数理统计基础 · LaTeX公式知识图谱

正文公式已改为论文式矢量排版；分式、根号、上下标、希腊字母按数学公式显示；中文说明保留为可读文本

样本 $X_1,\dots,X_n$ — 统计量 $T(X)$ — 分布 $\chi^2,\ t,\ F$ — 点估计 $\hat\theta$ — 区间 $1-\alpha$ — 检验 H_0 vs H_1

1 第1章 统计推断的地基

先把"样本、统计量、模型、似然"这些对象摆正

10 张公式卡

1 总体与样本 · 定义

$Y := \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$

$X_1,\dots,X_n \overset{i.i.d}{\sim} F_\theta$

$p_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$

样本有二重性： ====/====

2 统计量合法性 · 判断

$T = T(X_1,\dots,X_n),\quad \theta$ not allowed

若 μ,σ² 未知： $\sum_i (X_i-\mu),\quad \sum_i X_i^2/\sigma^2$

若 a,b 已知： $Y_i = aX_i + b$

常见坑：题中"未知"两个字决定是否合法

3 样本均值与方差 · 公式

$\bar X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2$

$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2,\quad nS_n^2 = (n-1)S^2$

$E(\bar X) = \mu,\quad \mathrm{Var}(\bar X) = \frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2) = \sigma^2$

4 平方和恒等式 · 公式

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2 + n(\bar X-c)^2$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X) = 0$

$Y_i = aX_i + b \ \Rightarrow\ \bar Y = a\bar X + b$

$S_Y^2 = a^2 S_X^2$

5 样本矩 · 工具

$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^k$

$A_{kl} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k Y_i^l$

矩估计就是用 Ak 替换总体矩 μk(θ)

6 经验分布函数 · 公式

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x)$

$nF_n(x) \sim B(n, F(x))$

$E\{F_n(x)\} = F(x)$

$\mathrm{Var}\{F_n(x)\} = \frac{F(x)[1-F(x)]}{n}$

7 似然函数 · 核心

$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$

$\ell(\theta) = \log L(\theta; x) = \sum_{i=1}^{n}\log p_\theta(x_i)$

$U(\theta) = \frac{\partial\ell}{\partial\theta}$

支持集含 θ 时，指标函数不能丢

8 指数型分布族 · 结构

$p_\theta(x) = c(\theta)h(x)\exp\left\{\sum_j Q_j(\theta)T_j(x)\right\}$

$\exp\left\{\sum_j Q_j(\theta)\sum_i T_j(X_i)\right\}$

$\left(\sum_i T_1(X_i),\dots,\sum_i T_k(X_i)\right)$

Bernoulli/Poisson/指数/正态都可套这个结构

9 常见模型矩 · 速查

Bernoulli(p)： $E=p,\ \mathrm{Var}=p(1-p)$

Bin(k,p)： $E=kp,\ \mathrm{Var}=kp(1-p)$

Poisson(λ)： $E=\mathrm{Var}=\lambda$

Exp(λ)： $E=\frac{1}{\lambda},\ \mathrm{Var}=\frac{1}{\lambda^2}$

10 正态/均匀矩 · 速查

$N(\mu,\sigma^2)$： $E=\mu,\ \mathrm{Var}=\sigma^2$

$U(a,b)$： $E=\frac{a+b}{2},\ \mathrm{Var}=\frac{(b-a)^2}{12}$

$\Gamma(r,\lambda)$： $E=\frac{r}{\lambda},\ \mathrm{Var}=\frac{r}{\lambda^2}$

lognormal： $E(X)=e^{\mu+\sigma^2/2}$

2 第2章 抽样分布工具箱

所有区间和检验都在这里找"统计量的分布"

21 张公式卡

11 正态线性组合 · 公式

X_i indep.， $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$

$\sum a_iX_i \sim N\left(\sum a_i\mu_i, \sum a_i^2\sigma_i^2\right)$

$\sum a_iX_i \sim N\left(\mu\sum a_i, \sigma^2\sum a_i^2\right)$

这是构造 Z 统计量的入口

12 单正态样本分布 · 核心

$X_i \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$

$\bar X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\bar X$ 与 S^2 相互独立

13 t 枢轴 · 核心

$T = \frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

预测： $T = \frac{X_{n+1}-\bar X}{S\sqrt{1+1/n}} \sim t(n-1)$

若用 Sn： $\frac{X_{n+1}-\bar X}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sim t(n-1)$

