

Multivariate Statistical Analysis

多元统计分析

2026年4月16日

已学知识点 (Recap)

第 6 章 估计理论

- ▶ **似然函数**: 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} f(x; \theta)$, 将样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率函数

$L(\mathcal{X}; \theta)$ 看作 θ 的一个函数, 称其为似然函数.

离散 $\rightarrow L(\mathcal{X}; \theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$

连续 $\rightarrow L(\mathcal{X}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$

- ▶ **极大似然估计 (MLE)**: $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\mathcal{X}; \theta) = \arg \max_{\theta} \ell(\mathcal{X}; \theta)$

- 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N_p(\mu, \Sigma)$, 则 μ, Σ 的极大似然估计分别为 $\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\Sigma} = \mathcal{S} \end{cases}$

$\mathcal{S}_u = \frac{n}{n-1} \mathcal{S}$ 是 Σ 的无偏估计

无偏估计

有偏估计

已学知识点 (Recap)

第 6 章 估计理论

► Cramer-Rao 下界

- **评分函数**: $s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是对数似然函数关于 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ 的导数

$$s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ell(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$$

- **Fisher 信息矩阵**: 评分函数的协方差矩阵 $\mathcal{F}_n = \text{Var} [s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})]$.
- 设 $s = s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是评分函数, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是 \mathcal{X} 与 $\boldsymbol{\theta}$ 的任一函数, 则在

正则条件下有
$$\mathbb{E}(s\boldsymbol{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\boldsymbol{t}^T) - \mathbb{E}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right).$$

- 设 $s = s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是评分函数, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\mathcal{X})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的任意一个无偏估计量, 则
$$\mathbb{E}(s\boldsymbol{t}^T) = \text{Cov}(s, \boldsymbol{t}) = \mathcal{F}_k.$$

已学知识点 (Recap)

第 6 章 估计理论

► Cramer-Rao 下界

- **Cramer-Rao:** 设 $\hat{\theta} = t = t(\mathcal{X})$ 是 θ 的任意一个无偏估计量, 则在正则条件下有

$$\text{Var}(t) \geq \mathcal{F}_n^{-1}$$

其中

$$\mathcal{F}_n = \mathbb{E} \left\{ s(\mathcal{X}; \theta) \left[s(\mathcal{X}; \theta) \right]^T \right\} = \text{Var} \left[s(\mathcal{X}; \theta) \right]$$

是 Fisher 信息矩阵.

已学知识点 (Recap)

第 6 章 估计理论

- ▶ 假设 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ 是独立同分布的样本. 若 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$ 的极大似然估计, 则在一定的正则条件下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有:

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k(\mathbf{0}, \mathcal{F}_1^{-1})$$

其中 \mathcal{F}_1 表示样本容量 $n = 1$ 时的 Fisher 信息.

- 极大似然估计 (MLE) 是渐进无偏的
- 极大似然估计 (MLE) 是渐进有效的 (最小方差)
- 极大似然估计 (MLE) 是渐进正态分布的
- $n (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \widehat{\mathcal{F}}_1 (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2, \quad n \rightarrow \infty$

Chapter 7 Hypothesis Testing

假设检验

概要

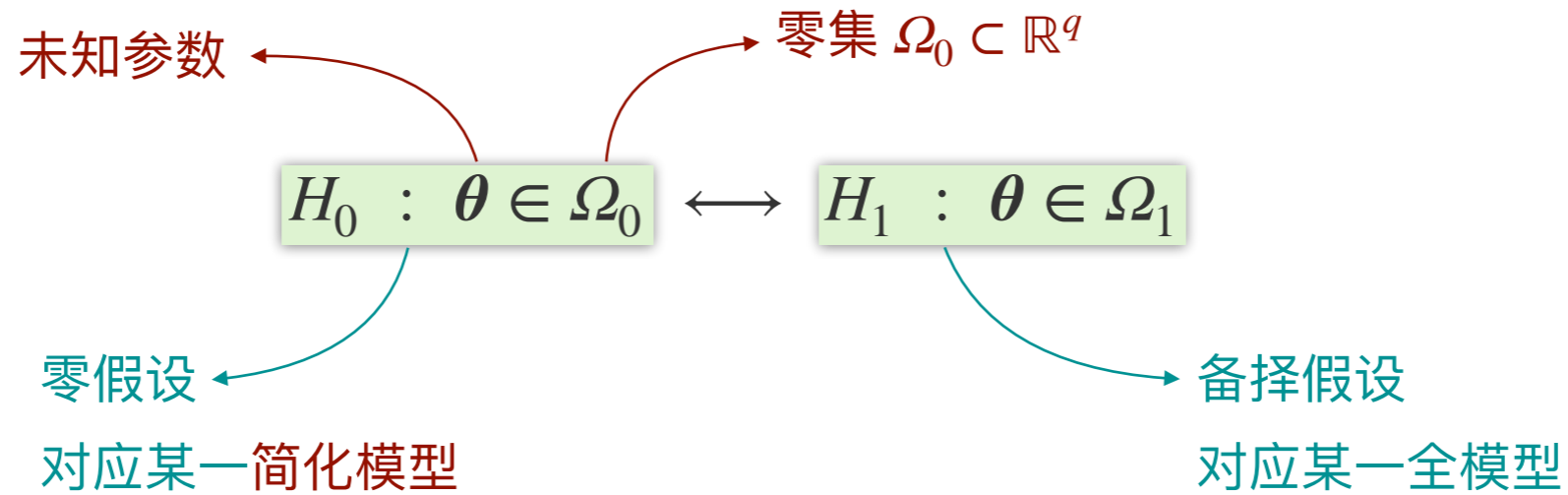
假设检验

似然比检验

线性假设

Boston 房屋数据

假设检验



- 假设检验问题的解通过**拒绝域** (rejection region) R 来确定, 它由**样本空间** (sample space) 中某些值的集合构成, 这些值对应着拒绝零假设 H_0 、接受备择假设 H_1 的决策.

$$P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}) = \alpha$$

事先指定的显著水平 $\rightarrow \alpha$
 犯第 I 类错误的概率 \rightarrow $P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真})$
 第 I 类错误 \rightarrow 拒绝 H_0

- 实际上, 由于 H_0 一般是一个复合假设, 所以 R 常通过满足下式来确定

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} P(\mathcal{X} \in R \mid \theta) = \alpha$$

