Multivariate Statistical Analysis

多元统计分析

2026 年 4 月 12 日

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

- $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ 的概率密度函数为 $f(\boldsymbol{x}) = \left|2\pi\Sigma\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\right] = \Sigma$$

- 设 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，矩阵 $\mathscr{A}_{p\times p}$，向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^p$，则 $\boldsymbol{Y} = \mathscr{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{c} \sim N_p\left(\mathscr{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{c}, \mathscr{A}\,\Sigma\,\mathscr{A}^{\mathrm{T}}\right)$.

- 设 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，作 Mahalanobis 变换：$\boldsymbol{Y} = \Sigma^{-1/2}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)$，则 $\boldsymbol{Y} \sim N_p\left(\boldsymbol{0}, \mathscr{I}_p\right)$，且

  $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\,\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim \chi^2_p$.

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

- 设 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，分块如下

$$\Sigma_{22\cdot 1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \underbrace{\boldsymbol{X}_1}_{r\times 1} \\ \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \underbrace{\boldsymbol{\mu}_1}_{r\times 1} \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \underbrace{\Sigma_{11}}_{r\times r} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{X}_1 \sim N_r(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$, $\quad \boldsymbol{X}_{2\cdot 1} = \boldsymbol{X}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{X}_1 \sim N_{p-r}(\boldsymbol{\mu}_{2\cdot 1}, \Sigma_{22\cdot 1})$,

且 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_{2\cdot 1}$ 相互独立.

$$\boldsymbol{\mu}_{2\cdot 1} = \boldsymbol{\mu}_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1$$

  - $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 相互独立的充分必要条件是 $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$.
  - 对于给定的矩阵 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\mathscr{B}\boldsymbol{X}$ 相互独立的充分必要条件是 $\mathscr{A}\Sigma\mathscr{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$.
  - 给定矩阵 $\mathscr{A}_{q\times p}$，向量 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^q$，且 $q \le p$，则 $\boldsymbol{Y} = \mathscr{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{c} \sim N_q(\mathscr{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{c}, \mathscr{A}\Sigma\mathscr{A}^{\mathrm{T}})$.
  - 给定 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1$ 时 $\boldsymbol{X}_2$ 的条件分布 $(\boldsymbol{X}_2 \mid \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1) \sim N_{p-r}\left(\boldsymbol{\mu}_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1), \Sigma_{22\cdot 1}\right)$.

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

- 设 $\boldsymbol{X}_1 \sim N_r\left(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}\right)$，$\left(\boldsymbol{X}_2 \,\middle|\, \boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{x}_1\right) \sim N_{p-r}\left(\mathscr{A}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}, \Omega\right)$，其中 $\mathscr{A}_{(p-r)\times r}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{p-r}$，$\Omega$ 不依赖于 $\boldsymbol{x}_1$，则 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{pmatrix} \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma\right)$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{11}\mathscr{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathscr{A}\Sigma_{11} & \Omega + \Sigma_{11}\mathscr{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \mathscr{A}\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

- 随机矩阵的分布：随机矩阵 $\mathscr{X} = \left(X_{ij}\right)_{m\times n}$ 的分布定义为其所有元素构成的随机向量 $\boldsymbol{X} = \left(X_{11}, \ldots, X_{1n}, X_{21}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn}\right)$ 的联合分布.

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

- 非中心 Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n, \boldsymbol{\tau})$:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \mu_{i2} \\ \vdots \\ \mu_{ip} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

  - 假设 $\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{pmatrix} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

  - 记 $\mathscr{M}_{n\times p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\mu}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1p} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{np} \end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{\tau}_{p\times p} = \mathscr{M}^{\mathrm{T}}\mathscr{M} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \cdots, \boldsymbol{\mu}_n)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\mu}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}$$

非中心参数

  - 则称随机矩阵 $\mathscr{A}_{p\times p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 服从非中心 Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n, \boldsymbol{\tau})$.

- 当 $\boldsymbol{\mu}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 时 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$，此时称 $\mathscr{A}$ 服从中心 Wishart 分布 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, n)$.

