

《多元统计分析》课后作业

姓名： 李倩倩

学号： 2024017349

班级： 统计 24-1 班

中国石油大学（北京）克拉玛依校区文理学院数学与统计系

Friday 24th April, 2026

作业要求

1. 可以和其他同学讨论作业当中的问题，但应当自己独立完成作业
2. 计算、证明等要有过程，要有主要步骤的说明
3. 请将计算、绘图所用的 R 代码以及生成的结果和图像一并添加在作业文件当中
4. 请使用 \LaTeX 编辑并生成 PDF 格式的文件，第 X 周作业文件命名方式：学号-姓名-X.pdf
5. 评分标准：每一问得分 $\in \{2, 1, 0\}$
 - 2: 按时完成并上交作业，且答案基本正确
 - 1: 按时完成并上交作业，且答案部分正确
 - 0: 答案完全错误，或者迟交作业(规定时间72小时之后)
6. 请将完成的 PDF 格式的作业文件发送至邮箱：xiaolei@cup.edu.cn
7. 每位同学可以有一次迟交作业的机会，但不得晚于规定时间三日之后
8. 第 6 周作业截止时间：2026年4月24日24:00

目录

Chapter 1

第 6 周作业

第 6 周作业截止时间：2026年4月24日24:00

第 6 周作业完成时间：Friday 24th April, 2026 22:10

1. 设有二维分布总体，其概率密度函数为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \exp\left(-\frac{x_1}{\theta_1} - \frac{x_2}{\theta_2}\right), \quad x_1, x_2 > 0 \quad (1.1)$$

从中抽取一个容量为 n 的简单随机样本。

(a) [2 分] 求 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ 的极大似然估计量。

【解】

设样本为 $\{(x_{1i}, x_{2i})\}_{i=1}^n$ ，似然函数为

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \exp\left(-\frac{x_{1i}}{\theta_1} - \frac{x_{2i}}{\theta_2}\right) = \frac{1}{(\theta_1 \theta_2)^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{\theta_1} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{\theta_2}\right). \quad (1.2)$$

对数似然函数为

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -n \ln \theta_1 - n \ln \theta_2 - \frac{1}{\theta_1} \sum_{i=1}^n x_{1i} - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n x_{2i}. \quad (1.3)$$

分别对 θ_1 、 θ_2 求偏导并令其等于零：

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = -\frac{n}{\theta_1} + \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{\theta_1^2} = 0 \implies \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} = \bar{x}_1, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{\theta_2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{\theta_2^2} = 0 \implies \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} = \bar{x}_2. \quad (1.5)$$

验证二阶偏导数 $\partial^2 l / \partial \theta_j^2 = n / \theta_j^2 - 2 \sum x_{ji} / \theta_j^3$ ，在极值点处代入 $\theta_j = \bar{x}_j$ 得 $-n / \bar{x}_j^2 < 0$ ，确为极

大值点。故 θ 的极大似然估计量为

$$\hat{\theta} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T = \bar{\mathbf{x}}. \quad (1.6)$$

(b) [2 分] 确定其 Cramer-Rao 下界.

【解】

单个观测 (x_1, x_2) 的对数密度为

$$\ln f = -\ln \theta_1 - \ln \theta_2 - \frac{x_1}{\theta_1} - \frac{x_2}{\theta_2}.$$

评分函数分量为

$$s_1 = \frac{\partial \ln f}{\partial \theta_1} = -\frac{1}{\theta_1} + \frac{x_1}{\theta_1^2} = \frac{x_1 - \theta_1}{\theta_1^2}, \quad s_2 = \frac{\partial \ln f}{\partial \theta_2} = \frac{x_2 - \theta_2}{\theta_2^2}.$$

由于 $x_j \sim \text{Exp}(\theta_j)$, 故 $\mathbb{E}[x_j] = \theta_j$, $\text{Var}(x_j) = \theta_j^2$. 单个观测的 Fisher 信息矩阵各元素为

$$\mathcal{I}_{11} = \mathbb{E}[s_1^2] = \frac{\text{Var}(x_1)}{\theta_1^4} = \frac{\theta_1^2}{\theta_1^4} = \frac{1}{\theta_1^2}, \quad (1.7)$$

$$\mathcal{I}_{22} = \mathbb{E}[s_2^2] = \frac{1}{\theta_2^2}, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{I}_{12} = \mathbb{E}[s_1 s_2] = \mathbb{E}[s_1] \mathbb{E}[s_2] = 0 \quad (\text{因 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 独立且 } \mathbb{E}[s_j] = 0). \quad (1.9)$$

故单个观测的 Fisher 信息矩阵为

$$\mathcal{I}(\theta) = \text{diag}\left(\frac{1}{\theta_1^2}, \frac{1}{\theta_2^2}\right).$$

容量为 n 的样本的 Fisher 信息矩阵为 $\mathcal{I}_n(\theta) = n\mathcal{I}(\theta) = \text{diag}(n/\theta_1^2, n/\theta_2^2)$.