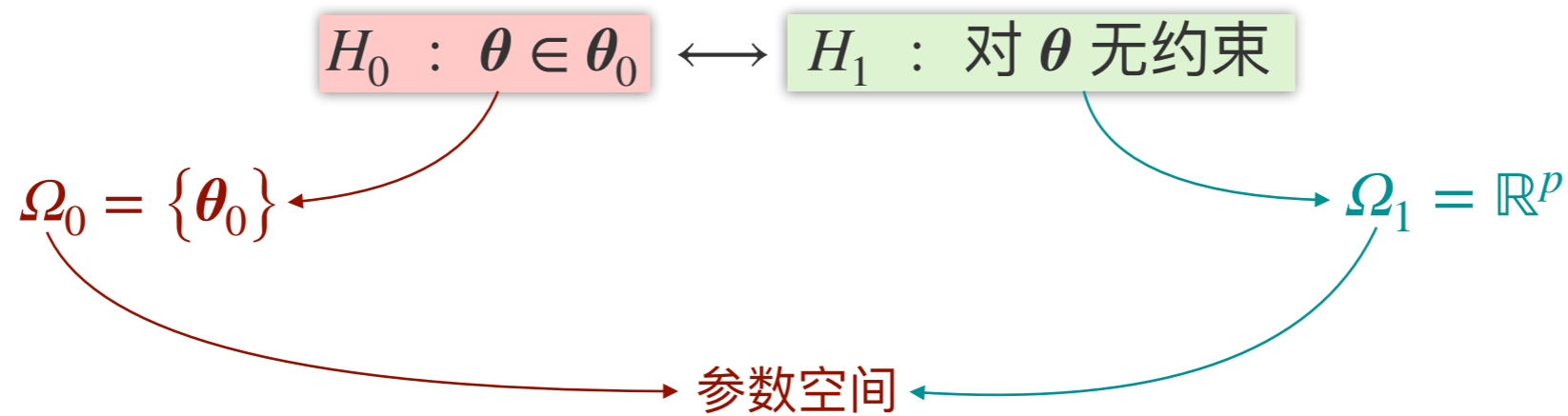
似然比原理 \rightarrow $\sup_{\theta \in \Omega_0} P(\mathcal{X} \in R \mid \theta)$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 假设检验的问题: $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x; \theta)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$H_0 : \theta \in \Omega_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Omega_1$$

- 例:** 对于多元正态总体 $N_p(\theta, \mathcal{F}_p)$. 为检验 θ 是否等于某一特定值 θ_0 , 我们有



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 假设检验的问题: $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x; \theta)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$H_0 : \theta \in \Omega_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Omega_1$$

▶ 定义

$$L_0^* = \max_{\theta \in \Omega_0} L(\mathcal{X}; \theta), \quad L_1^* = \max_{\theta \in \Omega_1} L(\mathcal{X}; \theta)$$

似然比 (Likelihood Ratio) (LR): $\lambda(\mathcal{X}) \triangleq \frac{L_0^*}{L_1^*}$

- ▶ 如果似然比 (LR) 的值很大, 我们倾向于接受 H_0 . 如果似然比 (LR) 的值很小, 我们倾向于接受 H_1 .
- ▶ 显著水平 α 时, H_0 针对 H_1 的似然比检验的拒绝域为 $R = \{ \mathcal{X} : \lambda(\mathcal{X}) < c \}$, 其

中 c 由 $\sup_{\theta \in \Omega_0} P(\mathcal{X} \in R) = \alpha$ 确定.

难点: 因为 $\lambda(\mathcal{X})$ 的复杂性, 如何将 c 表示为 α 的函数是难点!

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 假设检验的问题: $x_1, x_2, \dots, x_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x; \theta)$, $x_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$H_0 : \theta \in \Omega_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Omega_1$$

▶ 定义

$$L_0^* = \max_{\theta \in \Omega_0} L(\mathcal{X}; \theta), \quad L_1^* = \max_{\theta \in \Omega_1} L(\mathcal{X}; \theta)$$

似然比 (Likelihood Ratio) (LR): $\lambda(\mathcal{X}) \triangleq \frac{L_0^*}{L_1^*}$

- ▶ 除 λ 外, 等价地, 我们还可以使用对数似然比 $-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right)$.
- ▶ 此时的拒绝域为 $R = \left\{ \mathcal{X} : -2 \log \lambda(\mathcal{X}) > k \right\}$.
- ▶ 为确定 c 或 k , 我们需要知道 λ 或 $-2 \log \lambda$ 的分布?

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

定理 7.1 (Wilks 定理) 如果 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^q$ 是一个 q 维空间, 而 $\Omega_0 \subset \Omega_1$ 是 r 维的子空间, 则在正则条件下

$$\forall \theta \in \Omega_0 : -2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{q-r}^2 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

拒绝域: $R = \left\{ \mathcal{X} : -2 \log \lambda(\mathcal{X}) > k \right\}$

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} P(\mathcal{X} \in R) = \alpha$$

$$\implies k = \chi_{q-r}^2(\alpha)$$

上侧 α 分位数

- ▶ 渐进地, 似然比检验 (LRT) 的拒绝域为

$$R = \left\{ \mathcal{X} : -2 \log \lambda(\mathcal{X}) > \chi_{q-r}^2(\alpha) \right\}$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 1: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 已知.

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \longleftrightarrow H_1: \text{无约束}$$

$$\Omega_0 = \{\boldsymbol{\mu}_0\} \implies \Omega_0 \text{ 的维数 } r = 0$$

$$\Omega_1 = \mathbb{R}^p \implies \Omega_1 \text{ 的维数 } q = p$$

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}) = \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$\ell(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}) = \log L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})$$

$$= -\frac{n}{2} \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} n \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathcal{S}) - \frac{1}{2} n (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 1: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 已知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

$$\ell(\mathcal{X}; \mu) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n (\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)$$

▶ 当 H_0 为真时, 我们有

$$\ell_0^* = \ell(\mu_0) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n (\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0)$$

▶ 在假设 H_1 下, $\ell(\mu)$ 的最大值为

$$\ell_1^* = \ell(\bar{x}) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S})$$

$$\implies -2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = n (\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \stackrel{H_0 \text{ 真}}{\sim} \chi_p^2$$

定理 4.7 设 $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$, 则二次型变量 $U = (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)$ 服从 χ_p^2 分布.

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：再来考虑钞票数据. 我们来检验伪钞的总体均值是否等于

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 214.8 \\ 130.3 \\ 130.2 \\ 10.5 \\ 11.1 \\ 139.4 \end{pmatrix}$$

真钞的样本均值. 伪钞的样本均值.

```

library(mclust)
data(banknote)
str(banknote)
head(banknote)
banknote_genuine = subset(banknote, Status == 'genuine')[, 2:7]
banknote_counterfeit = subset(banknote, Status == 'counterfeit')[, 2:7]
mu_0 <- sapply(banknote_genuine, mean); mu_0
x_bar <- sapply(banknote_counterfeit, mean); x_bar
    
```

```

> mu_0 <- sapply(banknote_genuine, mean); mu_0
  Length      Left      Right      Bottom      Top Diagonal
214.969 129.943 129.720      8.305  10.168 141.517
> x_bar <- sapply(banknote_counterfeit, mean); x_bar
  Length      Left      Right      Bottom      Top Diagonal
214.823 130.300 130.193  10.530  11.133 139.450
    
```

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- **例：** 再来考虑钞票数据. 我们来检验伪钞的总体均值是否等于 $\mu_0 =$
- ▶ 我们假设估计得到的协方差矩阵就是总体的协方差矩阵 Σ .

