数理统计半开卷加密公式笔记（第 1 面：基本概念、抽样分布）

1．样本、统计量、常用量

总体分布族 $\mathcal{F}=\{F_\theta:\theta\in\Theta\}$；样本 $X_1,\ldots,X_n$ 简单随机：独立同分布，联合密度/概率 $p_\theta(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$。统计量 $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ 不含未知参数。

$$\bar X=\frac{1}{n}\sum X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar X)^2,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar X)^2.$$

$$nS_n^2=(n-1)S^2,\quad \sum(X_i-c)^2=\sum(X_i-\bar X)^2+n(\bar X-c)^2.$$

若 $\mathbb{E}X=\mu,\operatorname{Var}X=\sigma^2<\infty$：$\mathbb{E}\bar X=\mu,\operatorname{Var}(\bar X)=\sigma^2/n,\mathbb{E}S^2=\sigma^2$。变换 $Y_i=aX_i+b$：$\bar Y=a\bar X+b$，$S_Y^2=a^2S_X^2$。

样本矩与经验分布

原点矩 $A_k=n^{-1}\sum X_i^k$；中心矩 $B_k=n^{-1}\sum(X_i-\bar X)^k$。经验分布

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I\{X_i\le x\},\quad \mathbb{E}F_n(x)=F(x),\quad \operatorname{Var}F_n(x)=\frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

似然与模型

$L(\theta;\boldsymbol{x})=\prod p_\theta(x_i)$，$\ell=\log L$。支持集含 θ 时，指标函数必须留在 L 中。若内点可导，得分 $U(\theta)=\partial\ell/\partial\theta$。

常见分布矩/核

$b(1,p)$ $\mathbb{E}X=p,\operatorname{Var}X=p(1-p)$，$L\propto p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$
$B(k,p)$ $\mathbb{E}X=kp,\operatorname{Var}X=kp(1-p)$
$P(\lambda)$ $\mathbb{E}=\operatorname{Var}=\lambda$，$L\propto e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}$
$Exp(\lambda)$ 率 $\mathbb{E}=1/\lambda,\operatorname{Var}=1/\lambda^2$，$L\propto\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}$
$\Gamma(r,\lambda)$ 率 $\mathbb{E}=r/\lambda,\operatorname{Var}=r/\lambda^2$，($r$已知) $L_\lambda\propto\lambda^{nr}e^{-\lambda\sum x_i}$
$U(a,b)$ $\mathbb{E}=(a+b)/2,\operatorname{Var}=(b-a)^2/12$
$N(\mu,\sigma^2)$ $L\propto(\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\sum(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$

2．三大抽样分布

上侧分位数约定：

$$P(Z>z_\alpha)=\alpha,\quad P(t_\nu>t_\nu(\alpha))=\alpha,$$
$$P(\chi_\nu^2>\chi_\nu^2(\alpha))=\alpha,\quad P(F_{m,n}>F_{m,n}(\alpha))=\alpha.$$

若 $Z\sim N(0,1),V\sim\chi_\nu^2$ 独立：$Z/\sqrt{V/\nu}\sim t_\nu$。若 $U\sim\chi_m^2,V\sim\chi_n^2$ 独立：$(U/m)/(V/n)\sim F_{m,n}$；$F_{m,n}(\alpha)=1/F_{n,m}(1-\alpha)$。

正态总体样本分布

若 $X_i\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu,\sigma^2)$：

$$\bar X\sim N(\mu,\sigma^2/n),\quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2,\quad \bar X\perp S^2,$$

$$\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t_{n-1},\quad \frac{X_{n+1}-\bar X}{S\sqrt{1+1/n}}\sim t_{n-1}.$$

若用 S_n^2，则

$$\frac{X_{n+1}-\bar X}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\sim t_{n-1}.$$

分解：$\sum(X_i-\mu)^2=\sum(X_i-\bar X)^2+n(\bar X-\mu)^2$，且两项除以 σ^2 后独立，分别为 χ_{n-1}^2 与 χ_1^2。
若 a_i 常数，则 $\sum a_iX_i\sim N(\mu\sum a_i,\sigma^2\sum a_i^2)$。