自测题常考这个转换

14 平方和分解 · 公式

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2 + n(\bar X-\mu)^2$

两项除以 σ^2 后独立

$\frac{\sum(X_i-\bar X)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\frac{n(\bar X-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

15 两个正态总体 · 公式

$\bar X-\bar Y \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)$

$S_p^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

等方差来知： $T = \frac{\bar X-\bar Y-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/m+1/n}}$

$T \sim t(m+n-2)$

16 χ^2 分布 · 分布

若 Z1,…,Zn i.i.d.~N(0,1)

$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

可加性： $\chi^2(m)+\chi^2(n) = \chi^2(m+n)$

$E\chi^2(n)=n,\quad \mathrm{Var}\{\chi^2(n)\}=2n$

17 t 分布 · 分布

$Z \sim N(0,1),\quad V \sim \chi^2(n),\quad Z \perp V$

$\frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$

$t_\alpha(1-\alpha) = -t_\alpha(\alpha)$

n→∞ 时 t(n)→N(0,1)

18 F 分布 · 分布

$U \sim \chi^2(m),\quad V \sim \chi^2(n),\quad U \perp V$

$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n)$

$F \sim F(m,n) \Rightarrow F^{-1} \sim F(n,m)$

$F_{m,n}(\alpha) = \frac{1}{F_{n,m}(1-\alpha)}$

19 上侧分位数 · 约定

$P(Z > z_\alpha) = \alpha$

$P(t_r > t_r(\alpha)) = \alpha$

$P(\chi_r^2 > \chi_r^2(\alpha)) = \alpha$

$P(F_{m,n} > F_{m,n}(\alpha)) = \alpha$

20 次序统计量 · 定义

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$

连续总体 F,f

联合密度： $n!\prod f(x_i),\ \max 1 < \dots < xn$

端点参数模型常客 X(1),X(n)

21 单个次序统计量 · 公式

$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$

$\times\{F(x)\}^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x)$

$F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}F(x)^j[1-F(x)]^{n-j}$

本质：二项计数达到 k

22 最大最小 · 公式

$P(X_{(1)} > x) = [1-F(x)]^n$

$P(X_{(n)} \le x) = F(x)^n$

$f_{X_{(1)}} = n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$

$f_{X_{(n)}} = nF(x)^{n-1}f(x)$

23 两个次序统计量 · 公式

$f_{X_{(u)},X_{(v)}}(u,v) = \frac{n!}{[(u-1)!(v-u-1)!(n-v)!}\times$

$[F(u)]^{u-1}[F(v)-F(u)]^{v-u-1}$

$\times[1-F(v)]^{n-v}f(u)f(v),\quad u<v$

$n(n-1)[F(v)-F(u)]^{n-2}f(u)f(v)$

24 Uniform特例 · 公式

$X_i \sim U(0,1) \Rightarrow X_{(k)} \sim \mathrm{Beta}(k, n-k+1)$

$E\{X_{(k)}\} = \frac{k}{n+1}$

$U(0,\theta)$： $P\{X_{(n)}/\theta \le u\} = u^n$

$f_\theta(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r)$

25 极限分布 · 大样本

大数定律： $\bar X \to \mu$

CLT： $\frac{\sqrt{n}(\bar X-\mu)}{\sigma} \Rightarrow N(0,1)$

样本矩 Ak → E(X^k)

经验频率 → 概率

26 Slutsky · 大样本

$Xn \to X, Yn \to c$ *in probability*

$Xn + Yn \to X + c$

$XnYn \to cX$

$Xn/Yn \to X/c,\ c \ne 0$

27 Delta法 · 大样本

$\sqrt{n}(T_n-\theta) \Rightarrow N(0,\tau^2)$

$g'(\theta) \ne 0$

$\sqrt{n}[g(T_n)-g(\theta)] \Rightarrow N(0,[g'(\theta)]^2\tau^2)$

函数估计量渐近正态性的主工具

28 比例近似 · 大样本

$Y \sim B(n,p),\quad \hat p = Y/n$

$\frac{\hat p-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \Rightarrow N(0,1)$

