

# 数理统计半开卷公式笔记 (第 1 面: 基本概念、抽样分布)

## 1. 样本、统计量、常用量

总体分布族  $\mathcal{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ; 样本  $X_1, \dots, X_n$  简单随机: 独立同分布, 联合密度/概率  $p_\theta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$ 。统计量  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  不含未知参数。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2, \quad S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2.$$

$$nS_n^2 = (n-1)S^2, \quad \sum (X_i - c)^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - c)^2.$$

若  $\mathbb{E}X = \mu, \text{Var} X = \sigma^2 < \infty$ :  $\mathbb{E}\bar{X} = \mu, \text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n, \mathbb{E}S^2 = \sigma^2$ 。变换  $Y_i = aX_i + b$ :  $\bar{Y} = a\bar{X} + b, S_Y^2 = a^2 S_X^2$ 。

### 样本矩与经验分布

原点矩  $A_k = n^{-1} \sum X_i^k$ ; 中心矩  $B_k = n^{-1} \sum (X_i - \bar{X})^k$ 。经验分布

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\}, \quad \mathbb{E}F_n(x) = F(x), \quad \text{Var} F_n(x) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

### 似然与模型

$L(\theta; \mathbf{x}) = \prod p_\theta(x_i), \ell = \log L$ 。支持集含  $\theta$  时, 指标函数必须留在  $L$  中。若内点可导, 得分  $U(\theta) = \partial \ell / \partial \theta$ 。

## 2. 三大抽样分布

上侧分位数约定:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha, \quad P(t_\nu > t_\nu(\alpha)) = \alpha, \\ P(\chi_\nu^2 > \chi_\nu^2(\alpha)) = \alpha, \quad P(F_{m,n} > F_{m,n}(\alpha)) = \alpha.$$

若  $Z \sim N(0, 1), V \sim \chi_\nu^2$  独立:  $Z/\sqrt{V/\nu} \sim t_\nu$ 。若  $U \sim \chi_m^2, V \sim \chi_n^2$  独立:  $(U/m)/(V/n) \sim F_{m,n}$ ;  $F_{m,n}(\alpha) = 1/F_{n,m}(1-\alpha)$ 。

## 正态总体样本分布

若  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ :

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \bar{X} \perp S^2,$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}, \quad \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S\sqrt{1+1/n}} \sim t_{n-1}.$$

若用  $S_n^2$ , 则

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S_n} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t_{n-1}.$$

## 两个独立正态总体

$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2), Y_j \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ :

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right).$$

若  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  未知:

$$S_p^2 = \frac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}, \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{m+n-2}.$$

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1, n-1}.$$

配对样本用  $D_i = X_i - Y_i$ , 化为单正态总体。

### 次序统计量

设连续总体  $F, f, X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ :

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(x)]^{k-1} [1-F(x)]^{n-k} f(x).$$

$$P(X_{(1)} > x) = [1-F(x)]^n, \quad P(X_{(n)} \leq x) = F(x)^n.$$

$$f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(u, v) = \frac{n! [F(u)]^{i-1} [F(v) - F(u)]^{j-i-1} [1-F(v)]^{n-j} f(u) f(v)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}.$$

若  $U(0, 1), X_{(k)} \sim \text{Beta}(k, n-k+1)$ ; 极差  $R$  的密度

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r), 0 < r < 1.$$

### 极限定理

若  $\mathbb{E}X = \mu, \text{Var} X = \sigma^2$ :  $\bar{X} \xrightarrow{a.s.} \mu, \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \Rightarrow N(0, 1)$ 。Slutsky:  $X_n \Rightarrow X, Y_n \xrightarrow{P} c$ , 则  $X_n + Y_n \Rightarrow X + c, X_n Y_n \Rightarrow cX$ 。

# 数理统计半开卷公式笔记 (第 2 面: 充分统计量、点估计、C-R 界)

### 3. 充分统计量

定义: 给定  $T(X)$  后, 样本的条件分布不含  $\theta$ , 则  $T$  对  $\theta$  充分。因子分解定理:

$$p_{\theta}(\mathbf{x}) = g_{\theta}(T(\mathbf{x}))h(\mathbf{x}) \iff T \text{ 充分.}$$

离散型可用比值  $p_{\theta}(\mathbf{x})/P_{\theta}(T=t)$ ; 连续型用条件密度。指数族

$$p_{\theta}(x) = c(\theta)h(x) \exp\left\{\sum_{j=1}^k Q_j(\theta)T_j(x)\right\}$$