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix} .$$

```

n <- dim(banknote_counterfeit)[1]
Sigma <- (n-1) * cov(banknote_counterfeit) / n
Sigma
  
```

```

> Sigma
      Length      Left      Right      Bottom      Top Diagonal
Length  0.122771  0.0312  0.023761 -0.09959  0.019241  0.01145
Left    0.031200  0.0644  0.046300 -0.02380 -0.011800 -0.00500
Right   0.023761  0.0463  0.088051 -0.01839  0.000131  0.03385
Bottom -0.099590 -0.0238 -0.018390  1.26850 -0.485290  0.23610
Top     0.019241 -0.0118  0.000131 -0.48529  0.400411 -0.02185
Diagonal 0.011450 -0.0050  0.033850  0.23610 -0.021850  0.30810
  
```

Σ



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：再来考虑钞票数据. 我们来检验伪钞的总体均值是否等于 $\mu_0 =$

$$\begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}.$$

- 我们来进行似然比检验, 计算可得

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = n \left(\bar{x} - \mu_0 \right)^T \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \mu_0 \right) = 7362.32$$

```

mu_0 <- as.matrix(mu_0)
x_bar <- as.matrix(x_bar)
n * t(x_bar - mu_0) %*% solve(Sigma) %*% (x_bar - mu_0)
  
```

```

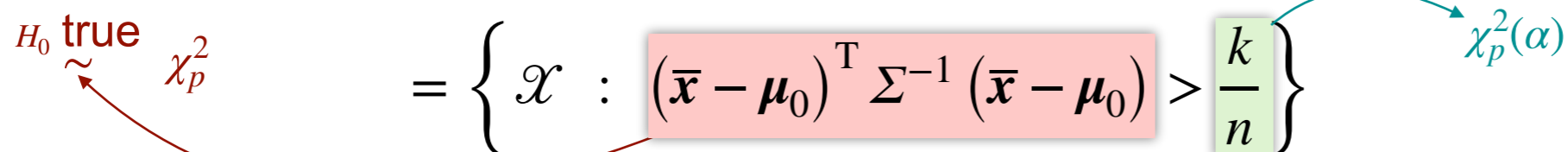
> n * t(x_bar - mu_0) %*% solve(Sigma) %*% (x_bar - mu_0)
      [,1]
[1,] 7362.316
  
```

$$\begin{aligned} \implies k &= n \cdot \chi_p^2(\alpha) \\ &= 100 \times \chi_6^2(0.05) = 1259.159 \end{aligned}$$

- 拒绝域: $R = \left\{ \mathcal{X} : -2 \log \lambda (\mathcal{X}) > k \right\}$

$$= \left\{ \mathcal{X} : n \left(\bar{x} - \mu_0 \right)^T \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \mu_0 \right) > k \right\}$$

$$= \left\{ \mathcal{X} : \left(\bar{x} - \mu_0 \right)^T \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \mu_0 \right) > \frac{k}{n} \right\}$$



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：再来考虑钞票数据. 我们来检验伪钞的总体均值是否等于 $\mu_0 =$

$$\begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}.$$

- ▶ 我们来进行似然比检验, 计算可得

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = n \left(\bar{x} - \mu_0 \right)^T \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \mu_0 \right) = 7362.32$$

- ▶ 拒绝域: $R = \left\{ \mathcal{X} : -2 \log \lambda (\mathcal{X}) > 1259.159 \right\}$

$$7362.32 > 1259.159$$

- ▶ 结论: 伪钞的均值与 $\mu_0 = \begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}$ 有显著差异.

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 未知.

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \longleftrightarrow H_1: \text{无约束}$$

$$f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{x}_i; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$\ell(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \log L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})$$

$$= -\frac{n}{2} \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} n \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathcal{S}) - \frac{1}{2} n (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

▶ 当 H_0 为真时, 可以证明

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) (x_i - \mu_0)^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0) (x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^T \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \bar{x}) (x_i - \bar{x})^T + (x_i - \bar{x}) (\bar{x} - \mu_0)^T + (\bar{x} - \mu_0) (x_i - \bar{x})^T + (\bar{x} - \mu_0) (\bar{x} - \mu_0)^T \right] \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (x_i - \bar{x})^T + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (\bar{x} - \mu_0)^T + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu_0) (x_i - \bar{x})^T \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - \mu_0) (\bar{x} - \mu_0)^T \\
 &= \mathcal{S} + \underbrace{(\bar{x} - \mu_0)}_{d \triangleq \bar{x} - \mu_0} (\bar{x} - \mu_0)^T = \mathcal{S} + dd^T \implies \ell_0^* = \ell(\mu_0, \mathcal{S} + dd^T)
 \end{aligned}$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$. $\ell(\mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$

$$\begin{aligned}
 -2 \log \lambda &= 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) \right] \\
 &= -n \log |2\pi\mathcal{S}| - n \operatorname{tr}(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}) - n(\bar{x} - \bar{x})^T \mathcal{S}^{-1}(\bar{x} - \bar{x}) + n \log \left| 2\pi(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) \right| \\
 &\quad + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} \mathcal{S} \right] + n(\bar{x} - \mu_0)^T (\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \\
 &= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} \mathcal{S} \right] + n \mathbf{d}^T (\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} \mathbf{d} - np \\
 &= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} \mathcal{S} \right] + n \operatorname{tr} \left[\mathbf{d}^T (\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T)^{-1} \mathbf{d} \right] - np
 \end{aligned}$$

1×1

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$. $\ell(\mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) \right]$$

$\operatorname{tr}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \operatorname{tr}(\mathcal{A}) + \operatorname{tr}(\mathcal{B})$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[\left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right)^{-1} \mathcal{S} \right] + n \operatorname{tr} \left[\left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right)^{-1} \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right] - np$$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[\left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right)^{-1} \left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right) \right] - np$$

$p \times p$

$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}) = \operatorname{tr}(\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{A}) = \operatorname{tr}(\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B})$$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[\left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right)^{-1} \mathcal{S} \right] + n \operatorname{tr} \left[\mathbf{d}^T \left(\mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T \right)^{-1} \mathbf{d} \right] - np$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$. $\ell(\mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$

$$-2 \log \lambda = 2(\ell_1^* - \ell_0^*) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + dd^T) \right]$$

$\operatorname{tr}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \operatorname{tr}(\mathcal{A}) + \operatorname{tr}(\mathcal{B})$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + dd^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + dd^T)^{-1} \mathcal{S} \right] + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + dd^T)^{-1} dd^T \right] - np$$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + dd^T}{\mathcal{S}} \right| + n \operatorname{tr} \left[(\mathcal{S} + dd^T)^{-1} (\mathcal{S} + dd^T) \right] - np$$

$p \times p$

$$= n \log \left| \frac{\mathcal{S} + dd^T}{\mathcal{S}} \right| = n \log \left| 1 + \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} dd^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right| = n \log \left| \begin{array}{c|c} 1 & -d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \\ \hline \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d & \mathcal{I} \end{array} \right|$$

$1 \times p$

$p \times 1$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$. $\ell(\mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\Sigma| - \frac{1}{2}n \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathcal{S}) - \frac{1}{2}n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + dd^T) \right]$$

按第一行展开

$$= n \log \begin{vmatrix} 1 & -\left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}\right)_1 & \left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}\right)_2 & \dots & \left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}\right)_p \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d\right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d\right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d\right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$.