检验标准误常用 p0

区间标准误常用 p̂ 或 Wilson 修正

29 充分统计量定义 · 压缩

给定 T 后样本条件分布不含 θ

T 压缩样本且不损失关于 θ 的信息

充分性依赖模型

T 的一一变换仍充分

30 因子分解定理 · 压缩

$p_\theta(x) = g_\theta(T(x))h(x) \iff T$ sufficient

离散型也可看 P0(X=x x | T=t)

含 θ 的支持约束要归入 g0(T)

指数族可直接读出充分统计量

31 常见充分统计量 · 速查

Bernoulli/Bin： $\sum X_i$

Poisson/Exp： $\sum_i X_i$

$N(\mu,\sigma^2)$： $(\sum X_i, \sum X_i^2)$

$U(0,\theta)$: $X_{(n)}$； $U(\theta_1,\theta_2)$: $(X_{(1)}, X_{(n)})$

3 第3章 点估计工坊

MOM 看矩，MLE 看似然，评价看 Bias / MSE / C-R

17 张公式卡

32 点估计对象 · 定义

用统计量 T(X) 估计 g(θ)

估计值是 T(x1,…,xn)

估计量不能含未知参数

函数参数也可直接估 g(θ)

33 Bias / MSE · 公式

$\mathrm{Bias}_\theta(T) = E_\theta T - g(\theta)$

$\mathrm{MSE}_\theta(T) = E_\theta(T-g(\theta))^2$

MSE = Var₀(T) + Bias²

无偏时 MSE=Var

34 无偏与相合 · 性质

$E_\theta T = g(\theta)$

$\lim E_\theta T_n = g(\theta)$

$T_n \to g(\theta)$ in probability

MSE → 0 ⇒ consistent

35 估计量组合 · 技巧

T_1, T_2 unbiased

$cT_1 + (1-c)T_2$ unbiased

$c = \frac{\mathrm{Var}(T_2)}{\mathrm{Var}(T_1)+\mathrm{Var}(T_2)}$

无偏估计之间比方差

36 矩法一般式 · MOM

$\mu_k(\theta) = E_\theta X^k$

$A_k = \frac{1}{n}\sum_i X_i^k$

$\mu_k(\theta) = A_k \ \to\ \theta$

多参数需要同数量矩方程

37 矩估计速查 · MOM

Bernoulli(p)： $\hat p = \bar X$

Poisson(λ)： $\hat\lambda = \bar X$

Exp(λ)： $\hat\lambda = 1/\bar X$

$N(\mu,\sigma^2)$： $\hat\mu = \bar X,\ \hat\sigma^2 = S_n^2$

38 Uniform矩估计 · MOM

$U(0,\theta)$： $\hat\theta = 2\bar X$

$U(\theta,\theta+1)$： $\hat\theta = \bar X - \frac{1}{2}$

$U(\theta,2\theta)$： $\hat\theta = \frac{2\bar X}{3}$

U(a,b)：均值和方差联立

39 二项两参矩估计 · MOM

$X \sim B(k,p)$： $\mu = kp,\ v = kp(1-p)$

$p = 1 - \frac{v}{\mu}$

$\hat k = \frac{\mu^2}{\mu-v+\mu}$

代入 μ̂=Ā1 ，v̂=A2−Ā1²

40 MLE定义 · MLE

$\hat\theta \in \mathrm{argmax}_{\theta\in\Theta}\ell(\theta;x)$

$L(\theta;x) = \prod_i p_\theta(x_i)$

$\ell(\theta) = \sum_i \log p_\theta(x_i)$

MLE 可不唯一

41 MLE步骤 · MLE

写参数空间 Θ

写 L 和支持约束

$\frac{\partial\ell}{\partial\theta} = 0$

最后比较边界与可行域

42 MLE不变性 · MLE

若 θ̂ 是 θ 的 MLE

$g(\hat\theta)$

可用于 θ², 1/λ, P(X>c)