的样本充分统计量为  $(\sum_i T_1(X_i), \dots, \sum_i T_k(X_i))$ 。

#### 常见充分统计量

|                                    |                          |
|------------------------------------|--------------------------|
| Bernoulli/Binomial( $k$ 已知)        | $\sum X_i$               |
| Poisson( $\lambda$ )               | $\sum X_i$               |
| 几何分布 ( $p$ )                       | $\sum X_i$               |
| 指数率 $\lambda$                      | $\sum X_i$               |
| $N(\mu, \sigma^2)$ 两参              | $(\sum X_i, \sum X_i^2)$ |
| $N(\mu, \sigma^2)$ , $\sigma^2$ 已知 | $\bar{X}$                |
| $N(\mu, \sigma^2)$ , $\mu$ 已知      | $\sum(X_i - \mu)^2$      |
| $U(0, \theta)$                     | $X_{(n)}$                |
| $U(\theta_1, \theta_2)$            | $(X_{(1)}, X_{(n)})$     |

#### 4. 点估计优良性

估计  $g(\theta)$ 。偏差  $b(\theta) = \mathbb{E}_{\theta}T - g(\theta)$ ;

$$\text{MSE}_{\theta}(T) = \mathbb{E}_{\theta}(T - g(\theta))^2 = \text{Var}_{\theta}(T) + b^2(\theta).$$

无偏:  $b = 0$ 。弱相合:  $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ ; 充分条件:  $\text{MSE}_{\theta}(T_n) \rightarrow 0$ 。渐近无偏:

$\lim \mathbb{E}T_n = g(\theta)$ 。若  $T_1, T_2$  无偏且不相关,  $cT_1 + (1-c)T_2$  最小方差权重

$c = \text{Var}(T_2)/(\text{Var}(T_1) + \text{Var}(T_2))$ 。

#### 矩估计

总体原点矩  $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}_{\theta}X^k$ , 样本原点矩  $A_k = n^{-1} \sum X_i^k$ , 方程  $\mu_k(\theta) = A_k$ 。函数参数用代入。常用矩:

$$U(0, \theta) : \mathbb{E}X = \theta/2; \quad U(\theta, \theta+1) : \mathbb{E}X = \theta + 1/2; \quad U(\theta, 2\theta) : \mathbb{E}X = 3\theta/2.$$

$$\Gamma(r, \lambda)(\text{率}) : \mathbb{E}X = r/\lambda, \text{Var} X = r/\lambda^2; \quad \log N(a, \sigma^2) : \mathbb{E}X = e^{a+\sigma^2/2}.$$

### 最大似然估计

$$\hat{\theta} \in \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x}), \quad \ell(\theta) = \sum_i \log p_{\theta}(x_i).$$

内点可导:  $U(\theta) = 0$ ; 端点、非唯一、支持集含参时按定义比较。MLE 不变性:

$\widehat{g(\theta)}_{\text{MLE}} = g(\hat{\theta}_{\text{MLE}})$ 。

#### 常用 MLE/估计量

|   |  |
|---|--|
| Bernoulli( $p$ )                                | $\hat{p} = \bar{X}$  |
| Binomial( $k, p$ ), $k$ 已知                      | $\hat{p} = \bar{X}/k$                                      |
| Poisson( $\lambda$ )                            | $\hat{\lambda} = \bar{X}$                                  |
| 几何 ( $p$ , 取值 $1, 2, \dots$ )                   | $\hat{p} = 1/\bar{X}$                                      |
| 指数率 $\lambda$                                   | $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$                                |
| $N(\mu, \sigma^2)$                              | $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = S_n^2$ |
| $N(0, \sigma^2)$                                | $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum X_i^2$                       |
| $U(0, \theta)$                                  | $\hat{\theta} = X_{(n)}$                                   |
| $U(\theta, \theta+1)$                           | $\hat{\theta} \in [X_{(n)} - 1, X_{(1)}]$                  |
| $U(\theta, 2\theta)$                            | $\hat{\theta} = X_{(n)}/2$ (若可行)                           |
| $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1$ | $\hat{\theta} = -n / \sum \log X_i$                        |

#### Cramer-Rao 下界

单参数正则族, Fisher 信息

$$I(\theta) = \mathbb{E}_{\theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X; \theta) \right)^2 \right] = -\mathbb{E}_{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X; \theta).$$