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

- 若 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, n)$，矩阵 $\mathscr{B}_{p\times q}$，则 $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\mathscr{B} \sim W_q\left(\mathscr{B}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathscr{B}, n\right)$. 随机矩阵 $\mathscr{A}$ 的线性变换

- 设 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, m)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ 满足 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{a} \neq 0$，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{a}}$ 服从 χ^2_m 分布.

- Cochran 定理：设 $\mathscr{X}_{n\times p}$ 是来自正态分布总体 $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ 的一个数据矩阵，设 $\mathscr{C}_{n\times n}$ 是一个对称矩阵.

$$\mathscr{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

① $\mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\mathscr{X}$ 服从加权 Wishart 随机变量和的分布，即

$$\mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\mathscr{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_p(\Sigma, 1),$$

其中 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ 是 $\mathscr{C}$ 的特征值.

已学知识点 (Recap)

第 5 章 多元正态分布的理论

随机矩阵 $\mathscr{A}$ 的线性变换

- 若 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, n)$，矩阵 $\mathscr{B}_{p\times q}$，则 $\mathscr{B}^{\mathrm{T}} \mathscr{A} \mathscr{B} \sim W_q\left(\mathscr{B}^{\mathrm{T}} \Sigma \mathscr{B}, n\right)$.
- 设 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, m)$，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ 满足 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \Sigma \boldsymbol{a} \neq 0$，则 $\dfrac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \mathscr{A} \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \Sigma \boldsymbol{a}}$ 服从 χ^2_m 分布.
- Cochran 定理：设 $\mathscr{X}_{n\times p}$ 是来自正态分布总体 $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$ 的一个数据矩阵，设 $\mathscr{C}_{n\times n}$ 是一个对称矩阵.

$$\mathscr{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

② $\mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\mathscr{X}$ 服从 Wishart 分布的充分必要条件是 $\mathscr{C}^2 = \mathscr{C}$.

此时有 $\mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathscr{C}\mathscr{X} \sim W_p(\Sigma, r)$，其中 $r = \mathrm{rank}(\mathscr{C}) = \mathrm{tr}(\mathscr{C})$.

③ $\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i = \dfrac{1}{n}\mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}_n \sim N_p\left(\mathbf{0}, \dfrac{1}{n}\Sigma\right)$.

$$\mathscr{H} = \mathscr{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$$

④ $n\mathscr{S} = \mathscr{X}^{\mathrm{T}}\mathscr{H}\mathscr{X}$ 服从 Wishart 分布 $W_p(\Sigma, n-1)$.

⑤ $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与 $\mathscr{S}$ 相互独立.

Wishart 分布

- 以下性质非常有用:
  - 如果 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, n)$，则 $\mathbb{E}(\mathscr{A}) = n\Sigma$.
  - 如果 $\mathscr{A}_i \sim W_p\left(\Sigma, n_i\right)$，$i = 1, 2, \ldots, k$，则 $\mathscr{A} = \sum_{i=1}^{k} \mathscr{A}_i \sim W_p(\Sigma, n)$，其中 $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.
  - $\mathscr{A}$ 为正定矩阵时，$W_p(\Sigma, n-1)$ 的概率密度函数为

$$f_{\Sigma,\, n-1}(\mathscr{A}) = \frac{\left|\mathscr{A}\right|^{\frac{1}{2}(n-p-2)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathscr{A}\Sigma^{-1}\right)}}{2^{\frac{1}{2}p(n-1)} \pi^{\frac{1}{4}p(p-1)} \left|\Sigma\right|^{\frac{1}{2}(n-1)} \prod_{i=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

  - Wishart 分布的详细内容:

Hotelling T^2 分布

$$Y \sim N_1(0,\ 1) \qquad \text{相互独立} \qquad X \sim \chi_n^2$$

$$\Longrightarrow \frac{Y}{\sqrt{\dfrac{X}{n}}} \sim t_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{n}\ YX^{-1/2} \sim t_n$$

$$\Longrightarrow \frac{Y^2}{\dfrac{X}{n}} \sim F_{1,\ n} \quad \Longrightarrow \quad nYX^{-1}Y \sim F_{1,\ n}$$

$$\boldsymbol{Y} \sim N_p\left(\boldsymbol{0},\ \mathscr{I}\right) \qquad \text{相互独立} \qquad \mathscr{A} \sim W_p(\mathscr{I},\ n)$$

$$\xRightarrow{\text{define}} \quad n\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{Y} \sim T_{p,\ n}^2$$