θ 的任意无偏估计量 $\hat{\theta}$ 的协方差矩阵满足

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \succeq \mathcal{I}_n^{-1}(\theta) = \text{diag}\left(\frac{\theta_1^2}{n}, \frac{\theta_2^2}{n}\right). \quad (1.10)$$

即 Cramer-Rao 下界为 $\text{diag}(\theta_1^2/n, \theta_2^2/n)$.

(c) [2 分] 能否找到 θ 的一个最小方差无偏估计量?

【解】

可以找到, 且极大似然估计量 $\hat{\theta} = \bar{\mathbf{x}}$ 即为所求。

充分完备统计量的存在性: 该分布族可以写成指数族形式

$$f(x_1, x_2; \theta) = \exp\left(-\frac{x_1}{\theta_1} - \frac{x_2}{\theta_2} - \ln \theta_1 - \ln \theta_2\right),$$

自然参数为 $\eta_j = -1/\theta_j$, 充分统计量为 $\mathbf{T} = (\sum_{i=1}^n x_{1i}, \sum_{i=1}^n x_{2i})^T$. 由满秩指数族的完备性定

理, T 是完全充分统计量。

由 **Lehmann-Scheffé 定理**: $\bar{x} = T/n$ 是 T 的函数, 且 $\mathbb{E}[\bar{x}_j] = \theta_j$ (无偏性), 故 \bar{x} 是 θ 的最小方差无偏估计量 (MVUE)。

验证: $\text{Var}(\bar{x}_j) = \theta_j^2/n$, 恰好等于 Cramer-Rao 下界, 进一步印证上述结论。

2. 考虑总体 $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_0)$, 其中 Σ_0 已知, 设 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ 是取自该总体的一个简单随机样本。

(a) [2 分] 计算 $\boldsymbol{\mu}$ 的 Cramer-Rao 下界。

【解】

单个观测 $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_0)$ 的对数密度为

$$\ln f = -\frac{p}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_0| - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}).$$

关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的评分函数为

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \ln f}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}).$$

单个观测的 Fisher 信息矩阵为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\boldsymbol{\mu}) &= \mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = \mathbb{E}[\Sigma_0^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma_0^{-1}] \\ &= \Sigma_0^{-1} \mathbb{E}[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T] \Sigma_0^{-1} = \Sigma_0^{-1} \Sigma_0 \Sigma_0^{-1} = \Sigma_0^{-1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

容量为 n 的样本的 Fisher 信息矩阵为 $\mathcal{I}_n(\boldsymbol{\mu}) = n\Sigma_0^{-1}$ 。

故 $\boldsymbol{\mu}$ 的任意无偏估计量 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ 满足

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) \succeq \mathcal{I}_n^{-1}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{n} \Sigma_0. \quad (1.12)$$

即 $\boldsymbol{\mu}$ 的 Cramer-Rao 下界为 $\frac{\Sigma_0}{n}$ 。

(b) [2 分] 能否给出 $\boldsymbol{\mu}$ 的一个最小方差无偏估计量?

【解】

可以给出, 样本均值 $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ 即为所求。

无偏性: $\mathbb{E}[\bar{\mathbf{x}}] = \boldsymbol{\mu}$ 。

协方差达到下界: $\text{Cov}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\Sigma_0}{n}$, 恰好等于 Cramer-Rao 下界。

完备充分性: 多元正态分布属于满秩指数族, $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ (从而 $\bar{\mathbf{x}}$) 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的完全充分统计量。

由 Lehmann-Scheffé 定理, $\bar{\mathbf{x}}$ 是 $\boldsymbol{\mu}$ 的最小方差无偏估计量 (MVUE)。

3. 假设 $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中 Σ 未知, 但我们已知 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{pp})$, 如果 $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ 是取自该总体的容量为 n 的一个简单随机样本

(a) [2 分] 求 $\boldsymbol{\mu}$ 的极大似然估计.