样本信息  $nI(\theta)$ 。若  $T$  无偏估计  $g(\theta)$ :

$$\text{Var}_{\theta}(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}.$$

估计  $\theta$  时下界  $1/(nI(\theta))$ 。等号条件:

$$T - g(\theta) = a(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta; X).$$

达到 C-R 下界的无偏估计必为 UMVU; 效率  $e(T) = \{[g'(\theta)]^2 / (nI(\theta))\} / \text{Var}(T) \leq 1$ 。

正则性重点: 支持不依赖  $\theta$ 、可交换微分积分、 $0 < I(\theta) < \infty$ 。

#### Rao-Blackwell/UMVU

若  $T$  充分,  $\delta$  无偏, 则  $\delta^*(T) = \mathbb{E}(\delta | T)$  仍无偏且  $\text{Var}(\delta^*) \leq \text{Var}(\delta)$ 。若  $T$  完全充分, 则无偏函数  $h(T)$  唯一且为 UMVU。

# 数理统计半开卷公式笔记 (第 3 面: 区间估计)

## 5. 置信区间与枢轴变量

$[L(X), U(X)]$  是  $g(\theta)$  的  $1 - \alpha$  置信区间:  $P_\theta(L \leq g(\theta) \leq U) \geq 1 - \alpha$ . 枢轴变量: 含  $\theta$  与样本, 但分布不含未知参数.

### 单正态总体精确区间

$X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ , 置信系数  $1 - \alpha$ :

$$\mu, \sigma^2 \text{ 已知: } \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\mu, \sigma^2 \text{ 未知: } \bar{X} \pm t_{n-1}(\alpha/2) \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

$$\sigma^2, \mu \text{ 未知: } \left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)} \right].$$

$$\sigma^2, \mu \text{ 已知: } \left[ \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(\alpha/2)}, \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(1-\alpha/2)} \right].$$

$\sigma$  的区间为上述端点开平方. 单侧上限/下限把  $\alpha/2$  改为  $\alpha$ .

### 两个正态总体

记  $\delta = \mu_1 - \mu_2$ .

$$\delta, \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 已知: } \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}.$$

等方差未知:

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{m+n-2}(\alpha/2) S_p \sqrt{1/m + 1/n}.$$

配对:  $D_i = X_i - Y_i$ ,  $\bar{D} \pm t_{n-1}(\alpha/2) S_D / \sqrt{n}$ . 方差比:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[ \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{m-1, n-1}(\alpha/2)}, \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{m-1, n-1}(1-\alpha/2)} \right].$$

## 非正态/大样本区间

一般均值  $\mu$ :

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Poisson( $\lambda$ ) 近似:

$$\hat{\lambda} = \bar{X}, \quad \lambda \in \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\bar{X}/n}.$$

指数率  $\lambda$  精确:

$$2\lambda \sum X_i \sim \chi_{2n}^2, \quad \lambda \in \left[ \frac{\chi_{2n}^2(1-\alpha/2)}{2 \sum X_i}, \frac{\chi_{2n}^2(\alpha/2)}{2 \sum X_i} \right].$$

指数均值  $1/\lambda$  用端点取倒数并调换顺序.

### 比例 $p$

$X \sim B(n, p)$ ,  $\hat{p} = X/n$ . Wald:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Wilson/score,  $z = z_{\alpha/2}$ :

$$\frac{\hat{p} + z^2/(2n)}{1 + z^2/n} \pm \frac{z}{1 + z^2/n} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}.$$

半长不超过  $d$  的保守样本量:  $n \geq z_{\alpha/2}^2/(4d^2)$ ; 若有预估  $p_0$ , 用  $n \geq z_{\alpha/2}^2 p_0(1-p_0)/d^2$ .

### 均匀分布区间

$U(0, \theta)$ ,  $T = X_{(n)}$ ,  $T/\theta$  的分布函数  $u^n$  ( $0 < u < 1$ ). 一般形式: 取  $0 < a < b < 1$ ,  $b^n - a^n = 1 - \alpha$ ,

$$\theta \in [T/b, T/a].$$

常用单侧型:  $[T, T/\alpha^{1/n}]$ . 若  $U(\theta_1, \theta_2)$ , 端点信息集中于  $(X_{(1)}, X_{(n)})$ .