Hotelling T^2 分布

定理 5.8 如果 $\boldsymbol{X} \sim N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma\right)$ 与 $\mathscr{A} \sim W_p(\Sigma, n)$ 相互独立，则

$$n\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \mathscr{A}^{-1}\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim T_{p,\, n}^2$$

推论 5.3 若 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是取自正态总体 $N_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma\right)$ 的一个样本的样本均值向量，$\mathscr{S}$ 是样本协方差矩阵，则

$$(n-1)\left(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \mathscr{S}^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}\right) = n\left(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}} \mathscr{S}_u^{-1}\left(\overline{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}\right) \sim T_{p,\, n-1}^2$$

$$\mathscr{S}_u = \frac{n}{n-1}\mathscr{S}$$

Hotelling T^2 分布

定理 5.9 Hotelling T^2 与 F 分布的关系为 $T^2_{p,\,n} = \dfrac{np}{n-p+1} F_{p,\,n-p+1}$.

- **例**：在一元情形 $(p=1)$ 中，该定理即为我们熟悉的结果

$$\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\mathcal{S}_u}/\sqrt{n}}\right)^2 \sim T^2_{1,n} = F_{1,n} = t^2_{n-1}$$

Hotelling T^2 分布

推论 5.4 考虑 $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的一个线性变换 $\boldsymbol{Y} = \mathscr{C}\boldsymbol{X}$，其中 $\mathscr{C}_{q\times p}$ 满足 $q \le p$. 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{X}}$ 分别为样本均值向量与样本协方差矩阵，则有

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \mathscr{C}\,\bar{\boldsymbol{x}} \sim N_q\left(\mathscr{C}\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\mathscr{C}\,\Sigma\,\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\right)$$

$$n\mathcal{S}_{\boldsymbol{Y}} = n\mathscr{C}\,\mathcal{S}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{C}^{\mathrm{T}} \sim W_q\left(\mathscr{C}\,\Sigma\,\mathscr{C}^{\mathrm{T}}, n-1\right)$$

$$(n-1)\left(\mathscr{C}\,\bar{\boldsymbol{x}} - \mathscr{C}\boldsymbol{\mu}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathscr{C}\,\mathcal{S}_{\boldsymbol{X}}\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathscr{C}\,\bar{\boldsymbol{x}} - \mathscr{C}\boldsymbol{\mu}\right) \sim T^2_{q,\,n-1}$$

球形分布与椭圆分布

- 多元正态分布属于椭圆分布的大类，近年来在金融数学中引起了广泛的关注
- 椭圆分布应用广泛，尤其是在风险管理当中.

定义 5.3 称 $(p\times 1)$ 的随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 服从球形分布 $S_p(\phi)$，是指其特征函数 $\psi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})$ 满足

$$\psi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})=\phi\left(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\right),$$

其中 $\phi(\cdot)$ 是某个纯量函数，称之为球面分布 $S_p(\phi)$ 的特征生成器. 我们记球形分布为 $\boldsymbol{Y}\sim S_p(\phi)$.

- 这是定义球形分布的若干方法之一.
- 球形分布可以看作多元标准正态分布 $N_p(\boldsymbol{0},\mathscr{I})$ 的推广.

$$\boldsymbol{Y}\sim N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)\quad\Longrightarrow\quad\psi_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t})=\exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{t}\right\}\overset{\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\ \Sigma=\mathscr{I}}{=}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\right\}$$

球形分布与椭圆分布

定理 5.10 球形随机向量具有如下性质：

1. 球形分布随机向量的所有边际分布是球形分布.
2. 所有边际特征函数具有相同的特征生成器.
3. 设 $\boldsymbol{X} \sim S_p(\phi)$，则 $\boldsymbol{X}$ 的分布与 $r\boldsymbol{u}^{(p)}$ 的分布相同，其中随机向量 $\boldsymbol{u}^{(p)}$ 服从 $\mathbb{R}^p$ 中单位球面上的均匀分布，而 $r \geq 0$ 是与 $\boldsymbol{u}^{(p)}$ 独立的一个随机变量. 如果 $\mathbb{E}\left(r^2\right) < \infty$，则

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}\ , \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathbb{E}\left(r^2\right)}{p} \mathscr{I}_p$$

- 随机半径 r 与特征生成器 ϕ 有关，详见 K.T. Fang (方开泰), S. Kotz, K.W. Ng, *Symmetric Multivariate and Related Distributions* (Chapman and Hall, London, 1990)
- 球形分布 $\boldsymbol{X} \sim S_p(\phi)$ 的矩，如果存在的话，可以表示为一维积分.

