共60分）

- 作业成绩为课程全部教学周成绩的平均分
- 每周三或周四布置本周的课后作业，每周三上课时上交上周的作业
- 作业可以使用LaTeX编辑完成，也可以手写，均需提交纸质版

成绩构成

- 过程性考核（40%）：作业（75%，共30分）、考勤（15%，共6分）、章节自测（10%，共4分）
- 期末考试成绩（60%，共60分）

- 作业成绩为课程全部教学周成绩的平均分
- 每周三或周四布置本周的课后作业，每周三上课时上交上周的作业
- 作业可以使用LaTeX编辑完成，也可以手写，均需提交纸质版
- 每位同学可以有一次迟交作业的机会

- 考勤：每缺勤1次扣除1分，缺勤次数超过6次者取消考试资格

- 考勤：每缺勤1次扣除1分，缺勤次数超过6次者取消考试资格
- 章节自测：安排自测题供学生自我检测学习效果，成绩计入过程考核成绩

- 期末考试：包括填空、选择和综合题目

成绩构成

- 期末考试：包括填空、选择和综合题目
- 每人可携带一张（两页）A4大小纸张的手写个人课程总结，随试卷一起上交

成绩构成

- 期末考试：包括填空、选择和综合题目
- 每人可携带一张（两页）A4大小纸张的手写个人课程总结，随试卷一起上交
- 可以使用自己携带的计算器（非编程类），不得借用其他同学的计算器

- ① 绪论
- ② 抽样分布及若干预备知识
- ③ 点估计
- ④ 区间估计
- ⑤ 参数假设检验

1 1.1 什么是数理统计学

- 1.1.1 数理统计学的任务和性质
- 1.1.2 数理统计学的应用
- 1.1.3 统计学发展简史

2 1.2 数理统计的若干基本概念

3 1.3 统计量

4 1.4 统计模型的确定

5 1.5 指数型分布族

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 自然界的现象大致可以分为两大类，一类称为**确定性现象**，另一类称为**非确定性现象**，亦称为**随机现象**。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 自然界的现象大致可以分为两大类，一类称为**确定性现象**，另一类称为非确定性现象，亦称为**随机现象**。
- 确定性现象的例子：如物理和化学中的反应规律和其他学科中的一些现象，都可以用数学中的方程式，如微分方程等来精确描述。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 自然界的现象大致可以分为两大类，一类称为**确定性现象**，另一类称为**非确定性现象**，亦称为**随机现象**。
- 确定性现象的例子：如物理和化学中的反应规律和其他学科中的一些现象，都可以用数学中的方程式，如微分方程等来精确描述。
- 随机现象的例子：如在农业试验中，在面积相等且相邻的两块土地上种植同一种农作物，生产条件相同，但在收获时产量完全不一样。在工业生产中，进行某化工产品得率的试验，使温度、压力、配方等主要因素控制在相同水平下，获得的两批化工产品得率也不能保证完全相同。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- **统计学的任务是研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性影响的数据，从而面对所考虑的问题作出一定结论的方法和理论。**

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- **统计学的任务是研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性影响的数据，从而面对所考虑的问题作出一定结论的方法和理论。**
- **统计学是一门实用性很强的学科，在人类活动的各个领域都有着广泛的应用。**

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- **统计学的任务是研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性影响的数据，从而面对所考虑的问题作出一定结论的方法和理论。**
- **统计学是一门实用性很强的学科，在人类活动的各个领域都有着广泛的应用。**
- **研究统计学方法中理论基础问题的那一部分构成数理统计学的内容。**

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- **统计学**的任务是研究怎样有效地收集、整理和分析带有随机性影响的数据，从而面对所考虑的问题作出一定结论的方法和理论。
- 统计学是一门实用性很强的学科，在人类活动的各个领域都有着广泛的应用。
- 研究统计学方法中**理论基础问题**的那一部分构成**数理统计学**的内容。
- 数理统计是研究如何**有效地收集和使用带有随机性影响的数据**的一门学科。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

1. 有效地收集数据

- 收集数据的方法有：**全面观察（或普查）、抽样调查和安排试验等方式。**

1.1.1 数理统计学的任务和性质

1. 有效地收集数据

- 收集数据的方法有：**全面观察（或普查）、抽样调查和安排试验**等方式。

例 (1.1.1)

人口普查和抽样调查。我国在2000年进行了第五次人口普查。如果普查的数据是准确无误的，则无随机性可言，不需要用数理统计方法。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

1. 有效地收集数据

- 收集数据的方法有：**全面观察（或普查）、抽样调查和安排试验等方式。**

例 (1.1.1)

人口普查和抽样调查。我国在2000年进行了第五次人口普查。如果普查的数据是准确无误的，则无随机性可言，不需要用数理统计方法。

人口普查虽是全面调查，但数据并不是很可靠。国家统计局还需要派出专业人员对全国人口进行抽样调查，根据抽样调查的结果，对人口普查的数字进行适当的修正。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 如何安排抽样调查，是有效收集数据的一个重要问题，这构成数理统计学的一个重要分支——《抽样调查方法》。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 如何安排抽样调查，是有效收集数据的一个重要问题，这构成数理统计学的一个重要分支——《抽样调查方法》。

例 (1.1.2)

考察某地区1000户农户的经济状况，从中挑选100户做抽样调查。若该地区分成平原和山区两部分，平原较富，占该地区农户的70%，而占30%的山区农户较穷。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 如何安排抽样调查，是有效收集数据的一个重要问题，这构成数理统计学的一个重要分支——《抽样调查方法》。

例 (1.1.2)