### 区间与检验

双侧水平  $\alpha$  检验与  $1 - \alpha$  置信区间对应: 点假设值不在区间内  $\Leftrightarrow$  拒绝该点假设. 单侧检验对应单侧置信限.

### 计算用恒等式

$$\chi_\nu^2(1-\alpha) = \text{左侧 } \alpha \text{ 分位}; \quad t_\nu(1-\alpha) = -t_\nu(\alpha).$$

正态样本预测:  $X_{n+1} | X_1, \dots, X_n$  的枢轴为  $(X_{n+1} - \bar{X}) / (S\sqrt{1+1/n})$ .

# 数理统计半开卷公式笔记 (第 4 面: 假设检验)

## 6. 基本概念

检验问题  $H_0: \theta \in \Theta_0$  vs  $H_1: \theta \in \Theta_1$ . 拒绝域  $D$ , 检验函数  $\varphi = I_D$ . 水平:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}(X \in D) \leq \alpha.$$

第一类错误:  $H_0$  真而拒绝; 第二类错误:  $H_1$  真而未拒绝. 功效函数  $\beta_{\varphi}(\theta) = P_{\theta}(X \in D)$ ; 在  $\Theta_1$  上越大越好.

### 通用拒绝域

若  $K$  在  $H_0$  下分布已知, 且采用上侧分位数:

$$H_1: > \quad K > K_{\alpha}; \quad H_1: < \quad K < K_{1-\alpha};$$

$$H_1: \neq \quad K < K_{1-\alpha/2} \text{ 或 } K > K_{\alpha/2}.$$

对  $Z, t$  的双侧写作  $|K| > K_{\alpha/2}$ .

### 单正态总体均值

$H_0: \mu = \mu_0$  或单侧复合原假设.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (\sigma^2 \text{ 已知}),$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad (\sigma^2 \text{ 未知}).$$

拒绝域:  $H_1: \mu > \mu_0$  用  $Z/T > q_{\alpha}$ ;  $H_1: \mu < \mu_0$  用  $Z/T < -q_{\alpha}$ ;  $H_1: \mu \neq \mu_0$  用  $|Z/T| > q_{\alpha/2}$ .

### 单正态总体方差

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ,

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad (\mu \text{ 未知}),$$

$$Q = \frac{\sum(X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_n^2 \quad (\mu \text{ 已知}).$$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ :  $Q > \chi_{\nu}^2(\alpha)$ ;  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ :  $Q < \chi_{\nu}^2(1-\alpha)$ ; 双侧取两尾  $\alpha/2$ .

## 两个正态总体均值差

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ .

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \quad (\sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ 已知}),$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta_0}{S_p \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{m+n-2} \quad (\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 未知}).$$

配对:  $T = (\bar{D} - \delta_0)/(S_D/\sqrt{n}) \sim t_{n-1}$ . 方向与单均值同.

## 两个正态总体方差比

$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \rho_0$ :

$$F = \frac{S_X^2/S_Y^2}{\rho_0} \sim F_{m-1, n-1}.$$

$H_1: \rho > \rho_0$ :  $F > F_{m-1, n-1}(\alpha)$ ;  $H_1: \rho < \rho_0$ :  $F < F_{m-1, n-1}(1-\alpha)$ ; 双侧取两尾.

## 大样本检验

一般均值:  $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(S/\sqrt{n}) \approx N(0, 1)$ . 单比例:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \approx N(0, 1).$$

两比例  $H_0: p_1 = p_2$ :

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}, \quad Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}.$$

Poisson( $\lambda$ ):  $Z = (\bar{X} - \lambda_0)/\sqrt{\lambda_0/n} \approx N(0, 1)$ .

## 似然比检验

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{x})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{x})}, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1,$$

拒绝域为  $\Lambda \leq c$ . 正则大样本:  $-2 \log \Lambda \Rightarrow \chi_r^2$ ,  $r = \dim \Theta - \dim \Theta_0$ .

## p 值

p 值是在  $H_0$  下“至少同样极端”的概率;  $p \leq \alpha$  等价于水平  $\alpha$  下拒绝. 双侧  $Z/t$  常用  $2P(K \geq |k_{\text{obs}}|)$ .

## 容易混淆

矩估计/相合不保证无偏; MLE 可不唯一;  $S^2$  与  $S_n^2$  分母不同;  $\chi^2, F$  表用上侧分位数; 等方差两样本才用  $S_p^2$ .