球形分布与椭圆分布

定理 5.10 球形随机向量具有如下性质:

1. 球形分布随机向量的所有边际分布是球形分布.
2. 所有边际特征函数具有相同的特征生成器.
3. 设 $\boldsymbol{X} \sim S_p(\phi)$，则 $\boldsymbol{X}$ 的分布与 $r\boldsymbol{u}^{(p)}$ 的分布相同，其中随机向量 $\boldsymbol{u}^{(p)}$ 服从 $\mathbb{R}^p$ 中单位球面上的均匀分布，而 $r \geq 0$ 是与 $\boldsymbol{u}^{(p)}$ 独立的一个随机变量. 如果 $\mathbb{E}\left(r^2\right) < \infty$，则

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}\,, \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}(\boldsymbol{X}) = \frac{\mathbb{E}\left(r^2\right)}{p}\mathcal{I}_p$$

- 一般而言，球形分布的随机向量不一定有密度.
- 有密度时，维数小于 $p-1$ 的边际密度连续，维数小于 $p-2$ 的边际密度可导(两种情形下原点可能除外).
- p 大于 2 时，一元边际密度在 $(-\infty, 0)$ 不降，在 $(0, \infty)$ 不增.

球形分布与椭圆分布

定义 5.4 称 $(p \times 1)$ 的随机向量 $\boldsymbol{X}$ 服从参数为 $\boldsymbol{\mu}_{p\times 1}$ 和 $\Sigma_{p\times p}$ 的椭圆分布，是指 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{\mu} + \mathscr{C}\boldsymbol{Y}$ 的分布相同，其中 $\boldsymbol{Y} \sim S_k(\phi)$，$\mathscr{C}$ 为满足 $\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\mathscr{C} = \Sigma$ 的 $(k \times p)$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(\Sigma) = k$. 我们记它为 $\boldsymbol{X} \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$.

- 椭圆分布可以看作是 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的推广.

球形分布与椭圆分布

- 例：多元 t 分布.

$$\mathbf{Z} \sim N_p\left(\mathbf{0}, \mathscr{I}_p\right) \qquad \text{相互独立} \qquad S \sim \chi_m^2$$

$$\Longrightarrow \quad Y = \frac{\mathbf{Z}}{\sqrt{\dfrac{S}{m}}}$$ 服从自由度为 m 的多元 t 分布.

  - t 分布属于 p 维球形分布族.

球形分布与椭圆分布

- 例：多元正态分布.

$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad X \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$$

$$\phi(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2}\right\}$$

  - 多元正态分布的密度曲面：

$$f(\boldsymbol{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

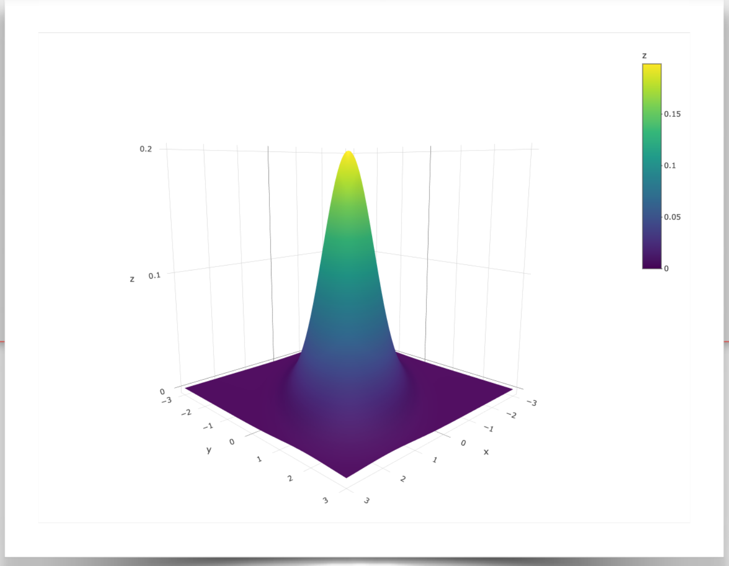
球形分布与椭圆分布

- 例：多元正态分布.