考察某地区1000户农户的经济状况，从中挑选100户做抽样调查。若该地区分成平原和山区两部分，平原较富，占该地区农户的70%，而占30%的山区农户较穷。

抽样方案规定在抽取的100户中，从平原地区抽70户，山区抽30户，在各自范围内用随机化方法抽取。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 如何安排抽样调查，是有效收集数据的一个重要问题，这构成数理统计学的一个重要分支——《抽样调查方法》。

例 (1.1.2)

考察某地区1000户农户的经济状况，从中挑选100户做抽样调查。若该地区分成平原和山区两部分，平原较富，占该地区农户的70%，而占30%的山区农户较穷。

抽样方案规定在抽取的100户中，从平原地区抽70户，山区抽30户，在各自范围内用随机化方法抽取。

在本例中，有效收集数据是通过合理地设计抽样方案来实现的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 如何科学安排试验方案和分析试验结果，构成了数理统计的另一分支——试验的设计和分析。有效的数据收集也可以通过科学安排试验的方法来实现。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

2. 有效地使用数据

1.1.1 数理统计学的任务和性质

2. 有效地使用数据

- 获取数据后，需要用有效的方法去集中和提取数据中的有关信息，以对所研究的问题作出一定的结论，这在统计上称为“推断”。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

2. 有效地使用数据

- 获取数据后，需要用有效的方法去集中和提取数据中的有关信息，以对所研究的问题作出一定的结论，这在统计上称为“推断”。
- 提取信息、作出结论——统计推断

1.1.1 数理统计学的任务和性质

2. 有效地使用数据

- 获取数据后，需要用有效的方法去集中和提取数据中的有关信息，以对所研究的问题作出一定的结论，这在统计上称为“推断”。
- 提取信息、作出结论——统计推断
- 为了有效地使用数据进行统计推断，需要对数据建立一个统计模型，提出统计推断的方法，并给定某些准则去评判不同统计推断方法的优劣。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 物体称重：估计一个物体的重量 a ，把它在天平上称了5次，获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 ，它们都收到随机性因素的影响。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 物体称重：估计一个物体的重量 a ，把它在天平上称了5次，获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 ，它们都收到随机性因素的影响。
- (1) 算术平均值： $\hat{a} = \bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5}$ 去估计 a ；

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 物体称重：估计一个物体的重量 a ，把它在天平上称了5次，获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 ，它们都收到随机性因素的影响。
- (1) 算数平均值： $\hat{a} = \bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5}$ 去估计 a ；
- (2) 中位数：将 x_1, x_2, \dots, x_n 按大小排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(5)}$ ，取中间一个值 $x_{(3)}$ 去估计 a ， $\hat{a}_m = x_{(3)}$ ；

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 物体称重：估计一个物体的重量 a ，把它在天平上称了5次，获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 ，它们都收到随机性因素的影响。
- (1) 算数平均值： $\hat{a} = \bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5}$ 去估计 a ；
- (2) 中位数：将 x_1, x_2, \dots, x_n 按大小排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(5)}$ ，取中间一个值 $x_{(3)}$ 去估计 a ， $\hat{a}_m = x_{(3)}$ ；
- (3) 最大最小平均： $\hat{a}_{1,5} = \frac{x_{(1)} + x_{(5)}}{2}$ 去估计 a 。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 物体称重：估计一个物体的重量 a ，把它在天平上称了5次，获得数据 x_1, x_2, \dots, x_5 ，它们都收到随机性因素的影响。
- (1) 算数平均值： $\hat{a} = \bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5}$ 去估计 a ；
- (2) 中位数：将 x_1, x_2, \dots, x_n 按大小排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(5)}$ ，取中间一个值 $x_{(3)}$ 去估计 a ， $\hat{a}_m = x_{(3)}$ ；
- (3) 最大最小平均： $\hat{a}_{1,5} = \frac{x_{(1)} + x_{(5)}}{2}$ 去估计 a 。
- 这些估计量的性质，正是数理统计学研究的任务之一。以后可以看到，在一定的统计模型和优良性准则下，上述3种估计方法中的任何一个都可能是最优的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (1) 用算数平均值计算该村农户年均收入如下：

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (1) 用算数平均值计算该村农户年均收入如下：
- $\bar{x} = \frac{90 \times 0.5 + 10 \times 10}{100} = 1.45$ (万元)。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (1) 用算数平均值计算该村农户年均收入如下：
- $\bar{x} = \frac{90 \times 0.5 + 10 \times 10}{100} = 1.45$ (万元)。
- 按此方法得出结论：该村农民已脱贫。但90%的农户年均收入只有5000元，事实上并未脱贫。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (2) 用样本中位数计算该村农户年均收入，即将100户的年收入分别记为 x_1, x_2, \dots, x_{100} ，将其按由小到大的顺序排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(100)}$ 。样本中位数定义为排在最中间两户的平均值，即

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (2) 用样本中位数计算该村农户年均收入，即将100户的年收入分别记为 x_1, x_2, \dots, x_{100} ，将其按由小到大的顺序排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(100)}$ 。样本中位数定义为排在最中间两户的平均值，即
 - $\frac{x_{(50)} + x_{(51)}}{2} = 0.5$ (万元)。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (2) 用样本中位数计算该村农户年均收入，即将100户的年收入分别记为 x_1, x_2, \dots, x_{100} ，将其按由小到大的顺序排列为 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(100)}$ 。样本中位数定义为排在最中间两户的平均值，即
 - $\frac{x_{(50)} + x_{(51)}}{2} = 0.5$ (万元)。
 - 按此方法得出结论：该村农民尚未脱贫。这与实际情况相符。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (3) 最大最小平均: $\frac{x_{(1)}+x_{(100)}}{2} = \frac{5000+100000}{2} = 5.25$ (万元)

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (3) 最大最小平均: $\frac{x_{(1)}+x_{(100)}}{2} = \frac{5000+100000}{2} = 5.25$ (万元)
- 按此方法得出结论: 脱贫攻坚已取得巨大胜利。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