【解】

记 $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$. 当 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{pp})$ 时, $|\Sigma| = \prod_{j=1}^p \sigma_{jj}$, $\Sigma^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_{11}, \dots, 1/\sigma_{pp})$, 故对数似然函数为

$$l(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \sum_{j=1}^p \ln \sigma_{jj} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{(x_{ij} - \mu_j)^2}{\sigma_{jj}}. \quad (1.13)$$

对 μ_j 求偏导并令其为零:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_j} = \frac{1}{\sigma_{jj}} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \mu_j) = 0 \implies \hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} = \bar{x}_j.$$

故 $\boldsymbol{\mu}$ 的极大似然估计为

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)^T. \quad (1.14)$$

(b) [2 分] 求 Σ 的极大似然估计.

【解】

将 $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ 代入对数似然函数, 对 σ_{jj} 求偏导并令其为零:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_{jj}} = -\frac{n}{2\sigma_{jj}} + \frac{1}{2\sigma_{jj}^2} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = 0 \implies \hat{\sigma}_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2.$$

验证二阶偏导 $\partial^2 l / \partial \sigma_{jj}^2 = n / (2\sigma_{jj}^2) - \sum (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 / \sigma_{jj}^3$, 在极值点处为负, 确为极大值. 故 Σ 的极大似然估计为

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \dots, \hat{\sigma}_{pp}), \quad \hat{\sigma}_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.15)$$

即 $\hat{\Sigma}$ 为样本协方差矩阵 (除以 n) 的对角部分.

4. [2 分] 证明定理 6.1.

定理 6.1: 设 $s = s(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是评分函数, 如果 $\hat{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是 \mathcal{X} 与 $\boldsymbol{\theta}$ 的任一函数, 则在正则条件下有

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\boldsymbol{t}^T) - \mathbb{E}\left(\frac{\partial \boldsymbol{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right). \quad (1.16)$$

提示: 从

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\boldsymbol{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int \boldsymbol{t}^T(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X}$$

出发, 注意到

$$\boldsymbol{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}).$$

【证】

由期望的定义:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int \mathbf{t}^T(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X}.$$

在正则条件下, 可以交换积分与微分顺序 (Leibniz 积分法则), 并利用乘积法则展开被积函数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) &= \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} [\mathbf{t}^T(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})] d\mathcal{X} \\ &= \int \frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X} + \int \mathbf{t}^T(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} d\mathcal{X}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

第一个积分即为 $\mathbb{E}\left(\frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)$.

对于第二个积分, 由题意中的关系式 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$, 代入得

$$\int \mathbf{t}^T \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} d\mathcal{X} = \int \mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{t}^T(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X} = \mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T).$$

注意此处 \mathbf{s} 为 $k \times 1$ 列向量, \mathbf{t}^T 为 $1 \times q$ 行向量, 故 $\mathbf{s}\mathbf{t}^T$ 为 $k \times q$ 矩阵, 与左端 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T)$ 维度一致。

综合以上两项:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) + \mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T).$$

移项即得定理 6.1:

$$\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) - \mathbb{E}\left(\frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right).$$

□

5. 设 $\mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是评分函数, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathcal{X})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的任意一个无偏估计量, 即 $\mathbb{E}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\theta}$.

(a) [2 分] 证明

$$\mathbb{E}[\mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})] = \mathbf{0}. \quad (1.18)$$

【证】

由于 $L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})$ 是概率密度函数, 满足归一化条件:

$$\int L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X} = 1.$$

在正则条件下, 对 $\boldsymbol{\theta}$ 求导并交换积分与微分顺序:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X} = \int \frac{\partial L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} d\mathcal{X} = \mathbf{0}.$$

将 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{s} \cdot L$ 代入:

$$\int \mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) \cdot L(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta}) d\mathcal{X} = \mathbf{0},$$

即 $\mathbb{E}[\mathbf{s}(\mathcal{X}; \boldsymbol{\theta})] = \mathbf{0}$. □

(b) [2 分] 证明

$$\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \text{Cov}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathcal{I}_k. \quad (1.19)$$

【证】

第一步: 证明 $\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \text{Cov}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ 。