两个独立正态总体

$X_i\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_1,\sigma_1^2),Y_j\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}N(\mu_2,\sigma_2^2)$：

$$\bar X-\bar Y\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right).$$

若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知：

$$S_p^2=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2},\quad \frac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/m+1/n}}\sim t_{m+n-2}.$$

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}\sim F_{m-1,n-1}.$$

配对样本用 $D_i=X_i-Y_i$，化为单正态总体。

次序统计量

设连续总体 F,f，$X_{(1)}\le\cdots\le X_{(n)}$：

$$f_{X_{(k)}}(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x).$$

$$P(X_{(1)}>x)=[1-F(x)]^n,\quad P(X_{(n)}\le x)=F(x)^n.$$

$$f_{X_{(i)},X_{(j)}}(u,v)=\frac{n![F(u)]^{i-1}[F(v)-F(u)]^{j-i-1}[1-F(v)]^{n-j}f(u)f(v)}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}.$$

若 $U(0,1)$，$X_{(k)}\sim\operatorname{Beta}(k,n-k+1)$；极差 R 的密度 $f_R(r)=n(n-1)r^{n-2}(1-r),0<r<1$。联合端点：$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(u,v)=n(n-1)[F(v)-F(u)]^{n-2}f(u)f(v)$，$u<v$。

极限定理

若 X_i iid，$\mathbb{E}X=\mu,0<\operatorname{Var}X=\sigma^2<\infty$：$\bar X\xrightarrow{a.s.}\mu$，$\sqrt n(\bar X-\mu)/\sigma\Rightarrow N(0,1)$。
Slutsky：$X_n\Rightarrow X$，$Y_n\xrightarrow{p}c$，则 $X_n+Y_n\Rightarrow X+c$，$X_nY_n\Rightarrow cX$。Delta 法：$\sqrt n(T_n-\theta)\Rightarrow N(0,\tau^2)$，$g'(\theta)\ne0\Rightarrow\sqrt n(g(T_n)-g(\theta))\Rightarrow N(0,[g'(\theta)]^2\tau^2)$。
Bernoulli/二项大样本（$0<p<1$）：$(\hat p-p)/\sqrt{p(1-p)/n}\Rightarrow N(0,1)$。

数理统计半开卷加密公式笔记（第 2 面：充分统计量、点估计、C-R 界）

3. 充分统计量

定义：给定 $T(X)$ 后，样本的条件分布不含 θ，则 T 对 θ 充分。因子分解定理：

$$p_\theta(\boldsymbol{x}) = g_\theta(T(\boldsymbol{x}))h(\boldsymbol{x}) \iff T \text{ 充分}.$$

离散型可用比值 $p_\theta(\boldsymbol{x})/P_\theta(T = t)$；连续型用条件密度。指数族

$$p_\theta(x) = c(\theta)h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\theta)T_j(x)\right\}$$

的样本充分统计量为 $\left(\sum_i T_1(X_i), \ldots, \sum_i T_k(X_i)\right)$。

常见充分统计量

Bernoulli/Binomial(k 已知)	$\sum X_i$
Poisson(λ)	$\sum X_i$
几何分布（p，取值 $1, 2, \ldots$）	$\sum X_i$
指数率 λ	$\sum X_i$
$N(\mu, \sigma^2)$ 两参	$(\sum X_i, \sum X_i^2)$
$N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知	$\bar{X}$
$N(\mu, \sigma^2)$，μ 已知	$\sum(X_i - \mu)^2$
$U(0, \theta)$	$X_{(n)}$
$U(\theta_1, \theta_2)$	$(X_{(1)}, X_{(n)})$

若 T 一一变换为 S，则充分性等价；充分统计量的函数不一定充分。因子分解中所有含 θ 的限制也要写进 $g_\theta(T)$，如 $I\{X_{(n)} \le \theta\}$。