例 (1.1.4)

某农村有100户农户，要调查此村农户是否脱贫。脱贫的标准是每户年均收入超过1万元。经调查此村90户农户年收入5000元，10户农户年收入10万元，问此村农户是否脱贫？

- (3) 最大最小平均： $\frac{x_{(1)}+x_{(100)}}{2} = \frac{5000+100000}{2} = 5.25$ （万元）
- 按此方法得出结论：脱贫攻坚已取得巨大胜利。
- 由此可见，不同的统计方法得出的结论不同。有效地使用数据，需要针对不同问题选择合适的统计方法。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

3. 数理统计学与各种专门学科的关系

- 数理统计方法所处理的是在各种专门学科中带有普遍性（共性）且受随机性影响的数据收集、整理和推断问题，不涉及各种专门学科中的具体问题。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

3. 数理统计学与各种专门学科的关系

- 数理统计方法所处理的是在各种专门学科中带有普遍性（共性）且受随机性影响的数据收集、整理和推断问题，不涉及各种专门学科中的具体问题。
- 这种带共性的问题既然从专门领域中提炼出来，就可以用数学的方法去研究，这就是数理统计学的研究任务。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

3. 数理统计学与各种专门学科的关系

- 数理统计方法所处理的是在各种专门学科中带有普遍性（共性）且受随机性影响的数据收集、整理和推断问题，不涉及各种专门学科中的具体问题。
- 这种带共性的问题既然从专门领域中提炼出来，就可以用数学的方法去研究，这就是数理统计学的研究任务。
- 由统计方法的这个性质就引申出一个重要的特点：统计方法只是从事物外在数量上的表现去推断该事物可能的规律性。统计方法本身并不能说明何以会有这个规律性，这是各个专门学科的任务。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 但是，应当认识到，这并不意味着一个数理统计学者可以不过问其他专门领域的知识。相反，如果要将统计方法用于实际问题，必须对所涉及问题的专业知识有一定的了解。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

- 但是，应当认识到，这并不意味着一个数理统计学者可以不过问其他专门领域的知识。相反，如果要将统计方法用于实际问题，必须对所涉及问题的专业知识有一定的了解。
- 这不仅可以帮助选定适当的统计模型和统计方法，而且在正确解释所得结论时，专业的知识是必不可少的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

4. 数理统计方法的归纳性质

- 数理统计与其他数学学科的推理方法是不一样的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

4. 数理统计方法的归纳性质

- 数理统计与其他数学学科的推理方法是不一样的。
- 统计方法的本质是归纳式的，而其他数学学科则是演绎式的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

4. 数理统计方法的归纳性质

- 数理统计与其他数学学科的推理方法是不一样的。
- 统计方法的本质是归纳式的，而其他数学学科则是演绎式的。
- 然而，归纳推理是要冒风险的。统计学的作用之一就是提供归纳推理和计算不确定性程度的方法。不确定性是用概率计算的。

1.1.1 数理统计学的任务和性质

4. 数理统计方法的归纳性质

- 数理统计与其他数学学科的推理方法是不一样的。
- 统计方法的本质是归纳式的，而其他数学学科则是演绎式的。
- 然而，归纳推理是要冒风险的。统计学的作用之一就是提供归纳推理和计算不确定性程度的方法。不确定性是用概率计算的。
- 因此，统计推断属于归纳推理方法，归纳推理作出的推断不是100%可靠，但它的可靠程度（即结论的正确程度）是可以通过概率来度量的。

1.1.2 数理统计学的应用

- 行政部门：国家、地方统计局、机关、事业单位。例如国家统计局，经常需要收集有关的数据和资料并加以整理、分析，以了解情况并提供给有关部门作出相应的决策。

1.1.2 数理统计学的应用

- 行政部门：国家、地方统计局、机关、事业单位。例如国家统计局，经常需要收集有关的数据和资料并加以整理、分析，以了解情况并提供给有关部门作出相应的决策。
- 工农业生产：利用试验设计和方差分析的方法寻找最佳生产条件。产品质量控制、抽样调查和工业产品寿命的可靠性问题。

1.1.2 数理统计学的应用

- 行政部门：国家、地方统计局、机关、事业单位。例如国家统计局，经常需要收集有关的数据和资料并加以整理、分析，以了解情况并提供给有关部门作出相应的决策。
- 工农业生产：利用试验设计和方差分析的方法寻找最佳生产条件。产品质量控制、抽样调查和工业产品寿命的可靠性问题。
- 经济、金融：在经济学中定量分析的应用比其他社会科学部门更早深入。计量经济学、时间序列分析等。

1.1.2 数理统计学的应用

- 行政部门：国家、地方统计局、机关、事业单位。例如国家统计局，经常需要收集有关的数据和资料并加以整理、分析，以了解情况并提供给有关部门作出相应的决策。
- 工农业生产：利用试验设计和方差分析的方法寻找最佳生产条件。产品质量控制、抽样调查和工业产品寿命的可靠性问题。
- 经济、金融：在经济学中定量分析的应用比其他社会科学部门更早深入。计量经济学、时间序列分析等。
- 生物、医学、遗传学：流行病数据的统计分析、遗传基因数据的统计分析。

1.1.2 数理统计学的应用

- 气象预报、水文、地震、地质：对潜在规律的认识。

1.1.2 数理统计学的应用

- 气象预报、水文、地震、地质：对潜在规律的认识。
- 科学研究：一个好的统计方法有助于提取实验和观察数据中根本性的信息，因而有助于提出较正确的理论或假说。有了一定的理论和假说后，统计方法可以指导研究工作者如何进一步安排试验或观察，以使所得数据更有助于判定定理或假说是否正确。