$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad X \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi) \qquad \phi(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2}\right\}$$

```
n = 80
mu1 = 0
mu2 = 0
s1 = 1
s2 = 1
rho = 0.6
x = seq(-3, 3, length = n) * s1
y = seq(-3, 3, length = n) * s2
f = function(x,y){
  (2 * pi * s1 * s2 * sqrt(1-rho^2))^-1 * exp(-0.5 * (1 - rho^2)^-1 *
              ((x-mu1)^2/s1^2 - 2 * rho * (x - mu1) * ( y - mu2) / (s1 * s2) + (y - mu2)^2/s2^2))
}
z = outer(x , y, f)

fig_1 = plot_ly() %>%
  add_surface(x = ~x, y = ~y, z = ~z)
fig_1
```

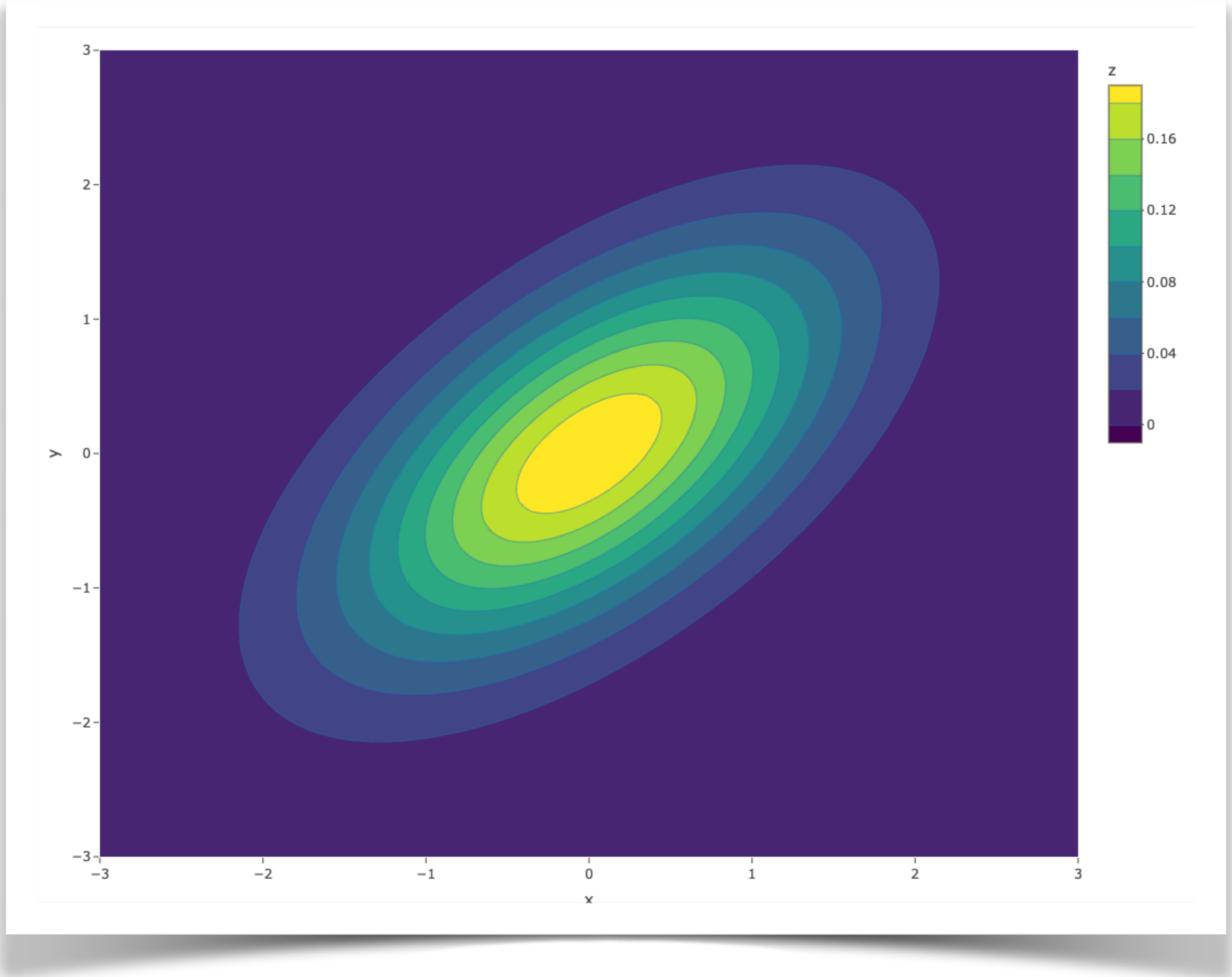


球形分布与椭圆分布

- 例：多元正态分布.

$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad X \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi) \qquad \phi(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2}\right\}$$

```
fig_2 = plot_ly(x = ~x, y = ~y, z = ~z) %>%
  add_contour()
fig_2
```



球形分布与椭圆分布

- 例：多元正态分布.

$$X \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \quad \Longrightarrow \quad X \sim EC_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi) \qquad \phi(u) = \exp\left\{-\frac{u}{2}\right\}$$

  - 多元正态分布的密度曲面：

$$f(\boldsymbol{x}) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

  - 注意到密度在椭圆上的值为常数.
  - 这就是称之为“椭圆”分布族的原因.

球形分布与椭圆分布

定理 5.11 椭圆随机向量 $\boldsymbol{X}$ 具有以下性质:

1. 椭圆分布变量的任何线性组合还是椭圆分布.
2. 椭圆分布变量的边际分布还是椭圆分布.
3. 对任何 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$ 以及 $\Sigma \geq 0$，$\operatorname{rank}(\Sigma) = k$，一个标量函数 $\phi(\cdot)$ 能够确定一个椭球分布 $EC_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi\right)$ 的充分必要条件是 $\phi\left(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\right)$ 是一个 p 维特征函数.
4. 假设 $\boldsymbol{X}$ 是非退化的. 如果 $\boldsymbol{X} \sim EC_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi\right)$ 且 $\boldsymbol{X} \sim EC_p\left(\boldsymbol{\mu}^*, \Sigma^*, \phi^*\right)$，则存在常数 $c > 0$ 使得