由第 (a) 小问知 $\mathbb{E}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$, 且 \mathbf{t} 无偏故 $\mathbb{E}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\theta}$, 从而

$$\text{Cov}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbb{E}[(\mathbf{s} - \mathbb{E}[\mathbf{s}])(\mathbf{t} - \mathbb{E}[\mathbf{t}])^T] = \mathbb{E}[\mathbf{s}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\theta})^T] = \mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) - \mathbb{E}(\mathbf{s})\boldsymbol{\theta}^T = \mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T). \quad (1.20)$$

第二步: 证明 $\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \mathcal{I}_k$ (k 阶单位矩阵)。

由于 $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathcal{X})$ 不显含 $\boldsymbol{\theta}$, 故

$$\frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}.$$

又由无偏性 $\mathbb{E}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\theta}$, 有 $\mathbb{E}(\mathbf{t}^T) = \boldsymbol{\theta}^T$, 故

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathcal{I}_k,$$

其中 \mathcal{I}_k 为 k 阶单位矩阵, 其第 (i, j) 元素为 $\partial \theta_j / \partial \theta_i = \delta_{ij}$ 。

由定理 6.1:

$$\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}(\mathbf{t}^T) - \mathbb{E}\left(\frac{\partial \mathbf{t}^T}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) = \mathcal{I}_k - \mathbf{0} = \mathcal{I}_k.$$

综合两步, $\mathbb{E}(\mathbf{s}\mathbf{t}^T) = \text{Cov}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathcal{I}_k$. □

6. 设 $\mathbf{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中已知

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

我们从该总体抽取了容量 $n = 6$ 的一个简单随机样本, 计算得

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

(a) [2 分] 求解下述假设检验问题.

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \longleftrightarrow H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

【解】

Σ 已知时, 使用基于 χ^2 分布的检验统计量:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) \stackrel{H_0}{\sim} \chi^2(p),$$

其中 $p = 2$, $\boldsymbol{\mu}_0 = (2, 2/3)^T$ 。

第一步: 计算 Σ^{-1} 。

$$|\Sigma| = 2 \times 2 - (-1) \times (-1) = 3, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

第二步: 计算差向量。

$$\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0 = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

第三步: 计算 $\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ 。

$$\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 - \frac{1}{6} \\ -1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{18} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

第四步: 计算二次型。

$$(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) = (-1) \cdot \left(-\frac{13}{18}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{13}{18} + \frac{4}{54} = \frac{39}{54} + \frac{4}{54} = \frac{43}{54}.$$

第五步: 计算检验统计量。

$$T^2 = 6 \times \frac{43}{54} = \frac{43}{9} \approx 4.778.$$

第六步: 作出结论。取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 查表得 $\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$ 。

拒绝域为 $W = \{T^2 > \chi_{\alpha}^2(2)\}$ 。

由于 $T^2 = 43/9 \approx 4.778 < 5.991$, 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 不拒绝 H_0 。

亦可计算 p 值: $p = P(\chi^2(2) > 43/9) = e^{-43/18} \approx 0.0916 > 0.05$, 与上述结论一致。

(b) [2 分] 作拒绝域的可视化图形。

【解】

拒绝域 $T^2 > \chi_{\alpha}^2(2)$ 等价于样本均值 $\bar{\mathbf{x}}$ 落在以 $\boldsymbol{\mu}_0$ 为中心的接受椭圆之外:

$$W = \{\bar{\mathbf{x}} : n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) > \chi_{\alpha}^2(p)\}.$$

以下 R 代码绘制拒绝边界 (蓝色椭圆内部为接受域, 外部为拒绝域):

第6题(b) - Sigma 已知情形的拒绝域可视化

```

mu0 <- c(2, 2/3)
xbar <- c(1, 0.5)
Sigma <- matrix(c(2, -1, -1, 2), nrow = 2)
n <- 6; p <- 2; alpha <- 0.05

crit <- qchisq(1 - alpha, p) # chi^2_{0.05}(2) = 5.991

# 椭圆参数化: 以 mu0 为中心, 形状矩阵为 Sigma/n
A <- Sigma / n
eigA <- eigen(A)
th <- seq(0, 2*pi, length.out = 500)
ell <- mu0 + sqrt(crit) *
      eigA$vectors %*% diag(sqrt(eigA$values)) %*% rbind(cos(th), sin(th))

par(mar = c(4, 4, 3, 1))
plot(t(ell), type = "l", col = "blue", lwd = 2,
      xlab = expression(bar(x)[1]), ylab = expression(bar(x)[2]),
      main = "Rejection Region (known Sigma, alpha = 0.05)")
points(mu0[1], mu0[2], pch = 16, col = "red", cex = 1.5)
points(xbar[1], xbar[2], pch = 17, col = "darkgreen", cex = 1.5)
abline(h = 0, v = 0, lty = 2, col = "gray70")
legend("topright",
      legend = c(expression(mu[0]), expression(bar(x)),
                  "接受域边界 (内部为接受域)"),
      pch = c(16, 17, NA), lty = c(NA, NA, 1),
      col = c("red", "darkgreen", "blue"), lwd = c(NA, NA, 2))