1.1.3 统计学发展简史

- 统计的起源可追溯到结绳记事，即人类历史中关于收集和记录数据的活动。

1.1.3 统计学发展简史

- 统计的起源可追溯到结绳记事，即人类历史中关于收集和记录数据的活动。
- 《二十四史》：钱粮、人口、地震、灾害数据。

1.1.3 统计学发展简史

- 统计的起源可追溯到结绳记事，即人类历史中关于收集和记录数据的活动。
- 《二十四史》：钱粮、人口、地震、灾害数据。
- 数理统计学是一门较年轻的学科，它主要的发展是从20世纪初开始，大概可以分为两个阶段。前一阶段大致到第二次世界大战结束时为止。

1.1.3 统计学发展简史

- 在这一早期的发展阶段中，起主导作用的是以 R. A. Fisher 和 K. Pearson 为首的英国学派，特别是 Fisher，在本学科的发展中起了独特的作用。

1.1.3 统计学发展简史

- 在这一早期的发展阶段中，起主导作用的是以 R. A. Fisher 和 K. Pearson 为首的英国学派，特别是 Fisher，在本学科的发展中起了独特的作用。
- 其他一些著名的学者，如 W. S. Gosset (student), J. Neyman, E. S. Pearson (K. Pearson 的儿子), A. Wald 以及我国的许宝禄教授等都作出了根本性的贡献。

1.1.3 统计学发展简史

- 他们的工作奠定了许多数理统计学分支的基础，提出了一系列具有重要应用价值的统计方法和一系列基本概念和重要理论问题。

1.1.3 统计学发展简史

- 他们的工作奠定了许多数理统计学分支的基础，提出了一系列具有重要应用价值的统计方法和一系列基本概念和重要理论问题。
- 有一种意见认为瑞典统计学家 H. Cramer 在1946年发表的著作《Mathematical Methods of Statistics》标志了这门学科达到成熟的地步。

1.1.3 统计学发展简史

- 他们的工作奠定了许多数理统计学分支的基础，提出了一系列具有重要应用价值的统计方法和一系列基本概念和重要理论问题。
- 有一种意见认为瑞典统计学家 H. Cramer 在1946年发表的著作《Mathematical Methods of Statistics》标志了这门学科达到成熟的地步。
- 19世纪中叶以后，包括政治统计学、人口统计、经济统计、犯罪统计、社会统计等多方面内容的“社会统计学”一词在西方开始出现，与此相应的社会调查也有了较大的发展。这属于描述统计学的范畴。

1.1.3 统计学发展简史

- 因为，当时还没有一定的数学工具，特别是概率论的发展，无法建立现代意义下的数理统计学。到19世纪末和20世纪初，情况才起了较大的变化。

1.1.3 统计学发展简史

- 因为，当时还没有有一定的数学工具，特别是概率论的发展，无法建立现代意义下的数理统计学。到19世纪末和20世纪初，情况才起了较大的变化。
- 有人认为20世纪初 K. Pearson 关于 χ^2 统计量极限分布的论文可以作为数理统计诞生的标志；也有人认为，直到1922年 Fisher 关于统计学的数学基础那篇著名论文的发表，数理统计才正式诞生。

1.1.3 统计学发展简史

- 因为，当时还没有一定的数学工具，特别是概率论的发展，无法建立现代意义下的数理统计学。到19世纪末和20世纪初，情况才起了较大的变化。
- 有人认为20世纪初 K. Pearson 关于 χ^2 统计量极限分布的论文可以作为数理统计诞生的标志；也有人认为，直到1922年 Fisher 关于统计学的数学基础那篇著名论文的发表，数理统计才正式诞生。
- 20世纪前40年有了迅速而全面的发展，到20世纪40年代时，数理统计已形成一个成熟的数学分支。

1.1.3 统计学发展简史

- 从战后到现在可以说是第二阶段。在这个时期中，许多战前开始形成的数理统计分支，在战后得以纵深发展，理论上的深度也比以前大大加强了。

1.1.3 统计学发展简史

- 从战后到现在可以说是第二阶段。在这个时期中，许多战前开始形成的数理统计分支，在战后得以纵深发展，理论上的深度也比以前大大加强了。
- 同时还出现了根本性的发展，如 A. Wald 的统计判决理论和 Bayes 学派的兴起。

1.1.3 统计学发展简史

- 从战后到现在可以说是第二阶段。在这个时期中，许多战前开始形成的数理统计分支，在战后得以纵深发展，理论上的深度也比以前大大加强了。
- 同时还出现了根本性的发展，如 A. Wald 的统计判决理论和 Bayes 学派的兴起。
- 这不仅是战后工农业生产和科学技术迅速发展所提出的要求，也是由于电子计算机这一有力工具的出现和飞速发展推动了数理统计学的进步。

1.1.3 统计学发展简史

- 战前由于计算工具跟不上，许多需要大量计算的统计方法很难得以使用。

1.1.3 统计学发展简史

- 战前由于计算工具跟不上，许多需要大量计算的统计方法很难得以使用。
- 战后有了高速计算机使这一问题变得很容易，这就大大推广了统计方法的应用。

1.1.3 统计学发展简史

- 战前由于计算工具跟不上，许多需要大量计算的统计方法很难得以使用。
- 战后有了高速计算机使这一问题变得很容易，这就大大推广了统计方法的应用。
- 在一些统计学发达的国家中，特别在美国，这方面的人才数以十万计，并在大多数大学中建立了统计学。

1.1.3 统计学发展简史

- 战前由于计算工具跟不上，许多需要大量计算的统计方法很难得以使用。
- 战后有了高速计算机使这一问题变得很容易，这就大大推广了统计方法的应用。
- 在一些统计学发达的国家中，特别在美国，这方面的人才数以十万计，并在大多数大学中建立了统计学。
- 近30年来，数理统计学在我国的发展也是令人瞩目的，尤其是2011年统计学从数学和经济学中独立出来成为一级学科，极大地推动了统计学的发展。