多值 MLE 时函数值也可能多值

43 常见MLE · MLE

Bernoulli： $\hat p = \bar X$

Poisson： $\hat\lambda = \bar X$

Exp(λ)： $\hat\lambda = 1/\bar X$

$N(\mu,\sigma^2)$： $\hat\mu = \bar X,\ \hat\sigma^2 = S_n^2$

44 端点MLE · MLE

$U(0,\theta)$： $\hat\theta = X_{(n)}$

$U(\theta,\theta+1)$： $\hat\theta \in [X_{(n)}-1, X_{(1)}]$

$U(\theta,2\theta)$： $\hat\theta = X_{(n)}/2$

$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$： $\hat\theta = -\frac{n}{\sum\log x_i}$

45 Fisher信息 · C-R

$I(\theta) = E\{(\frac{\partial\log f}{\partial\theta})^2\}$

$I(\theta) = -E\{\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta^2}\}$

$I_n(\theta) = nI(\theta)$

支持依赖 θ 时常非正则

46 C-R不等式 · C-R

T 无偏估 g(θ)

$\mathrm{Var}_\theta(T) \ge \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$

$\mathrm{Var}(T) \ge \frac{\tau'^2}{nI(\theta)}$

达到下界 ⇒ 有效估计

47 常见信息量 · C-R

Bernoulli(p)： $I = \frac{1}{p(1-p)}$

Poisson(λ)： $I = \frac{1}{\lambda}$

Exp(λ)： $I = \frac{1}{\lambda^2}$

N： $I_\mu = \frac{1}{\sigma^2},\quad I_{\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}$

48 Rao-Blackwell · UMVU

T 充分，δ 无偏

$\delta^*(T) = E(\delta \mid T)$

$\mathrm{Var}(\delta^*) \le \mathrm{Var}(\delta)$

充分统计量可以改进估计

4 第4章 区间估计雷达

选一个分布不含未知参数的枢轴变量，然后反解参数

18 张公式卡

49 置信区间 · 定义

随机区间 [L(X),U(X)]

$P_\theta\{L \le g(\theta) \le U\} \ge 1-\alpha$

1−α：置信水平

L,U：置信限；多参数为置信域

50 枢轴变量法 · 步骤

Q(X,θ) 含 θ 与样本

Q 的分布不含未知参数

写 P(a<Q<b)=1−α

代数反解 θ 成 g(θ)

51 分位数方向 · 提醒

上侧分位： $P(K > K_\alpha) = \alpha$

双侧常用 α/2

χ²/F 不对称，端点易反

反解时检查单调性

52 μ，σ²已知 · 正态CI

$Z = \frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

CI: $\bar X \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

下限： $\bar X - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

上限： $\bar X + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

53 μ，σ²未知 · 正态CI

$T = \frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

CI: $\bar X \pm t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S}{\sqrt{n}}$

小样本正态必须用 t

大样本可近似用 z

54 σ²，μ未知 · 正态CI

$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

CI: $\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right\}$

σ 区间：端点开方

55 σ²，μ已知 · 正态CI

$Q = \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$

CI: $\left\{\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right\}$

自由度 n，不是 n−1

56 预测区间 · 正态CI

$T = \frac{X_{n+1}-\bar X}{S\sqrt{1+1/n}} \sim t(n-1)$

X_{n+1}： $\bar X \pm t_{n-1}(\alpha/2)S\sqrt{1+1/n}$

若用 Sn 要换算

自测题重点

57 均值差方差已知 · 两样本CI

$\hat\theta = \mu_1-\mu_2$

$\bar X-\bar Y \sim N(\delta, \sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n)$

CI: $\bar X-\bar Y \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$

目标若是 b−a，注意符号

58 均值差等方差未知 · 两样本CI

$S_p^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

$T = [\bar X-\bar Y-\delta]/[S_p\sqrt{1/m+1/n}] \sim t(m+n-2)$

CI: $\bar X-\bar Y \pm t_{S_p}\sqrt{1/m+1/n}$

前提：正态、独立、等方差

59 配对区间 · 两样本CI

$D_i = X_i - Y_i$

$\bar D \pm t_{n-1}(\alpha/2)\frac{S_D}{\sqrt{n}}$

本质：单正态均值区间

前后/同一对象两处理时使用

60 方差比区间 · 两样本CI

$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in \left\{\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F(1-\alpha/2)}\right\}$