```

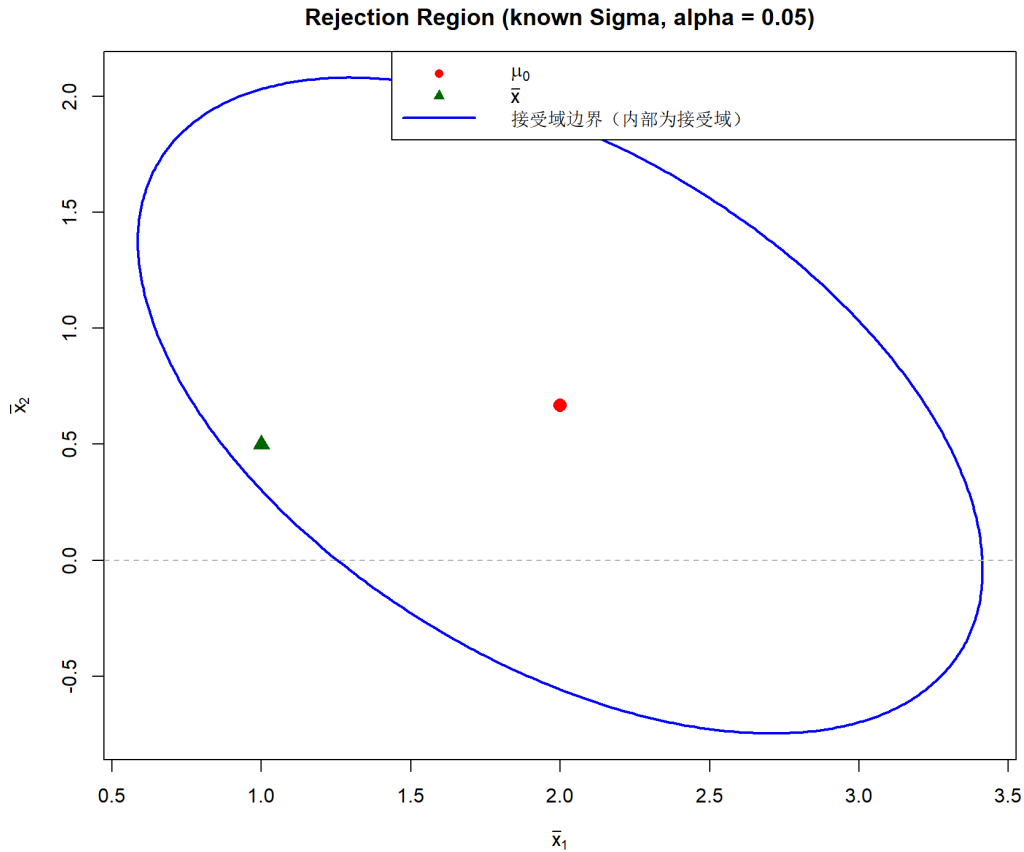


图 1.1: 拒绝域可视化 (Σ 已知, $\alpha = 0.05$): 蓝色椭圆为接受域边界, 内部为接受域, 外部为拒绝域; 红色实心圆为 μ_0 , 绿色三角为 $\bar{\mathbf{x}}$ (位于椭圆内, 不拒绝 H_0)。

图中蓝色椭圆为接受域与拒绝域的分界线。 μ_0 (红色实心圆) 为原假设均值, $\bar{\mathbf{x}}$ (绿色三角) 位于椭圆内部, 故不拒绝 H_0 , 与第 (a) 小问结论一致。

7. 设 $\mathbf{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, 其中 Σ 未知. 从中抽取了容量 $n = 6$ 的一个样本, 计算得样本均值和样本方差如下:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

(a) [2 分] 求解下述检验问题.