性

1 1.1 什么是数理统计学

2 1.2 数理统计的若干基本概念

- 1.2.1 总体和样本

- 1.2.2 样本空间和样本的两重

3 1.3 统计量

4 1.4 统计模型的确定

5 1.5 指数型分布族

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

例 (1.2.1)

假定一批产品有10000件，其中有正品也有废品。为估计废品率，往往从中抽取一部分，如100件进行检查。

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

例 (1.2.1)

假定一批产品有10000件，其中有正品也有废品。为估计废品率，往往从中抽取一部分，如100件进行检查。那么这批10000件产品称为**总体**，其中的每件产品称为**个体**，而从中抽取的100件产品称为**样本**。

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

例 (1.2.1)

假定一批产品有10000件，其中有正品也有废品。为估计废品率，往往从中抽取一部分，如100件进行检查。那么这批10000件产品称为**总体**，其中的每件产品称为**个体**，而从中抽取的100件产品称为**样本**。样本中个体数目的大小称为**样本大小**，也称为**样本容量**。而抽取样本的行为称为**抽样**。

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

例 (1.2.1)

假定一批产品有10000件，其中有正品也有废品。为估计废品率，往往从中抽取一部分，如100件进行检查。那么这批10000件产品称为**总体**，其中的每件产品称为**个体**，而从中抽取的100件产品称为**样本**。样本中个体数目的大小称为**样本大小**，也称为**样本容量**。而抽取样本的行为称为**抽样**。

- **总体**：是由与所研究的问题有关的所有个体组成。

1.2.1 总体和样本

本节将分别介绍总体、个体和样本的概念。

例 (1.2.1)

假定一批产品有10000件，其中有正品也有废品。为估计废品率，往往从中抽取一部分，如100件进行检查。那么这批10000件产品称为**总体**，其中的每件产品称为**个体**，而从中抽取的100件产品称为**样本**。样本中个体数目的大小称为**样本大小**，也称为**样本容量**。而抽取样本的行为称为**抽样**。

- 总体：是由与所研究的问题有关的所有个体组成。
- 样本：是从总体中抽取的一部分个体。

1.2.1 总体和样本

- 有限总体：总体的数目为有限个。

1.2.1 总体和样本

- 有限总体：总体的数目为有限个。
- 无限总体：总体的数目为无限个。

1.2.1 总体和样本

- 有限总体：总体的数目为有限个。
- 无限总体：总体的数目为无限个。

在统计研究中，人们所关心的不是总体内个体的本身，而是关心个体上的一项（或几项）数量指标。

1.2.1 总体和样本

- 有限总体：总体的数目为有限个。
- 无限总体：总体的数目为无限个。

在统计研究中，人们所关心的不是总体内个体的本身，而是关心个体上的一项（或几项）数量指标。

- 总体：可看成由所有个体上的某种数量指标构成的集合，因此是数的集合。

1.2.1 总体和样本

- 有限总体：总体的数目为有限个。
- 无限总体：总体的数目为无限个。

在统计研究中，人们所关心的不是总体内个体的本身，而是关心个体上的一项（或几项）数量指标。

- 总体：可看成由所有个体上的某种数量指标构成的集合，因此是数的集合。
- 随机变量：由于每个个体的出现是随机的，所以相应的个体上数量指标的出现也带有随机性。从而可以把此种数量指标看成是随机变量。随机变量的分布就是该数量指标在总体上的分布。

1.2.1 总体和样本

定义 (1.2.1 (总体与样本))

总体是由与所研究的问题有关的所有个体组成。而**样本**是从总体中按照一定方式抽取的一部分个体。样本中个体的数目称为样本大小 (sample size)，也称为**样本容量**。而从总体中抽取样本的行为称为**抽样** (sampling)。若总体中个体的数目为有限个，则称为**有限总体** (finite population)，否则称为**无限总体** (infinite population)。

1.2.1 总体和样本

定义 (1.2.2 (总体的随机变量))

一个统计问题所研究的对象的全体称为总体，在数量统计学中总体可以用一个随机变量及其概率分布来描述。

1.2.1 总体和样本

定义 (1.2.2 (总体的随机变量))

一个统计问题所研究的对象的全体称为总体，在数量统计学中总体可以用一个随机变量及其概率分布来描述。

- 总体就可以用 $r.v.$ X 来表示，或用其分布函数 F 来表示。若 F 有密度，记为 f ，则此总体也可用密度函数 f 来表示。

1.2.1 总体和样本

定义 (1.2.2 (总体的随机变量))

一个统计问题所研究的对象的全体称为总体，在数量统计学中总体可以用一个随机变量及其概率分布来描述。

- 总体就可以用*r.v.* X 来表示，或用其分布函数 F 来表示。若 F 有密度，记为 f ，则此总体也可用密度函数 f 来表示。
- 有时也根据总体分布的类型来称呼总体的名称，如正态总体、二项分布总体、0-1分布总体。

1.2.1 总体和样本

若总体分布函数记为 F ，当有一个从该总体中抽取的**相互独立同分布** (*i.i.d.*) 的大小为 n 的样本 X_1, \dots, X_n ，则常记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim F.$$

1.2.1 总体和样本

若总体分布函数记为 F ，当有一个从该总体中抽取的**相互独立同分布** (*i.i.d.*) 的大小为 n 的样本 X_1, \dots, X_n ，则常记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim F.$$

若 F 有密度 f ，可记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim f.$$

1.2.1 总体和样本

若样本 X_1, \dots, X_n 为总体 X 的 *i.i.d.* 观察值, 亦可记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim X.$$

1.2.1 总体和样本

若样本 X_1, \dots, X_n 为总体 X 的 *i.i.d.* 观察值, 亦可记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim X.$$