4. 点估计优良性

估计 $g(\theta)$。偏差 $b(\theta) = \mathbb{E}_\theta T - g(\theta)$；

$$\mathrm{MSE}_\theta(T) = \mathbb{E}_\theta(T - g(\theta))^2 = \mathrm{Var}_\theta(T) + b^2(\theta).$$

无偏：$b = 0$。弱相合：$T_n \xrightarrow{p} g(\theta)$；充分条件：$\mathrm{MSE}_\theta(T_n) \to 0$。渐近无偏：$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\theta T_n = g(\theta)$。若 T_1, T_2 无偏估计同一目标且不相关，$cT_1 + (1-c)T_2$ 最小方差权重 $c = \mathrm{Var}(T_2)/(\mathrm{Var}(T_1) + \mathrm{Var}(T_2))$。若 T 无偏估计 θ，则 T^2 一般不是 θ^2 的无偏估计；$\mathbb{E}S_n^2 = (n-1)\sigma^2/n$，故 S_n^2 有偏、S^2 无偏。切比雪夫判据：
$\mathbb{E}T_n \to \theta, \mathrm{Var}(T_n) \to 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{p} \theta$。

矩估计

总体原点矩 $\mu_k(\theta) = \mathbb{E}_\theta X^k$，样本原点矩 $A_k = n^{-1}\sum X_i^k$，方程 $\mu_k(\theta) = A_k$。函数参数用代入。常用矩：

$$U(0,\theta) : \mathbb{E}X = \theta/2; \quad U(\theta,\theta+1) : \mathbb{E}X = \theta + 1/2; \quad U(\theta, 2\theta), \theta > 0 : \mathbb{E}X = 3\theta/2.$$

$$\Gamma(r,\lambda)(\text{率}) : \mathbb{E}X = r/\lambda, \mathrm{Var}\, X = r/\lambda^2; \quad \log N(a,\sigma^2) : \mathbb{E}X = e^{a+\sigma^2/2}.$$

二项 $B(k,p)$ 两参矩估计：令 $\hat{\mu} = A_1, \hat{v} = B_2 = A_2 - A_1^2$，
$\hat{p} = 1 - \hat{v}/\hat{\mu}$，$\hat{k} = \hat{\mu}/\hat{p} = \hat{\mu}^2/(\hat{\mu} - \hat{v})$（$k$ 需取正整数时另作约束）。正态两参矩：
$\hat{\mu} = A_1, \hat{\sigma}^2 = B_2$；Poisson：$\hat{\lambda} = A_1$；指数率：$\hat{\lambda} = 1/A_1$。

最大似然估计

$$\hat{\theta} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta; \boldsymbol{x}), \qquad \ell(\theta) = \sum_i \log p_\theta(x_i).$$

内点可导：$U(\theta) = 0$；端点、非唯一、支持集含参时按定义比较。MLE 不变性：$\widehat{g(\theta)}_{\mathrm{MLE}} = g(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}})$。二阶判别只在内点可导时有用；若 L 单调，MLE 多在参数空间端点。样本观测不满足支持约束时 $L = 0$。

常用 MLE/估计量

Bernoulli(p)	$\hat{p} = \bar{X}$
Binomial(k, p)，k 已知	$\hat{p} = \bar{X}/k$
Poisson(λ)	$\hat{\lambda} = \bar{X}$
几何（p，取值 $1, 2, \ldots$）	$\hat{p} = 1/\bar{X}$
指数率 λ	$\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\hat{\mu} = \bar{X}$，$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}} = S_n^2$
$N(0, \sigma^2)$	$\hat{\sigma}^2 = n^{-1}\sum X_i^2$
$U(0, \theta)$	$\hat{\theta} = X_{(n)}$
$U(\theta, \theta+1)$	$\hat{\theta} \in [X_{(n)} - 1, X_{(1)}]$
$U(\theta, 2\theta), \theta > 0$	可行域 $[X_{(n)}/2, X_{(1)}]$，$\hat{\theta} = X_{(n)}/2$
$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1$	$\hat{\theta} = -n/\sum \log X_i$