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + dd^T) \right]$$

$$= n \log \left\{ 1 + \sum_{i=1}^p - \left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_i (-1)^{1+(i+1)} \begin{vmatrix} \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= n \log \begin{vmatrix} 1 & -\left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_1 & \left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_2 & \dots & \left(d^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_p \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} d \right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$.

$$-2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) \right]$$

$$= n \log \left\{ 1 + \sum_{i=1}^p - \left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_i (-1)^{1+(i+1)} \begin{vmatrix} \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= n \log \begin{vmatrix} 1 & -\left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_1 & \left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_2 & \dots & \left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_p \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

▶ 在 H_1 真时, 我们有 $\ell_1^* = \ell(\bar{x}, \mathcal{S})$.

$$\begin{aligned}
 -2 \log \lambda &= 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = 2 \left[\ell(\bar{x}, \mathcal{S}) - \ell(\mu_0, \mathcal{S} + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) \right] \\
 &= n \log \left\{ 1 + \sum_{i=1}^p - \left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_i (-1)^{i+2} \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_i (-1)^{i+1} \right\} \\
 &= n \log \left\{ 1 + \sum_{i=1}^p \left(\mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \right)_i \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_i \right\} \\
 &= n \log \left(1 + \mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-1} \mathbf{d} \right) \\
 &= n \log \left(1 + \frac{1}{n-1} \cdot (n-1) \mathbf{d}^T \mathcal{S}^{-1} \mathbf{d} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{matrix} \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d} \right)_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\}$$

$\xrightarrow{H_0 \text{ 真}} T_{p, n-1}^2$
 $\xrightarrow{\mathbf{d} = \bar{x} - \mu_0}$

推论 5.3 若 \bar{x} 是取自正态总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个样本的样本均值向量, \mathcal{S} 是样本协方差矩阵, 则

$$(n-1)(\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu) = n(\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}_u^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim T_{p, n-1}^2$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

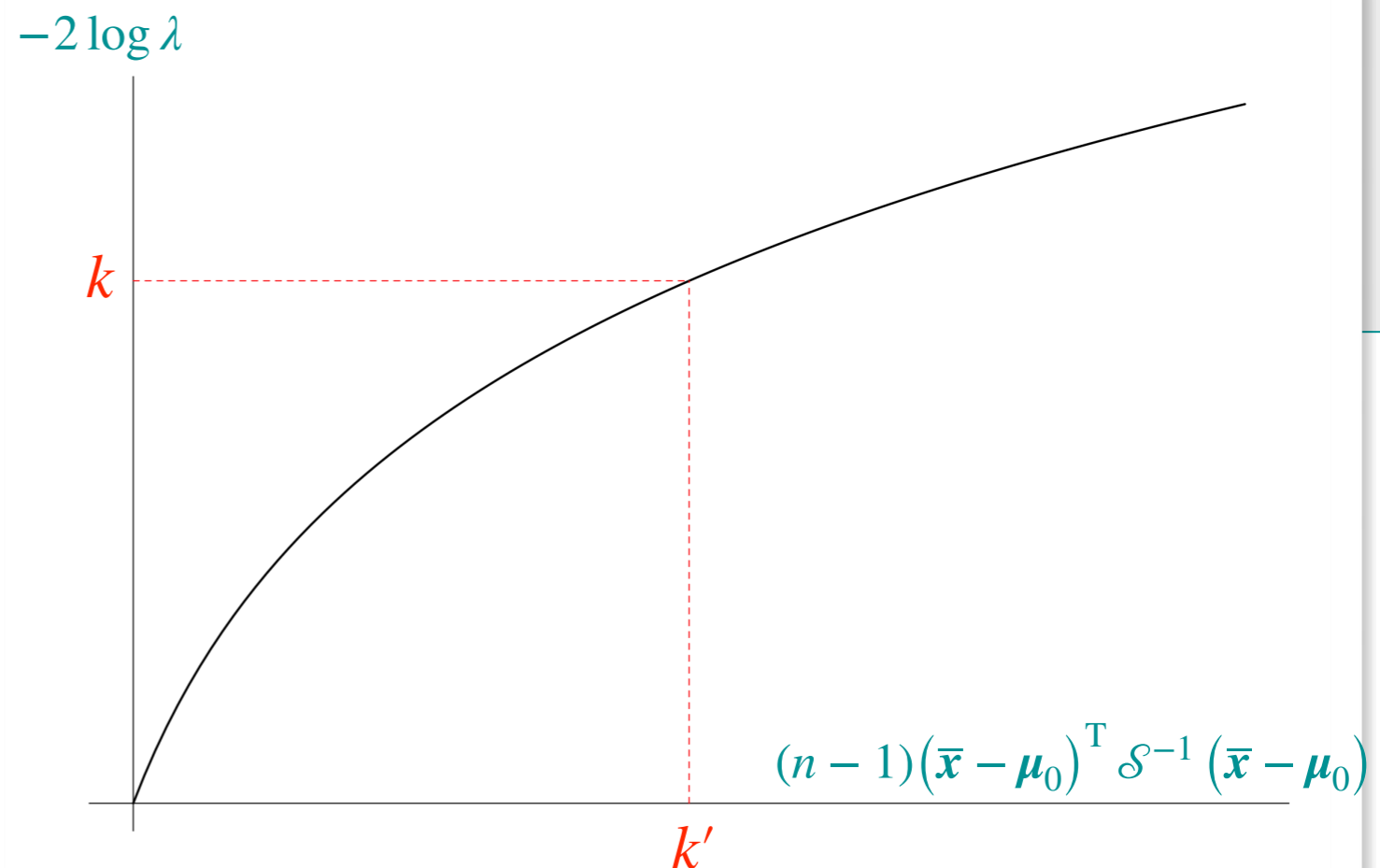
$$-2 \log \lambda = n \log \left[1 + \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \right]$$

```

f <- function(x) log(1 + x)
curve(f, 0, 10, xlab="", ylab="", axes=F, lwd=2)
abline(h=0, v=0)
lines(c(5, 5), c(0, f(5)), lty=2, col='red')
lines(c(0, 5), c(f(5), f(5)), lty=2, col='red')
    
```

$$-2 \log \lambda > k \iff$$

$$(n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > k'$$



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

$$-2 \log \lambda = n \log \left[1 + \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \right]$$

$$-2 \log \lambda > k \iff (n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > k'$$