当个体上的数量指标不止一项时, 用随机向量来表示总体。

1.2.1 总体和样本

若样本 X_1, \dots, X_n 为总体 X 的 *i.i.d.* 观察值, 亦可记为

$$X_1, \dots, X_n \text{ i.i.d. } \sim X.$$

当个体上的数量指标不止一项时, 用随机向量来表示总体。

例如, 研究某地区小学生的发育状况, 人们关心的是其身高 X 和体重 Y 这两个数量指标, 此时总体就可以用二维随机向量 (X, Y) 或其联合分布 $F(x, y)$ 表示。当 F 有密度 f 时, 总体也可用联合密度 $f(x, y)$ 表示。

1.2.1 总体和样本

注 1.2.1 在一些场合下，总体具有一定的抽象性。

1.2.1 总体和样本

注 1.2.1 在一些场合下，总体具有一定的抽象性。

例 (1.2.2)

用秤去称一个物体的重量，为了得到较准确的结果，将物体称了5次，取5次称重的算术平均值作为物体的重量。如5次称重的结果（单位：g）为125.5，124，124.3，126，125.2。此问题中总体和样本是什么？

1.2.1 总体和样本

注 1.2.1 在一些场合下，总体具有一定的抽象性。

例 (1.2.2)

用秤去称一个物体的重量，为了得到较准确的结果，将物体称了5次，取5次称重的算术平均值作为物体的重量。如5次称重的结果（单位：g）为125.5，124，124.3，126，125.2。此问题中总体和样本是什么？

总体：一切可能出现的称量结果的集合。这是一个无限总体。

1.2.1 总体和样本

注 1.2.1 在一些场合下，总体具有一定的抽象性。

例 (1.2.2)

用秤去称一个物体的重量，为了得到较准确的结果，将物体称了5次，取5次称重的算术平均值作为物体的重量。如5次称重的结果（单位：g）为125.5，124，124.3，126，125.2。此问题中总体和样本是什么？

总体：一切可能出现的称量结果的集合。这是一个无限总体。

样本：这5次称重的结果。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

1. 样本空间

1.2.2 样本空间和样本的两重性

1. 样本空间

样本是由总体中抽取的一部分个体组成的。设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从总体中抽取的样本，其样本空间定义如下：

1.2.2 样本空间和样本的两重性

1. 样本空间

样本是由总体中抽取的一部分个体组成的。设 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 是从总体中抽取的样本，其样本空间定义如下：

定义 (1.2.3 (样本空间))

样本 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ 可能取值的全体，构成样本空间 (sampling space)，记为 \mathcal{X} 。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

在例1.2.2中，样本空间为

$$\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_5) : 0 < x_i < \infty, i = 1, 2, \dots, 5\}.$$

1.2.2 样本空间和样本的两重性

在例1.2.2中，样本空间为

$$\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_5) : 0 < x_i < \infty, i = 1, 2, \dots, 5\}.$$

该样本空间中的样本点的个数是无限的。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

例 (1.2.3)

打靶实验，每次打三发，考察中靶的环数。如样本 $X = (5, 1, 9)$ 表示三次打靶分别中5环，1环和9环。此时样本空间为

1.2.2 样本空间和样本的两重性

例 (1.2.3)

打靶实验，每次打三发，考察中靶的环数。如样本 $X = (5, 1, 9)$ 表示三次打靶分别中5环，1环和9环。此时样本空间为

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0, 1, 2, \dots, 10, i = 1, 2, 3\}.$$

1.2.2 样本空间和样本的两重性

例 (1.2.3)

打靶实验，每次打三发，考察中靶的环数。如样本 $X = (5, 1, 9)$ 表示三次打靶分别中5环，1环和9环。此时样本空间为

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i = 0, 1, 2, \dots, 10, i = 1, 2, 3\}.$$

该样本空间中的样本点的个数是有限的。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

2. 样本的两重性

1.2.2 样本空间和样本的两重性

2. 样本的两重性

样本的两重性是说，样本既可以看成具体的数，又可以看成随机变量（或随机向量）。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

2. 样本的两重性

样本的两重性是说，样本既可以看成具体的数，又可以看成随机变量（或随机向量）。

- 在实施抽样前，它被看成随机变量（或随机向量）。因为在实施具体抽样之前无法预料抽样的结果，只能预料它可能取值的范围，因此可以把它看成随机变量（或随机向量），通常采用大写字母表示。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

2. 样本的两重性

样本的两重性是说，样本既可以看成具体的数，又可以看成随机变量（或随机向量）。

- 在实施抽样前，它被看成随机变量（或随机向量）。因为在实施具体抽样之前无法预料抽样的结果，只能预料它可能取值的范围，因此可以把它看成随机变量（或随机向量），通常采用大写字母表示。
- 在实施抽样后，它是具体的数，通常采用小写字母表示该具体观察值。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

3. 简单随机样本

1.2.2 样本空间和样本的两重性

3. 简单随机样本

抽样是指从总体中按一定方式抽取样本的行为。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

3. 简单随机样本

抽样是指从总体中按一定方式抽取样本的行为。

抽样的目的是通过取得的样本对总体分布中某些未知的量作出推断，为使抽取的样本能很好地反映总体的信息，需考虑抽样方法。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

最常用的一种抽样方法称为“简单随机抽样”。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

最常用的一种抽样方法称为“简单随机抽样”。

(1) **代表性**：总体中的每一个个体都有同等机会被抽入样本，这意味着样本中每个个体与所考察的总体具有相同的分布，即 $X_i \sim X$ 。因此，任一样本中的个体都具有代表性。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