自由度顺序跟 Sx²/Sy² 一致

61 一般均值大样本 · 近似CI

CLT + Slutsky

CI: $\bar X \pm z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

非正态大样本可用

小样本非正态要谨慎

62 比例Wald · 近似CI

$\hat p = X/n$

CI: $\hat p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat p(1-\hat p)}{n}}$

保守样本量： $n \ge \frac{z^2}{4\delta^2}$

有预估 p0： $n \ge \frac{z^2p_0(1-p_0)}{\delta^2}$

63 Wilson/Score · 近似CI

中心： $\frac{\hat p+z^2/(2n)}{1+z^2/n}$

半长： $\frac{z}{1+z^2/n}\sqrt{\frac{\hat p(1-\hat p)}{n}+\frac{z^2}{4n^2}}$

p 接近 0/1 时比 Wald 稳

课件重点提到 score interval

64 Poisson λ · 近似/精确

近似： $\bar X \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\bar X/n}$

$Y = \sum X_i$

精确： $\left\{\frac{\chi^2_L(1-\alpha/2)}{2n}, \frac{\chi^2_{1-L}(\alpha/2)}{2n}\right\}$

65 指数率 λ · 精确CI

Xi~ Exp(λ率)

$2\lambda\sum X_i \sim \chi^2(2n)$

λ CI: $\left\{\frac{\chi^2_L(1-\alpha/2)}{2\sum X_i}, \frac{\chi^2_U(\alpha/2)}{2\sum X_i}\right\}$

66 Uniform(0,θ) · 精确CI

$T = X_{(n)},\quad P(T/\theta \le u) = u^n$

取 0<a<b<1 ，b^−a^=1−α

θ CI: $[T/b, T/a]$

常用单侧： $[T, T/\alpha^{1/n}]$

5 第5章 假设检验法庭

H0 下统计量怎么分布，备择方向就决定拒绝域朝哪边开

20 张公式卡

67 假设与拒绝域 · 定义

$H_0: \theta \in \Theta_0,\quad H_1: \theta \in \Theta_1$

拒绝域 D ⊂ 样本空间

$\phi(x) = I(x \in D)$

检验统计量 K(X) 刻画 D

68 两类错误与功效 · 概念

第一类错误：H0 真却拒绝

第二类错误：H1 真却未拒绝

$\beta(\theta) = P_\theta(X \in D)$

原则：先控第一类，再提高功效

69 检验水平 · 公式

α： $\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(D) \le \alpha$

$P_{\theta_0}(D) = \alpha$

复合 H0 取最环境沉上确界

结论不能写成"接受 H1 为真"

70 拒绝域方向 · 口诀

$K > K_\alpha$

$K < K(1-\alpha)$

$K < K(1-\alpha/2)$ or $K > K(\alpha/2)$

$|K| > q_{\alpha/2}$

71 单均值 σ²已知 · Z检验

$H_0: \mu = \mu_0$

$Z = \frac{\bar X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow Z > z_\alpha$

$H_1: \mu \ne \mu_0 \Rightarrow |Z| > z_{\alpha/2}$

72 单均值 σ²未知 · t检验

$T = \frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$T > t_{n-1}(\alpha)$

$T < -t_{n-1}(\alpha)$

$|T| > t_{n-1}(\alpha/2)$

73 单方差 μ未知 · χ²检验

$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow Q > \chi^2(\alpha)$

$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow Q < \chi^2(1-\alpha)$

双侧取两尾 α/2

74 单方差 μ已知 · χ²检验

$Q = \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$

自由度 n，不是 n−1

其他拒绝域同 χ² 方向

方差检验强依赖正态性

75 已知α的功效 · 功效

右尾 D=[Z>zα]

$\beta(\mu) = 1 - \Phi\{z_\alpha - \frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)}{\sigma}\}$

左尾/双尾按拒绝域代入

样本量可由功效约束反解

76 两均值差方差已知 · 两样本

$H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$

$Z = \frac{\bar X-\bar Y-\delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$

