2025-2026 学年春季学期《多元统计分析》测验 1 试卷

姓　名: ________________　　　　学　号: ________________

1. **填空题**. (每空 2 分，满分 10 分)

   (a) (4 分) 设 $\mathcal{A}$ 为 $p \times p$ 的实对称矩阵，$\mathcal{A}$ 的 Jordan 分解可表示为 $\mathcal{A} = \Gamma \Lambda \Gamma^{\mathrm{T}}$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ 中的 λ_i 是矩阵 $\mathcal{A}$ 的 ________________，$\Gamma = \left(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_p\right)$ 中的 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是矩阵 $\mathcal{A}$ 对应于 λ_i 的 ________________.

   (b) (4 分) 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^{\mathrm{T}}$ 是 p 维随机向量，若其均值向量 $\mathbb{E}\,(\boldsymbol{X}) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p)^{\mathrm{T}}$，则 μ_i 是随机变量 X_i 的 ________________；若其协方差矩阵 $\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(\boldsymbol{X}) = \Sigma = (\sigma_{ij})_{p \times p}$，则 σ_{ij} 是随机变量 X_i 与 X_j 的 ________________.

   (c) (2 分) 设 $\boldsymbol{X} \sim N_p\,(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 称 $\boldsymbol{Y} = \Sigma^{-1/2}\,(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})$ 为 Mahalanobis 变换, 则 $\boldsymbol{Y}$ 服从 ____________ 分布.

2. **判断题**. (每题 2 分，满分 8 分，正确者打 ✓，错误者打 ×)

   (a) (2 分) 不同的联合概率密度函数可以有相同的边际概率密度函数. (　　　　)

   (b) (2 分) 若 X_1, X_2 都服从一元正态分布, 则随机向量 $(X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ 一定服从二元正态分布. (　　　　)

   (c) (2 分) 若 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ 相互独立，且均服从均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为 Σ 的 p 维多元分布，则当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt{n}\left(\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}\right)$ 渐进服从正态分布 $N_p\,(\mathbf{0}, \Sigma)$. (　　　　)

   (d) (2 分) 厚尾分布是指其尾部概率趋于零的速度比正态分布更快，极端值出现概率更小的分布. (　　　　)

3. **简答题**.

   (a) (6 分) 简要说明：什么是无偏估计量？其直观意义是什么？

   (b) (6 分) 设 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\right)$，确定 $Y = 2\,X_1 - X_2$ 服从的分布.