最常用的一种抽样方法称为“简单随机抽样”。

(1) **代表性**: 总体中的每一个个体都有同等机会被抽入样本, 这意味着样本中每个个体与所考察的总体具有相同的分布, 即 $X_i \sim X$ 。因此, 任一样本中的个体都具有代表性。

(2) **独立性**: 样本中每一个个体取什么值并不影响其他个体取什么值, 即样本中各个个体 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

最常用的一种抽样方法称为“简单随机抽样”。

(1) **代表性**: 总体中的每一个个体都有同等机会被抽入样本, 这意味着样本中每个个体与所考察的总体具有相同的分布, 即 $X_i \sim X$ 。因此, 任一样本中的个体都具有代表性。

(2) **独立性**: 样本中每一个个体取什么值并不影响其他个体取什么值, 即样本中各个个体 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量。

由简单随机抽样获得的样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 称为简单随机样本。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

定义 (1.2.4 (简单随机样本))

设有一总体 F , X_1, X_2, \dots, X_n 为从 F 中抽取的容量为 n 的样本, 若:

- (1) X_1, \dots, X_n 相互独立,
- (2) X_1, \dots, X_n 相同分布, 即同有分布 F , 则称 X_1, X_2, \dots, X_n 为简单随机样本, 有时简称为简单样本或随机样本。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

设总体为 F ， X_1, X_2, \dots, X_n 为从此总体中抽取的简单随机样本，
则 X_1, \dots, X_n 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

1.2.2 样本空间和样本的两重性

设总体为 F , X_1, X_2, \dots, X_n 为从此总体中抽取的简单随机样本, 则 X_1, \dots, X_n 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$\begin{aligned} & F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i). \end{aligned}$$

1.2.2 样本空间和样本的两重性

设总体为 F , X_1, X_2, \dots, X_n 为从此总体中抽取的简单随机样本, 则 X_1, \dots, X_n 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$\begin{aligned} & F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i). \end{aligned}$$

若 F 有密度 f , 则其联合密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

1.2.2 样本空间和样本的两重性

设总体为 F , X_1, X_2, \dots, X_n 为从此总体中抽取的简单随机样本, 则 X_1, \dots, X_n 的联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$\begin{aligned} & F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= F(x_1) \cdot F(x_2) \cdots F(x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i). \end{aligned}$$

若 F 有密度 f , 则其联合密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 可表示为

$$\begin{aligned} & f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i). \end{aligned}$$

1.2.2 样本空间和样本的两重性

如果样本是**多维的**，如从一大群人中抽取 n 个人，测出每人的身高和体重。

1.2.2 样本空间和样本的两重性

如果样本是**多维的**，如从一大群人中抽取 n 个人，测出每人的身高和体重。用随机向量 (X, Y) 或用其分布函数 $F(x, y)$ 记总体， $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 就是从这一总体中抽取的一组简单随机样本，其**联合分布函数**为

1.2.2 样本空间和样本的两重性

如果样本是**多维的**，如从一大群人中抽取 n 个人，测出每人的身高和体重。用随机向量 (X, Y) 或用其分布函数 $F(x, y)$ 记总体， $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 就是从这一总体中抽取的一组简单随机样本，其**联合分布函数**为

$$F_{X,Y}(x, y) = F(x_1, y_1) \cdot F(x_2, y_2) \cdots F(x_n, y_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i, y_i).$$

1.2.2 样本空间和样本的两重性

如果样本是**多维的**，如从一大群人中抽取 n 个人，测出每人的身高和体重。用随机向量 (X, Y) 或用其分布函数 $F(x, y)$ 记总体， $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 就是从这一总体中抽取的一组简单随机样本，其**联合分布函数**为

$$F_{X,Y}(x, y) = F(x_1, y_1) \cdot F(x_2, y_2) \cdots F(x_n, y_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i, y_i).$$

若 $F(x, y)$ 有密度 $f(x, y)$ ，则其**联合密度函数**为

1.2.2 样本空间和样本的两重性

如果样本是**多维的**，如从一大群人中抽取 n 个人，测出每人的身高和体重。用随机向量 (X, Y) 或用其分布函数 $F(x, y)$ 记总体， $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 就是从这一总体中抽取的一组简单随机样本，其**联合分布函数**为

$$F_{X,Y}(x, y) = F(x_1, y_1) \cdot F(x_2, y_2) \cdots F(x_n, y_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i, y_i).$$

若 $F(x, y)$ 有密度 $f(x, y)$ ，则其**联合密度函数**为

$$f_{X,Y}(x, y) = f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) \cdots f(x_n, y_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, y_i).$$

1.2.3 统计推断

1. 参数和参数空间

当样本分布不全已知时存在统计推断问题。统计学上把出现在样本分布中的未知常数称为**参数** (parameter)。

1.2.3 统计推断

1. 参数和参数空间

当样本分布不全已知时存在统计推断问题。统计学上把出现在样本分布中的未知常数称为**参数** (parameter)。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中的 a 和 σ 分别称为参数，可称 (a, σ) 为**参数向量** (parameter vector)。

1.2.3 统计推断

1. 参数和参数空间

当样本分布不全已知时存在统计推断问题。统计学上把出现在样本分布中的未知常数称为**参数** (parameter)。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中的 a 和 σ 分别称为参数，可称 (a, σ) 为**参数向量** (parameter vector)。
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 中的参数为 λ 。

1.2.3 统计推断

1. 参数和参数空间

当样本分布不全已知时存在统计推断问题。统计学上把出现在样本分布中的未知常数称为**参数** (parameter)。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中的 a 和 σ 分别称为参数，可称 (a, σ) 为**参数向量** (parameter vector)。
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 中的参数为 λ 。
- 二元正态分布 $N(a, b; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 中有五个参数 $(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ 。