$U(0,\theta)$：$\mathbb{E}X_{(n)} = n\theta/(n+1)$，$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 无偏估计 θ；$\mathbb{E}\bar{X} = \theta/2$，$2\bar{X}$ 也无偏估计 θ。

Cramer–Rao 下界

单参数正则族，Fisher 信息

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta)\right)^2\right] = -\mathbb{E}_\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X;\theta).$$

样本信息 $nI(\theta)$。若 T 无偏估计 $g(\theta)$：

$$\mathrm{Var}_\theta(T) \ge \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}.$$

估计 θ 时下界 $1/(nI(\theta))$。等号条件：

$$T - g(\theta) = a(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta; X).$$

正则条件下，达到 C-R 下界的无偏估计必为 UMVU；效率
$e(T) = \{[g'(\theta)]^2/(nI(\theta))\}/\mathrm{Var}(T) \le 1$。正则性重点：支持不依赖 θ、可交换微分积分、$0 < I(\theta) < \infty$。

常见 Fisher 信息

Bernoulli(p)	$I(p) = 1/[p(1-p)]$
Poisson(λ)	$I(\lambda) = 1/\lambda$
指数率 λ	$I(\lambda) = 1/\lambda^2$
$N(\mu, \sigma^2)$，估 μ	$I(\mu) = 1/\sigma^2$
$N(\mu, \sigma^2)$，估 σ^2	$I(\sigma^2) = 1/(2\sigma^4)$
$f = \theta x^{\theta-1}$	$I(\theta) = 1/\theta^2$

Rao–Blackwell/UMVU

若 T 充分，δ 无偏，则 $\delta^*(T) = \mathbb{E}(\delta \mid T)$ 仍无偏且 $\mathrm{Var}(\delta^*) \le \mathrm{Var}(\delta)$。若 T 完全充分，且 $h(T)$ 无偏估计目标参数，则 $h(T)$ 为唯一 UMVU。

数理统计半开卷加密公式笔记（第 3 面：区间估计）

5．置信区间与枢轴变量

$[L(X), U(X)]$ 是 $g(\theta)$ 的 $1-\alpha$ 置信区间：$P_\theta(L \le g(\theta) \le U) \ge 1-\alpha$。枢轴变量：含 θ 与样本，但分布不含未知参数。

单正态总体精确区间

$X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，置信系数 $1-\alpha$：

$$\mu，\sigma^2\text{已知：}\quad \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\mu，\sigma^2\text{未知：}\quad \bar{X} \pm t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

$$\sigma^2，\mu\text{未知：}\quad \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right].$$

$$\sigma^2，\mu\text{已知：}\quad \left[\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_n(\alpha/2)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_n(1-\alpha/2)}\right].$$

σ 的区间为上述端点开平方。单侧上限/下限把 $\alpha/2$ 改为 α。常用单侧：μ 下限 $\bar{X} - q_\alpha SE$，上限 $\bar{X} + q_\alpha SE$；σ^2 下限 $A/\chi^2_\nu(\alpha)$，上限 $A/\chi^2_\nu(1-\alpha)$，$A = (n-1)S^2$ 或 $\sum(X_i-\mu)^2$。

两个正态总体

记 $\delta = \mu_1 - \mu_2$。

$$\delta，\sigma_1^2, \sigma_2^2\text{已知：}\quad \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}.$$

等方差未知：

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{m+n-2}(\alpha/2) S_p \sqrt{1/m + 1/n}.$$

配对：$D_i = X_i - Y_i$，$\bar{D} \pm t_{n-1}(\alpha/2) S_D/\sqrt{n}$。方差比：

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left[\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{m-1,n-1}(\alpha/2)}, \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2)}\right].$$

若不假定等方差，可用 Welch 近似：$T = (\bar{X} - \bar{Y} - \delta)/\sqrt{S_X^2/m + S_Y^2/n}$，近似 t_ν，$\nu \approx (a+b)^2\{a^2/(m-1) + b^2/(n-1)\}^{-1}$，$a = S_X^2/m, b = S_Y^2/n$。