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^* \ , \Sigma = c\Sigma^* \ , \phi^*(\cdot) = \phi\left(c^{-1}\cdot\right).$$

换言之，$\Sigma, \phi, \mathscr{C}$ 不唯一，除非我们强加条件 $\det(\Sigma) = 1$.

球形分布与椭圆分布

定理 5.11 (续) 椭圆随机向量 X 具有以下性质：

5. $\boldsymbol{X}$ 的特征函数 $\psi(\boldsymbol{t}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}\right)$ 形如 $\psi(\boldsymbol{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}}\phi\left(\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\Sigma\boldsymbol{t}\right)$，其中 ϕ 是标量函数.

6. $\boldsymbol{X} \sim EC_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi\right)$ 且 $\mathrm{rank}(\Sigma) = k$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{\mu} + r\,\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}$ 同分布，其中 $r \geq 0$ 与随机向量 $\boldsymbol{u}^{(k)}$ 独立，$\boldsymbol{u}^{(k)}$ 服从 $\mathbb{R}^k$ 中单位球面上的均匀分布，$\mathscr{C}$ 是满足 $\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\mathscr{C} = \Sigma$ 的一个 $(k \times p)$ 矩阵.

7. 若 $\boldsymbol{X} \sim EC_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi\right)$ 且 $\mathrm{E}\left(r^2\right) < \infty$. 则

$$\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{\mu}\ , \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\boldsymbol{X}\right) = \frac{\mathbb{E}\left(r^2\right)}{\mathrm{rank}\left(\Sigma\right)}\Sigma = -2\phi^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{0}\right)\Sigma.$$

8. 若 $\boldsymbol{X} \sim EC_p\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi\right)$ 且 $\mathrm{rank}\left(\Sigma\right) = k$. 则

$$Q(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})$$

与表达式 $\boldsymbol{\mu} + r\,\mathscr{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{(k)}$ 当中的 r^2 具有相同的分布.