1.2.3 统计推断

在一些问题中参数虽然未知，但根据参数的性质可以给出参数的取值范围。参数的取值范围称为**参数空间**（parameter space）。

1.2.3 统计推断

在一些问题中参数虽然未知，但根据参数的性质可以给出参数的取值范围。参数的取值范围称为**参数空间**（parameter space）。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中参数空间

为 $\Theta = \{(a, \sigma) : -\infty < a < \infty, \sigma > 0\}$ 。

1.2.3 统计推断

在一些问题中参数虽然未知，但根据参数的性质可以给出参数的取值范围。参数的取值范围称为**参数空间** (parameter space)。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中参数空间为 $\Theta = \{(a, \sigma) : -\infty < a < \infty, \sigma > 0\}$ 。
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 中参数空间为 $\Theta = \{\lambda : \lambda > 0\}$ 。

1.2.3 统计推断

在一些问题中参数虽然未知，但根据参数的性质可以给出参数的取值范围。参数的取值范围称为**参数空间** (parameter space)。

- 正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 中参数空间为 $\Theta = \{(a, \sigma) : -\infty < a < \infty, \sigma > 0\}$ 。
- 指数分布 $Exp(\lambda)$ 中参数空间为 $\Theta = \{\lambda : \lambda > 0\}$ 。
- 二元正态分布 $N(a, b; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 中参数空间为 $\Theta = \{(a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho) : -\infty < a, b < \infty, 0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty, |\rho| < 1\}$ 。

1.2.3 统计推断

2. 样本分布族

样本分布包含未知参数，当参数取不同值的时候就得到不同的分布，则可能的样本分布就不止一个，因此这些样本分布就构成了一个**分布族**。

1.2.3 统计推断

2. 样本分布族

样本分布包含未知参数，当参数取不同值的时候就得到不同的分布，则可能的样本分布就不止一个，因此这些样本分布就构成了一个**分布族**。

若样本 X_1, \dots, X_n 是从总体 X （ F 为其分布函数， f 为其密度函数）中抽取的*i.i.d.*样本，则样本分布族和总体分布族可以用相同的方式表示如下：

1.2.3 统计推断

2. 样本分布族

样本分布包含未知参数，当参数取不同值的时候就得到不同的分布，则可能的样本分布就不止一个，因此这些样本分布就构成了一个分布族。

若样本 X_1, \dots, X_n 是从总体 X （ F 为其分布函数， f 为其密度函数）中抽取的*i.i.d.*样本，则样本分布族和总体分布族可以用相同的方式表示如下：

$$\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\} \text{ 或 } \mathcal{F} = \{f_\theta, \theta \in \Theta\},$$

其中 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$ 称为参数空间。

1.2.3 统计推断

例如，指数分布 $Exp(\lambda)$ 的样本分布族为

1.2.3 统计推断

例如，指数分布 $Exp(\lambda)$ 的样本分布族为

$$\mathcal{F} = \{f(x, \lambda) : \lambda > 0\},$$

其中 λ 为参数。

1.2.3 统计推断

例如，指数分布 $Exp(\lambda)$ 的样本分布族为

$$\mathcal{F} = \{f(x, \lambda) : \lambda > 0\},$$

其中 λ 为参数。

它的每一个可能的值对应于一个具体的分布。

1.2.3 统计推断

3.统计推断

从总体中抽取一定大小的样本去推断总体的概率分布的方法称为**统计推断** (statistical inference)。数理统计是着手于样本，着眼于总体，其任务是用样本去推断总体。

1.2.3 统计推断

3. 统计推断

从总体中抽取一定大小的样本去推断总体的概率分布的方法称为**统计推断** (statistical inference)。数理统计是着手于样本，着眼于总体，其任务是用样本去推断总体。

- 当样本分布完全已知时，不存在统计推断问题。

1.2.3 统计推断

3. 统计推断

从总体中抽取一定大小的样本去推断总体的概率分布的方法称为**统计推断** (statistical inference)。数理统计是着手于样本，着眼于总体，其任务是用样本去推断总体。

- 当样本分布完全已知时，不存在统计推断问题。
- 当样本分布形式已知，但含有未知参数时，统计推断的任务是确定未知参数的值，这种情况下的统计推断问题称为**参数统计推断**问题。

1.2.3 统计推断

3. 统计推断

从总体中抽取一定大小的样本去推断总体的概率分布的方法称为**统计推断** (statistical inference)。数理统计是着手于样本，着眼于总体，其任务是用样本去推断总体。

- 当样本分布完全已知时，不存在统计推断问题。
- 当样本分布形式已知，但含有未知参数时，统计推断的任务是确定未知参数的值，这种情况下的统计推断问题称为**参数统计推断**问题。
- 当样本分布形式未知，有关统计推断问题称为**非参数统计推断**问题。

1.2.3 统计推断

对参数统计推断问题，例如，已知总体分布为正态分布 $N(a, \sigma^2)$ ，但参数 (a, σ) 未知，可以讨论参数估计和假设检验问题。

1.2.3 统计推断

对参数统计推断问题，例如，已知总体分布为正态分布 $N(a, \sigma^2)$ ，但参数 (a, σ) 未知，可以讨论参数估计和假设检验问题。

可以对 a 和 σ^2 的取值做出估计，也可以对 a 和 σ^2 的取值范围做出估计，或对断言" $a \leq 1$ "做出接受或拒绝这一假设的结论。

1 1.1 什么是数理统计学

2 1.2 数理统计的若干基本概念

3 1.3 统计量

4 1.4 统计模型的确定

5 1.5 指数型分布族

1 1.1 什么是数理统计学

2 1.2 数理统计的若干基本概念

3 1.3 统计量

4 1.4 统计模型的确定

5 1.5 指数型分布族

1 1.1 什么是数理统计学

2 1.2 数理统计的若干基本概念

3 1.3 统计量

4 1.4 统计模型的确定

5 1.5 指数型分布族