非正态/大样本区间

一般均值 μ：

$$\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Poisson(λ) 近似：

$$\hat{\lambda} = \bar{X}, \qquad \lambda \in \bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{X}/n}.$$

Poisson 精确（$Y = \sum X_i$）：$\lambda \in [\chi^2_{2Y}(1-\alpha/2)/(2n), \chi^2_{2Y+2}(\alpha/2)/(2n)]$（$Y=0$ 时下限取 0）。指数率 λ 精确：

$$2\lambda \sum X_i \sim \chi^2_{2n}, \quad \lambda \in \left[\frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)}{2\sum X_i}, \frac{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}{2\sum X_i}\right].$$

指数均值 $1/\lambda$ 用端点取倒数并调换顺序。一般分位数法：若 $P_\theta(a < T(\theta, X) < b) = 1-\alpha$，代数解出 θ 即得区间。

比例 p

$X \sim B(n,p)$，$\hat{p} = X/n$。Wald：

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Wilson/score，$z = z_{\alpha/2}$：

$$\frac{\hat{p} + z^2/(2n)}{1 + z^2/n} \pm \frac{z}{1+z^2/n}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{z^2}{4n^2}}.$$

半长不超过 d 的保守样本量：$n \ge z^2_{\alpha/2}/(4d^2)$；若有预估 p_0，用 $n \ge z^2_{\alpha/2} p_0(1-p_0)/d^2$。两比例差大样本：$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/n_1 + \hat{p}_2(1-\hat{p}_2)/n_2}$。

均匀分布区间

$U(0,\theta)$，$T = X_{(n)}$，T/θ 的分布函数 $u^n (0<u<1)$。一般形式：取 $0<a<b<1$，$b^n - a^n = 1-\alpha$，

$$\theta \in [T/b,\ T/a].$$

常用单侧型：$[T,\ T/\alpha^{1/n}]$。若 $U(\theta_1, \theta_2)$，端点信息集中于 $(X_{(1)}, X_{(n)})$。单侧 $U(0,\theta)$ 下限也可取 T（覆盖概率 1）；上限由 $P(T/\theta \ge \alpha^{1/n}) = 1-\alpha$。

区间与检验

同一枢轴/统计量构造时，双侧水平 α 检验与 $1-\alpha$ 置信区间对应：点假设值不在区间内 $\Leftrightarrow$ 拒绝该点假设。单侧检验对应单侧置信限。

计算用恒等式

$$\chi^2_\nu(1-\alpha) = \text{左侧 }\alpha\text{分位}; \quad t_\nu(1-\alpha) = -t_\nu(\alpha).$$

正态样本预测：$X_{n+1} \mid X_1, \ldots, X_n$ 的枢轴为 $(X_{n+1} - \bar{X})/(S\sqrt{1+1/n})$。

数理统计半开卷加密公式笔记（第 4 面：假设检验）

6．基本概念

检验问题 $H_0:\theta\in\Theta_0$ vs $H_1:\theta\in\Theta_1$。拒绝域 D，检验函数 $\varphi=I_D$。水平：

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}P_\theta(X\in D)\le\alpha.$$

第一类错误：H_0 真而拒绝；第二类错误：H_1 真而未拒绝。功效函数 $\beta_\varphi(\theta)=P_\theta(X\in D)$；在 Θ_1 上越大越好。控制原则：先令第一类错误概率不超过 α，再尽量降低第二类错误。简单假设下 $\alpha=P_{\theta_0}(D)$，$\beta_{\mathrm{II}}=P_{\theta_1}(D^c)$。

通用拒绝域

若 K 在 H_0 下分布已知，且采用上侧分位数：

$$H_1:>\quad K>K_\alpha;\qquad H_1:<\quad K<K_{1-\alpha};$$

$$H_1:\neq\quad K<K_{1-\alpha/2}\text{ 或 }K>K_{\alpha/2}.$$

对 Z,t 的双侧写作 $|K|>K_{\alpha/2}$。右尾/左尾/双尾分别对应“越大越支持/越小越支持/偏离越支持”。

单正态总体均值

$H_0:\mu=\mu_0$ 或单侧复合原假设。

$$Z=\frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)\quad(\sigma^2\text{已知}),$$

$$T=\frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt n}\sim t_{n-1}\quad(\sigma^2\text{未知}).$$