定理 5.9 Hotelling T^2 与 F 分布的关系为 $T_{p,n}^2 = \frac{np}{n-p+1} F_{p, n-p+1}$.

$$\frac{(n-1) - p + 1}{(n-1)p} \cdot (n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \sim F_{p, (n-1)-p+1}$$

$$\implies \frac{n-p}{p} \cdot (\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \sim F_{p, n-p}$$

$$-2 \log \lambda > k \iff (n-1)(\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > k'$$

$$\iff \frac{n-p}{p} \cdot (\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > k''$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 2: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 Σ 未知.

$$H_0: \mu = \mu_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

- 因此, 精确的拒绝域可定义如下

$$\frac{n-p}{p} \cdot (\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > F_{p, n-p}(\alpha)$$

上 α 分位数

- 当 H_0 真时,

$$-2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2, \quad n \rightarrow \infty$$

定理 7.1 (Wilks 定理) 如果 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^q$ 是一个 q 维空间, 而 $\Omega_0 \subset \Omega_1$ 是 r 的子空间, 则在正则条件下

$$\forall \theta \in \Omega_0: -2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{q-r}^2 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

- 渐进地, 拒绝域也可以表示为

$$-2 \log \lambda = n \log \left[1 + (\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \right] > \chi_p^2(\alpha)$$

上 α 分位数

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：再来讨论钞票数据集.

$$H_0 : \mu = \mu_0 \iff H_1 : \text{无约束}$$

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}$$

- ▶ 利用精确拒绝域

$$1153.43 = \frac{n-p}{p} \cdot (\bar{x} - \mu_0)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > F_{p, n-p}(\alpha) = 2.196602$$

```

p <- dim(Sigma)[1]
((n-p) / p) * t(x_bar - mu_0) %*% solve(Sigma) %*% (x_bar - mu_0)
qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE)
    
```

```

> ((n-p) / p) * t(x_bar - mu_0) %*% solve(Sigma) %*% (x_bar - mu_0)
      [,1]
[1,] 1153.43
    
```

```

> qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE)
[1] 2.196602
    
```

- ▶ 结论：伪钞均值的真值 μ 与 $\mu_0 = \begin{pmatrix} 214.9 \\ 129.9 \\ 129.7 \\ 8.3 \\ 10.1 \\ 141.5 \end{pmatrix}$ 有显著差异.

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

- ▶ 对一个多维参数 $\theta \in \mathbb{R}^k$, 其置信域 (CR) 是 \mathbb{R}^k 的一个随机子集 (由适当的统计量确定), 对于给定的置信水平 $1 - \alpha$, 它满足该置信域包含 θ 的概率:

$$P(\theta \in \text{CR}) = 1 - \alpha.$$

- ▶ 在关于 θ 的一个假设 H_0 被拒绝时, 置信域尤其有用, 因为它们能最终能帮助我们确定 θ 的哪些分量导致了拒绝 H_0 .
- ▶ 只有少数情况下, 我们可以很容易地确定置信区间, 包括关于均值的大多数检验问题.

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

推论 5.3 若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是取自正态总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的一个样本的样本均值向量, \mathcal{S} 是样本协方差矩阵, 则

$$(n-1)(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathcal{S}_u^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T_{p, n-1}^2$$

定理 5.9 Hotelling T^2 与 F 分布的关系为 $T_{p, n}^2 = \frac{np}{n-p+1} F_{p, n-p+1}$.

$$\Rightarrow \frac{n-p}{p} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \sim F_{p, n-p}$$

$$\Rightarrow P \left\{ \frac{n-p}{p} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq F_{p, n-p}(\alpha) \right\} = 1 - \alpha$$

上 α 分位数

$$\Rightarrow \text{CR} = \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p \mid (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \leq \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \right\}$$

$\boldsymbol{\mu}$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信域

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

- ▶ 这是 \mathbb{R}^p 中以 \bar{x} 为中心、以 \mathcal{S}^{-1} 为度量矩阵且距离常数为 $\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha)$ 的一

个等距椭球体的内部.

- ▶ 当 p 很大时, 椭球体在实际应用中不容易处理.

- ▶ 因此, 我们更感兴趣的是确定 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ 的置信区间, 且使得所有区间的置信度同时达到所需的置信水平 $1 - \alpha$.

$$\Rightarrow \text{CR} = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^p \mid (\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu) \leq \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \right\}$$

→ μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信域

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

- ▶ 我们考虑更一般的情形，构造 μ 的元素的所有可能线性组合 $a^T \mu$ 的联合置信区间 (simultaneous confidence intervals)，这里 $a \in \mathbb{R}^p$.
- ▶ 对均值为 $a^T \mu$ 的一元随机变量 $a^T X$ ，我们可以用 t 统计量来构造 $a^T \mu$ 的置信区间

$$\left| \frac{\sqrt{n-1} (a^T \mu - a^T \bar{x})}{\sqrt{a^T S a}} \right| \leq t_{n-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数

$$\Leftrightarrow t^2(a) = \frac{(n-1) [a^T (\mu - \bar{x})]^2}{a^T S a} \leq F_{1, n-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a^T \bar{x} - \sqrt{F_{1, n-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{a^T S a}{n-1}} \leq a^T \mu \leq a^T \bar{x} + \sqrt{F_{1, n-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{a^T S a}{n-1}}$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

▶ 可以证明 (利用定理 2.5)

$$\max_a t^2(a) = (n-1)(\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim T_{p, n-1}^2$$

$$= \frac{(n-1)p}{(n-1) + p + 1} \cdot F_{p, (n-1)-p+1} = \frac{(n-1)p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}$$

$$t^2(a) = \frac{(n-1)(a^T \mu - a^T \bar{x})^2}{a^T \mathcal{S} a}$$

$$\Rightarrow \max_a \frac{(n-1)(a^T \mu - a^T \bar{x})^2}{a^T \mathcal{S} a} \sim \frac{(n-1)p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}$$

$$\Rightarrow \max_a \left[\frac{n-p}{p} \cdot \frac{(a^T \mu - a^T \bar{x})^2}{a^T \mathcal{S} a} \right] \sim F_{p, n-p}$$

定理 2.5 若 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 为对称矩阵且 $\mathcal{B} > 0$, 则 $\frac{x^T \mathcal{A} x}{x^T \mathcal{B} x}$ 的最大值等于 $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}$ 的最

大特征值. 更一般地, 我们有

$$\max_x \frac{x^T \mathcal{A} x}{x^T \mathcal{B} x} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p = \min_x \frac{x^T \mathcal{A} x}{x^T \mathcal{B} x}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 是 $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}$ 的特征值. 使得 $\frac{x^T \mathcal{A} x}{x^T \mathcal{B} x}$ 达到最大(最小)的向

量是 $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}$ 的最大(最小)特征值对应的 $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}$ 的特征向量. 如果 $x^T \mathcal{B} x = 1$, 我们则有

$$\max_x x^T \mathcal{A} x = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p = \min_x x^T \mathcal{A} x$$

推论 5.3 若 \bar{x} 是取自正态总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个样本的样本均值向量, \mathcal{S} 是样本协方差矩阵, 则

$$(n-1)(\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu) = n(\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}_u^{-1} (\bar{x} - \mu) \sim T_{p, n-1}^2$$

定理 5.9 Hotelling T^2 与 F 分布的关系为 $T_{p, n}^2 = \frac{np}{n-p+1} F_{p, n-p+1}$.