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \longleftrightarrow H_1: \boldsymbol{\mu} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

【解】

Σ 未知时, 使用 Hotelling T^2 统计量:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \mathcal{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0).$$

在 H_0 下, $F = \frac{n-p}{(n-1)p} T^2 \sim F(p, n-p)$, 其中 $p=2, n=6$ 。

第一步: 计算 S^{-1} 。

$$|S| = 4 - 1 = 3, \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

第二步: 差向量 $\bar{x} - \mu_0 = (-1, -1/6)^T$ (同第 6 题)。

第三步: 由第 6 题的计算结果:

$$(\bar{x} - \mu_0)^T S^{-1} (\bar{x} - \mu_0) = \frac{43}{54},$$

故

$$T^2 = 6 \times \frac{43}{54} = \frac{43}{9} \approx 4.778.$$

第四步: 转化为 F 统计量。

$$F = \frac{n-p}{(n-1)p} T^2 = \frac{6-2}{(6-1) \times 2} \times \frac{43}{9} = \frac{4}{10} \times \frac{43}{9} = \frac{172}{90} = \frac{86}{45} \approx 1.911.$$

第五步: 作出结论。取 $\alpha = 0.05$, 查表得 $F_{0.05}(2, 4) = 6.944$ 。

拒绝域为 $W = \{F > F_{\alpha}(p, n-p)\}$ 。

由于 $F \approx 1.911 < 6.944$, 在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下, 不拒绝 H_0 。

等价地, T^2 的临界值为 $T_{\text{crit}}^2 = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{0.05}(p, n-p) = \frac{5 \times 2}{4} \times 6.944 = 17.36$, 由于 $T^2 \approx 4.778 < 17.36$, 结论相同。

注: 与第 6 题相比, Σ 未知导致临界值从 5.991 大幅提升至 17.36, 反映了估计 Σ 所带来的额外不确定性 (自由度损失)。

(b) [2 分] 作拒绝域的可视化图形。

【解】

拒绝域等价于

$$W = \{\bar{x} : n(\bar{x} - \mu_0)^T S^{-1} (\bar{x} - \mu_0) > T_{\text{crit}}^2\},$$

其中 $T_{\text{crit}}^2 = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{\alpha}(p, n-p)$ 。

以下 R 代码同时绘制第 6 题和第 7 题的拒绝边界进行对比:

第7题(b) - Sigma 未知情形的拒绝域可视化 (并与已知 Sigma 作对比)

```
mu0 <- c(2, 2/3)
```

```
xbar <- c(1, 0.5)
```

```
S <- matrix(c(2, -1, -1, 2), nrow = 2)
```

```
n <- 6; p <- 2; alpha <- 0.05
```

第7题 (Sigma 未知): T^2 临界值

```

F_crit <- qf(1 - alpha, p, n - p)          # F_{0.05}(2,4) = 6.944
T2_crit <- (n - 1) * p / (n - p) * F_crit # = 17.36

# 第6题 (Sigma 已知): chi^2 临界值
chi2_crit <- qchisq(1 - alpha, p)        # = 5.991

# 椭圆参数化函数
make_ellipse <- function(center, A, radius) {
  eigA <- eigen(A)
  th <- seq(0, 2*pi, length.out = 500)
  pts <- center + sqrt(radius) *
          eigA$vectors %*% diag(sqrt(eigA$values)) %*% rbind(cos(th), sin(th))
  t(pts)
}

A <- S / n
ell_unknown <- make_ellipse(mu0, A, T2_crit) # Sigma 未知 (红色, 较大椭圆)
ell_known <- make_ellipse(mu0, A, chi2_crit) # Sigma 已知 (蓝色, 较小椭圆)

par(mar = c(4, 4, 3, 1))
plot(ell_unknown, type = "l", col = "red", lwd = 2,
      xlab = expression(bar(x)[1]), ylab = expression(bar(x)[2]),
      main = "Rejection Regions Comparison (alpha = 0.05)",
      xlim = range(c(ell_unknown[,1], ell_known[,1])),
      ylim = range(c(ell_unknown[,2], ell_known[,2])))
lines(ell_known, col = "blue", lwd = 2, lty = 2)
points(mu0[1], mu0[2], pch = 16, col = "black", cex = 1.5)
points(xbar[1], xbar[2], pch = 17, col = "darkgreen", cex = 1.5)
abline(h = 0, v = 0, lty = 2, col = "gray70")
legend("topright",
      legend = c(expression(mu[0]), expression(bar(x)),
                  "Sigma 未知 (T^2 临界值 = 17.36) ",
                  "Sigma 已知 (chi^2 临界值 = 5.991) "),
      pch = c(16, 17, NA, NA), lty = c(NA, NA, 1, 2),
      col = c("black", "darkgreen", "red", "blue"), lwd = c(NA, NA, 2, 2))