令 $K=Z$ 或 T。拒绝域：$H_1:\mu>\mu_0$ 用 $K>q_\alpha$；$H_1:\mu<\mu_0$ 用 $K<-q_\alpha$；$H_1:\mu\neq\mu_0$ 用 $|K|>q_{\alpha/2}$。已知 σ 右尾功效：$P_\mu(Z>z_\alpha)=1-\Phi(z_\alpha-\sqrt n(\mu-\mu_0)/\sigma)$。

单正态总体方差

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$。

$$Q=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_{n-1}\quad(\mu\text{未知}),$$

$$Q=\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2_n\quad(\mu\text{已知}).$$

$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$：$Q>\chi^2_\nu(\alpha)$；$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$：$Q<\chi^2_\nu(1-\alpha)$；双侧取两尾 $\alpha/2$。方差检验依赖正态假设；χ^2 双侧临界点不对称。

两个正态总体均值差

$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta_0$。

$$Z=\frac{\bar X-\bar Y-\delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\quad(\sigma_1^2,\sigma_2^2\text{已知}),$$

$$T=\frac{\bar X-\bar Y-\delta_0}{S_p\sqrt{1/m+1/n}}\sim t_{m+n-2}\quad(\sigma_1^2=\sigma_2^2\text{未知}).$$

配对：$T=(\bar D-\delta_0)/(S_D/\sqrt n)\sim t_{n-1}$。方向与单均值同。两独立大样本均值差：$Z=[\bar X-\bar Y-\delta_0]/\sqrt{S_X^2/m+S_Y^2/n}\approx N(0,1)$。

两个正态总体方差比

$H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=\rho_0$：

$$F=\frac{S_X^2/S_Y^2}{\rho_0}\sim F_{m-1,n-1}.$$

$H_1:\rho>\rho_0$：$F>F_{m-1,n-1}(\alpha)$；$H_1:\rho<\rho_0$：$F<F_{m-1,n-1}(1-\alpha)$；双侧取两尾。

大样本检验

一般均值：$Z=(\bar X-\mu_0)/(S/\sqrt n)\approx N(0,1)$。单比例：

$$Z=\frac{\hat p-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\approx N(0,1).$$

两比例 $H_0:p_1=p_2$：

$$\hat p=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2},\quad Z=\frac{\hat p_1-\hat p_2}{\sqrt{\hat p(1-\hat p)(1/n_1+1/n_2)}}.$$

近似 $N(0,1)$。Poisson(λ)：$Z=(\bar X-\lambda_0)/\sqrt{\lambda_0/n}\approx N(0,1)$。检验用的标准误通常在 H_0 下代入；置信区间通常用估计值代入。

似然比检验

$$\Lambda(\boldsymbol x)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta;\boldsymbol x)}{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta;\boldsymbol x)},\quad 0\le\Lambda\le1,$$

拒绝域为 $\Lambda\le c$。正则且 H_0 为内点约束时，大样本：$-2\log\Lambda\Rightarrow\chi^2_r$，$r=\dim\Theta-\dim\Theta_0$。复合假设先求受限/非受限 MLE；简单对简单常用 $LR=L(\theta_0)/L(\theta_1)$ 作 Neyman–Pearson 检验。

p 值

p 值是在 H_0 下“至少同样极端”的概率；$p\le\alpha$ 等价于水平 α 下拒绝。双侧 Z/t 常用 $2P_{H_0}(K\ge|k_{\text{obs}}|)$。右尾 $p=P(K\ge k_{\text{obs}})$，左尾 $p=P(K\le k_{\text{obs}})$；χ^2,F 双侧不能按对称性简化。

容易混淆

矩估计/相合不保证无偏；MLE 可不唯一；S^2 与 S_n^2 分母不同；χ^2,F 表用上侧分位数；等方差两样本才用 S_p^2。