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

$$\Rightarrow P \left\{ \max_a \left[\frac{n-p}{p} \cdot \frac{(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \right] \leq F_{p, n-p}(\alpha) \right\} = 1 - \alpha$$

上 α 分位数

$$\Rightarrow P \left\{ \frac{n-p}{p} \cdot \frac{(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \leq F_{p, n-p}(\alpha) \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \left\{ (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}})^2 \leq \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot \mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a} \right\} = 1 - \alpha$$

K_α

$$\Rightarrow P \left\{ |\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}}| \leq \sqrt{K_\alpha \cdot \mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P \left\{ \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} - \sqrt{K_\alpha \cdot \mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \leq \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} + \sqrt{K_\alpha \cdot \mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \max_a \left[\frac{n-p}{p} \cdot \frac{(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{a}^T \mathcal{S} \mathbf{a}} \right] \sim F_{p, n-p}$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

- ▶ 于是, 对所有 $a \in \mathbb{R}^p$, 下述区间同时以概率 $1 - \alpha$ 包含 $a^T \mu$ 在内

$$\left(a^T \bar{x} - \sqrt{K_\alpha \cdot a^T S a}, \quad a^T \bar{x} + \sqrt{K_\alpha \cdot a^T S a} \right) \quad K_\alpha = \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha)$$

- ▶ 特别, 取 a 为 \mathcal{F}_p 的列

$$\mathcal{F}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ 我们得到 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ 的置信概率为 $1 - \alpha$ 的联合置信区间为

$$\left(\bar{x}_j - \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}}, \quad \bar{x}_j + \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, p$$

- ▶ 这些区间定义了一个矩形, 上面给出的 μ 的置信椭圆内切于它
 $\implies P \left\{ a^T \bar{x} - \sqrt{K_\alpha \cdot a^T S a} \leq a^T \mu \leq a^T \bar{x} + \sqrt{K_\alpha \cdot a^T S a} \right\} = 1 - \alpha$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：伪钞数据的均值 μ_f 的置信域由下述椭球给出

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R}^6 \mid (\mu - \bar{x}_f)^T \mathcal{S}_f^{-1} (\mu - \bar{x}_f) \leq \frac{6}{94} \cdot F_{6, 94}(0.05) \right\}$$

- ▶ 置信度为 95% 的联合置信区间为

$$\left(\bar{x}_j - \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}}, \bar{x}_j + \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, p$$

<code>x_lower <- array(0, dim = p)</code>	214.69180	\leq	μ_1	\leq	214.95420
<code>x_upper <- array(0, dim = p)</code>	130.20498	\leq	μ_2	\leq	130.39502
<code>for (i in 1:p){</code>	130.08189	\leq	μ_3	\leq	130.30411
<code>x_lower[i] <- x_bar[i] - sqrt(((p</code>	10.10827	\leq	μ_4	\leq	10.95173
<code>x_upper[i] <- x_bar[i] + sqrt(((</code>	10.89606	\leq	μ_5	\leq	11.36994
<code>}</code>	139.24216	\leq	μ_6	\leq	139.65784
<code>mu_simul_int <- data.frame(x_</code>					
<code>mu_simul_int</code>					

```

> mu_simul_int
  x_lower x_upper
1 214.69180 214.95420
2 130.20498 130.39502
3 130.08189 130.30411
4 10.10827 10.95173
5 10.89606 11.36994
6 139.24216 139.65784
  
```

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：伪钞数据的均值 μ_f 的置信域由下述椭球给出

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R}^6 \mid (\mu - \bar{x}_f)^T \mathcal{S}_f^{-1} (\mu - \bar{x}_f) \leq \frac{6}{94} \cdot F_{6, 94}(0.05) \right\}$$

- ▶ 置信度为 95% 的联合置信区间为

$$\left(\bar{x}_j - \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}}, \bar{x}_j + \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}} \right), \quad j = 1, 2, \dots, p$$

214.69180	$\leq \mu_1 \leq$	214.95420
130.20498	$\leq \mu_2 \leq$	130.39502
130.08189	$\leq \mu_3 \leq$	130.30411
10.10827	$\leq \mu_4 \leq$	10.95173
10.89606	$\leq \mu_5 \leq$	11.36994
139.24216	$\leq \mu_6 \leq$	139.65784

$$H_0 : \mu = \mu_0 =$$

214.9
 129.9
 129.7
 8.3
 10.1
 141.5

真钞的样本均值



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：伪钞数据的均值 μ_f 的置信域由下述椭球给出

$$\left\{ \mu \in \mathbb{R}^6 \mid (\mu - \bar{x}_f)^T \mathcal{S}_f^{-1} (\mu - \bar{x}_f) \leq \frac{6}{94} \cdot F_{6, 94}(0.05) \right\}$$

- 此外，该方法还能给出其他的置信区间。

$$\left(a^T \bar{x} - \sqrt{K_\alpha \cdot a^T \mathcal{S} a}, \quad a^T \bar{x} + \sqrt{K_\alpha \cdot a^T \mathcal{S} a} \right) \quad K_\alpha = \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies a^T \mu = \mu_4 - \mu_5 \implies -1.211341 \leq \mu_4 - \mu_5 \leq 0.00534148$$

```

> t(a) %*% x_bar - sqrt(((p)/(n-p)) * qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE) * t(a) %*% Sigma %*% a)
      [,1]
[1,] -1.211341
> t(a) %*% x_bar + sqrt(((p)/(n-p)) * qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE) * t(a) %*% Sigma %*% a)
      [,1]
[1,] 0.00534148
    
```

```
a <- matrix(c(0, 0, 0, 1, -1, 0), nrow=6)
```

```
t(a) %*% x_bar - sqrt(((p)/(n-p)) * qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE) * t(a) %*% Sigma %*% a)
```

```
t(a) %*% x_bar + sqrt(((p)/(n-p)) * qf(0.05, p, n-p, lower.tail = FALSE) * t(a) %*% Sigma %*% a)
```