```

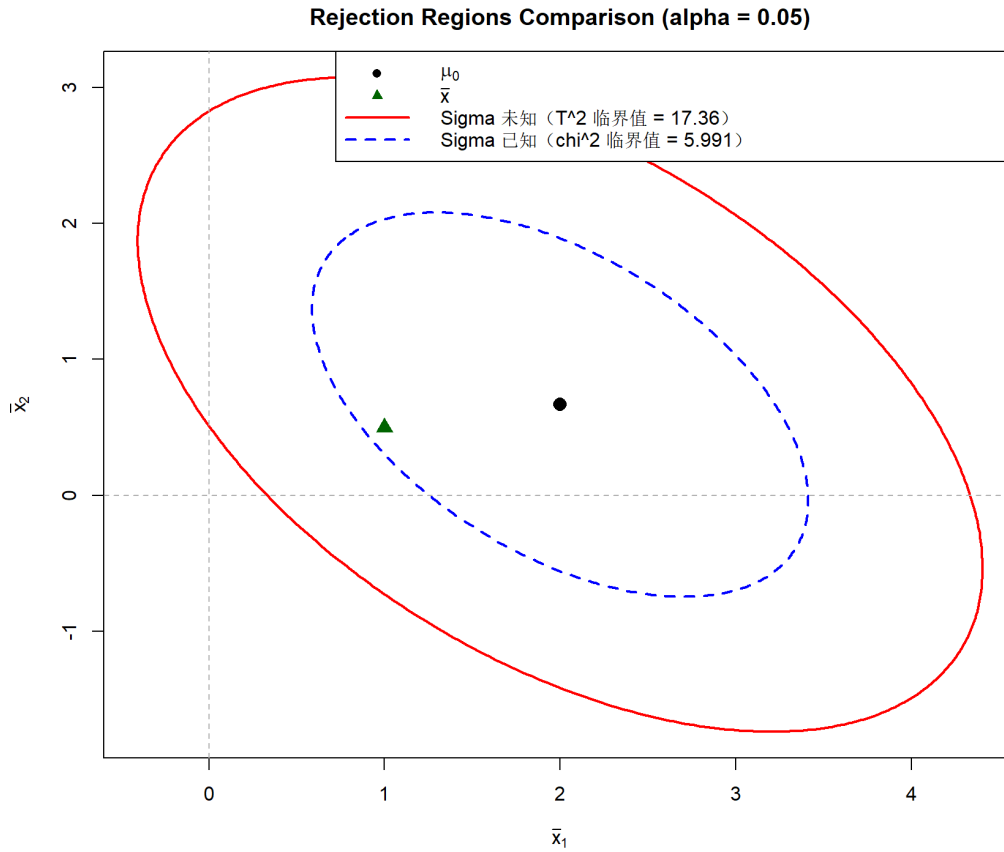


图 1.2: 拒绝域对比 ($\alpha = 0.05$): 红色实线椭圆为 Σ 未知时的接受域边界 ($T_{\text{crit}}^2 = 17.36$), 蓝色虚线椭圆为 Σ 已知时的接受域边界 ($\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$); $\bar{\mathbf{x}}$ (绿色三角) 位于两椭圆内部, 两种情形下均不拒绝 H_0 。

图中红色实线椭圆为 Σ 未知时的接受域边界 ($T_{\text{crit}}^2 = 17.36$), 蓝色虚线椭圆为 Σ 已知时的接受域边界 ($\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$)。由于 $\mathcal{S} = \Sigma$, 两椭圆形状相同, 但 Σ 未知时临界值更大, 接受域更大, 故更难拒绝原假设。 $\bar{\mathbf{x}}$ (绿色三角) 位于两个椭圆内部, 两种情形下均不拒绝 H_0 。