右/左/双尾按 δ 的备择方向

独立正态或大样本可用

77 两均值差等方差未知 · 两样本

$T = \frac{\bar X-\bar Y-\delta_0}{S_p\sqrt{1/m+1/n}} \sim t(m+n-2)$

$S_p^2 = \frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}$

前提：正态、独立、等方差

不等方差用近似 Z/Welch

78 配对检验 · 两样本

$D_i = X_i - Y_i$

$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \rho_0$

$H_0: \mu_D = \delta_0$

$T = \frac{\bar D-\delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

配对数据不能当独立两样本

79 方差比检验 · 两样本

$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \rho_0$

$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$

$F > F_{m-1,n-1}(\alpha)$

$F < F(1-\alpha/2)$ or $F > F(\alpha/2)$

80 一般均值大样本 · 近似检验

$Z = \frac{\bar X-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$

非正态大样本由 CLT 支撑

小样本非正态不能直接用 t

结论回到实际语境

81 单比例检验 · 近似检验

$H_0: p = p_0$

$Z = \frac{\hat p-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \approx N(0,1)$

检验标准误用 p0

区间标准误常用 p̂

82 两比例检验 · 近似检验

$H_0: p_1 = p_2$

$\hat p = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$

$Z = \frac{\hat p_1-\hat p_2}{\sqrt{\hat p(1-\hat p)(1/n_1+1/n_2)}}$

备择方向决定尾部

83 Poisson检验 · 近似检验

$H_0: \lambda = \lambda_0$

$Z = \frac{\bar X-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \approx N(0,1)$

也可用总数 Y=ΣXi

大样本近似依赖 nλ0 足够大

84 似然比检验 · LRT

$\Lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L}{\sup_\Theta L}$

$0 \le \Lambda \le 1$

$\Lambda \le c$

$-2\log\Lambda \to \chi^2(r)$

85 区间与检验对偶 · 关系

双侧水平 α 检验 ↔ 1−α 置信区间

$\theta_0 \notin CI \iff$ reject $H_0: \theta = \theta_0$

单侧检验 ↔ 单侧置信限

可用区间快速判断检验结论

86 p值 · 结论

p值：H0 下至少同样检验的概率

$p = P(K \ge k_{obs})$

$p = P(K \le k_{obs})$

$p = 2P(K \ge |k_{obs}|)$

练 11次作业与自测关卡

把题目类型压缩成可复用路线；不抄原题

12 张公式卡

87 W1 基础对象 · 作业线

有限/无限总体与分布

统计量是否合法

样本变换与样本方差

联合密度与模型识别

88 W2 抽样分布 · 作业线

正态样本均值/方差

χ^2、t、F 构造与分位数

独立性判断

由标准化得到统计量分布

89 W3 次序/极限 · 作业线

次序统计量密度

极差与 Uniform 特例

CLT 近似

两样本正态统计量

90 W4 充分性 · 作业线

定义法： ====/====θ

$p_\theta(x) = g_\theta(T)h(x)$

Poisson/几何/指数/正态模型

支持含参注意 min/max

91 W5 矩估计 · 作业线

二项两参、正态、Gamma、对数正态

函数参数用代入

无偏/渐近无偏判断

矩估计不唯一

92 W6 MLE · 作业线

可导模型： $nscore = 0$

支持含参：先找可行域

非唯一 MLE 写集合

Uniform/双参数指数O-1练

93 W7 C-R · 作业线

正则条件检查

Fisher 信息量

C-R 下界

有效估计与估计量组合

94 W8 区间估计 · 作业线

μ 的 Z/t 区间

σ² 的 χ² 区间

单侧限与样本量

预测统计量

95 W9 两样本/非正态区间 · 作业线

两个正态均值差

方差比 F 区间

比例/Poisson/指数

表格补全：条件-统计量-分布-区间

96 W10 单样本检验 · 作业线

H0/H1 与拒绝域

正态均值/方差检验

Bernoulli/Poisson 大样本

功效函数与临界值

97 W11 两样本检验 · 作业线

两均值差检验

两方差比检验

配对 t 检验

两比例差检验

98 自测高频坑 · 提醒

矩估计/相合不必无偏

MLE 不一定唯一

C-R 正则条件不能漏

$\bar X$ 与 S^2 独立只在正态样本中成立

总路线：样本/统计量 → 抽样分布 → MOM/MLE → 枢轴区间 → H0 下统计量与拒绝域；本图只保留知识点与公式，不放原题和解题步骤。

数学公式为矢量排版，放大照打印清晰；中文说明仍为 SVG text。