- 这表明，伪钞的下边界基本上小于上边界。

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

$$p = 2$$

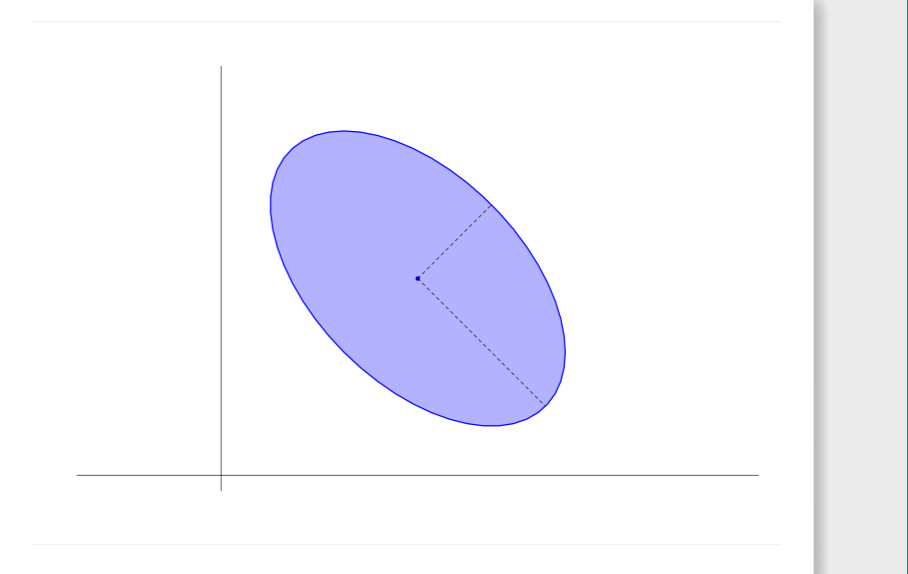
- ▶ μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信域为

$$\text{CR} = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^p \mid (\bar{x} - \mu)^T \mathcal{S}^{-1} (\bar{x} - \mu) \leq \frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \right\}$$

- ▶ 置信域是一个椭球，其特征取决于矩阵 \mathcal{S} .
- ▶ 特别，椭球的轴的斜率取决于 \mathcal{S} 的特征向量，亦即协方差 s_{ij} .

```

library(car)
a <- c(2, 2)
b <- matrix(c(1, -0.5, -0.5, 1), nrow=2)
plot(c(0, 4), c(0, 4), type='n', xlab="", ylab="", axes=F, asp=1)
ellipse(a, b, radius = 1.5, center.pch = 16, center.cex=1, fill = TRUE)
abline(h=0, v=0)
lines(c(2, 3.3), c(2, 0.7), lty=2)
lines(c(2, 2.75), c(2, 2.75), lty=2)
    
```



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- μ 的置信域 (confidence region)

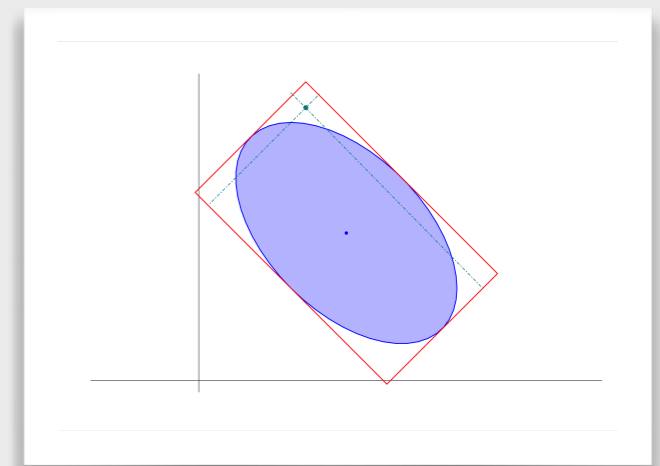
- ▶ 置信域的外接矩形给出了联合置信区间 $\mu_j, j = 1, 2, \dots, p$

$$\left(\bar{x}_j - \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}} \quad , \quad \bar{x}_j + \sqrt{\frac{p}{n-p} \cdot F_{p, n-p}(\alpha) \cdot s_{jj}} \right) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p$$

- ▶ 它们不依赖于协方差 s_{ij} , 仅取决于方差 s_{jj} .
- ▶ 可能出现的情形: 检验值 μ_0 位于联合置信区间中, 但不在置信域 (椭球) 中.
- ▶ 联合置信区间比置信域 (椭球) 更容易处理, 但有信息损失, 即分量之间的协方差.

```

a <- c(2, 2)
b <- matrix(c(1, -0.5, -0.5, 1), nrow=2)
plot(c(0, 4), c(0, 4), type='n', xlab="", ylab="", axes=F, asp=1)
ellipse(a, b, radius = 1.5, center.pch = 16, center.cex=1, fill = TRUE)
abline(h=0, v=0)
lines(c(-0.05, 2.55, 4.05, 1.45, -0.05), c(2.55, -0.05, 1.45, 4.05, 2.55), col='red', lwd=2)
points(1.45, 3.7, pch=16, cex=1.5, col = 'cyan4')
lines(c(0.15, 1.65), c(2.4, 3.9), lty = 4, lwd=1.5, col = 'cyan4')
lines(c(3.85, 1.25), c(1.25, 3.9), lty = 4, lwd=1.5, col = 'cyan4')
    
```



似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 3: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 $\boldsymbol{\mu}$ 未知.

$$H_0: \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \longleftrightarrow H_1: \text{无约束}$$

$$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

$$\ell(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \log L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2} \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} n \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathcal{S}) - \frac{1}{2} n (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})$$

▶ 当 H_0 为真时, 我们有 $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$

$$\implies \ell_0^* = \ell(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = -\frac{1}{2} n \log |2\pi\boldsymbol{\Sigma}_0| - \frac{1}{2} n \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathcal{S})$$

▶ 在 H_1 下, 我们有 $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathcal{S}$

$$\implies \ell_1^* = \ell(\bar{\mathbf{x}}, \mathcal{S}) = -\frac{1}{2} n \log |2\pi\mathcal{S}| - \frac{1}{2} np$$

$$\implies -2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = n \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathcal{S}) - n \log |\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathcal{S}| - np$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

检验问题 3: 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $N_p(\mu, \Sigma)$ 的一个独立同分布的随机样本, 其中 μ 未知.

$$H_0: \Sigma = \Sigma_0 \iff H_1: \text{无约束}$$

- ▶ 该统计量是 $\Sigma_0^{-1} \mathcal{S}$ 的特征值的一个函数.
- ▶ $-2 \log \lambda$ 的精确抽样分布很复杂.
- ▶ 在 H_0 真时, 渐进地, 我们有

$$-2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

定理 7.1 (Wilks 定理) 如果 $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^q$ 是一个 q 维空间, 而 $\Omega_0 \subset \Omega_1$ 是 r 的子空间, 则在正则条件下

$$\forall \theta \in \Omega_0: -2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{q-r}^2 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$m = \frac{1}{2} p(p+1)$$

- ▶ 因为一个 $p \times p$ 的协方差矩阵是对称阵, 所以它只有上述 m 个参数.

$$\implies -2 \log \lambda = 2 \left(\ell_1^* - \ell_0^* \right) = n \operatorname{tr} \left(\Sigma_0^{-1} \mathcal{S} \right) - n \log \left| \Sigma_0^{-1} \mathcal{S} \right| - np$$

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

● 例：考虑美国公司数据集.

▶ 假设我们对能源行业的公司感兴趣，我们来分析其资产 (X_1) 和销售额 (X_2).

```
x = rbind(c(13621, 4848, 4572, 485, 898.9, 23.4), c(1117, 1038, 478, 59.7, 91.7, 3.8),
c(1633, 701, 679, 74.3, 135.9, 2.8), c(5651, 1254, 2002, 310.7, 407.9, 6.2),
c(5835, 4053, 1601, -93.8, 173.8, 10.8), c(3494, 1653, 1442, 160.9, 320.3, 6.4),
c(1654, 451, 779, 84.8, 130.4, 1.6), c(1679, 1354, 687, 93.8, 154.6, 4.6),
c(1257, 355, 181, 167.5, 304, 0.6), c(1743, 597, 717, 121.6, 172.4, 3.5),
c(1440, 1617, 639, 81.7, 126.4, 3.5), c(14045, 15636, 2754, 418, 1462, 27.3),
c(3010, 749, 1120, 146.3, 209.2, 3.4), c(3086, 1739, 1507, 202.7, 335.2, 4.9),
c(1995, 2662, 341, 34.7, 100.7, 2.3))
```

x

X_1 : A	Assets (USD)
X_2 : S	Sales (USD)
X_3 : MV	Market Value (USD)
X_4 : P	Profits (USD)
X_5 : CF	Cash Flow (USD)
X_6 : E	Employees

能源行业 (X_1, X_2) 协方差矩阵的无偏估计

```
(cov(x[, 1:2]))
```

能源行业 (X_1, X_2) 协方差矩阵的极大似然估计 / 样本协方差矩阵

```
(S = cov(x[, 1:2]) * 14/15)
```

```
> x
```

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
[1,]	13621	4848	4572	485.0	898.9	23.4
[2,]	1117	1038	478	59.7	91.7	3.8
[3,]	1633	701	679	74.3	135.9	2.8
[4,]	5651	1254	2002	310.7	407.9	6.2
[5,]	5835	4053	1601	-93.8	173.8	10.8
[6,]	3494	1653	1442	160.9	320.3	6.4
[7,]	1654	451	779	84.8	130.4	1.6
[8,]	1679	1354	687	93.8	154.6	4.6
[9,]	1257	355	181	167.5	304.0	0.6
[10,]	1743	597	717	121.6	172.4	3.5
[11,]	1440	1617	639	81.7	126.4	3.5
[12,]	14045	15636	2754	418.0	1462.0	27.3
[13,]	3010	749	1120	146.3	209.2	3.4
[14,]	3086	1739	1507	202.7	335.2	4.9
[15,]	1995	2662	341	34.7	100.7	2.3

```
> (cov(x[, 1:2]))
      [,1]      [,2]
[1,] 17822946 13296039
[2,] 13296039 14729376
```

```
> (S = cov(x[, 1:2]) * 14/15)
      [,1]      [,2]
[1,] 16634749 12409637
[2,] 12409637 13747417
```

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

- 例：考虑美国公司数据集。
 - ▶ 制造业数据：

制造业数据

```

y = rbind(c(1093, 1679, 1070, 100.9, 164.5, 20.8), c(1128, 1516, 430, -47, 26.7, 13.2),
          c(1804, 2564, 483, 70.5, 164.9, 26.6), c(4662, 4781, 2988, 28.7, 371.5, 66.2),
          c(6307, 8199, 598, -771.5, -524.3, 57.5), c(2366, 3305, 1117, 131.2, 256.5, 25.2),
          c(4084, 4346, 3023, 302.7, 521.7, 37.5), c(10348, 5721, 1915, 223.6, 322.5, 49.5),
          c(752, 2149, 101, 11.1, 15.2, 2.6), c(10528, 14992, 5377, 312.7, 710.7, 184.8))
    
```

y

制造业数据协方差矩阵的无偏估计

```
(cov(y[, 1:2]))
```

制造业数据协方差矩阵的极大似然估计 / 样本协方差矩阵

```
(sigma = cov(y[, 1:2]) * 9/10)
```

```

> (cov(y[, 1:2]))
      [,1]      [,2]
[1,] 13608514 12694886
[2,] 12694886 16790650
    
```

```

> (sigma = cov(y[, 1:2]) * 9/10)
      [,1]      [,2]
[1,] 12247663 11425398
[2,] 11425398 15111585
    
```

> y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	1093	1679	1070	100.9	164.5	20.8
[2,]	1128	1516	430	-47.0	26.7	13.2
[3,]	1804	2564	483	70.5	164.9	26.6
[4,]	4662	4781	2988	28.7	371.5	66.2
[5,]	6307	8199	598	-771.5	-524.3	57.5
[6,]	2366	3305	1117	131.2	256.5	25.2
[7,]	4084	4346	3023	302.7	521.7	37.5
[8,]	10348	5721	1915	223.6	322.5	49.5
[9,]	752	2149	101	11.1	15.2	2.6
[10,]	10528	14992	5377	312.7	710.7	184.8

似然比检验 (Likelihood Ratio Test)

● 例：考虑美国公司数据集.

▶ 我们来检验能源行业数据的协方差矩阵是否等于制造业数据的协方差矩阵：

$$H_0 : \text{Var} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \Sigma_0 = \begin{pmatrix} 12247663 & 11425398 \\ 11425398 & 15111585 \end{pmatrix}$$

▶ 检验统计量为

$$-2 \log \lambda = n \text{tr} (\Sigma_0^{-1} \mathcal{S}) - n \log |\Sigma_0^{-1} \mathcal{S}| - np = 5.404637$$

```
> (test = 15 * sum(diag(solve(sigma) %% S)) - 15 * log10(det(solve(sigma) %% S)) - 15 * 2)
[1] 5.404637
```

检验统计量

```
(test = 15 * sum(diag(solve(sigma) %% S)) - 15 * log10(det(solve(sigma) %% S)) - 15 * 2)
```

$$-2 \log \lambda \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_m^2 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$m = \frac{1}{2} p(p + 1) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + 1) = 3$$

▶ 假设检验的 p 值为

假设检验的 p 值

```
(p = pchisq(test, 3, lower.tail = FALSE))
```

```
> (p = pchisq(test, 3, lower.tail = FALSE))
[1] 0.1444549
```

▶ 结论：不能得出 $\Sigma \neq \Sigma_0$ 的结论.