《多元统计分析》课后作业

姓名：你的姓名

学号：你的学号

班级：统计 23-X 班

中国石油大学（北京）克拉玛依校区文理学院数学与统计系

Friday 10$^{\text{th}}$ April, 2026

作业要求

1. 可以和其他同学讨论作业当中的问题，但应当自己独立完成作业
2. 计算、证明等要有过程，要有主要步骤的说明
3. 请将计算、绘图所用的 R 代码以及生成的结果和图像一并添加在作业文件当中
4. 请使用 LaTeX编辑并生成 PDF 格式的文件，第X周作业文件命名方式：学号-姓名-X.pdf
5. 评分标准：每一问得分 $\in \{2, 1, 0\}$
   - 2: 按时完成并上交作业，且答案基本正确
   - 1: 按时完成并上交作业，且答案部分正确
   - 0: 答案完全错误，或者迟交作业(规定时间72小时之后)
6. 请将完成的 PDF 格式的作业文件发送至邮箱：xiaolei@cup.edu.cn
7. 每位同学可以有一次迟交作业的机会，但不得晚于规定时间三日之后
8. 第4周作业截止时间：2026年4月10日24:00

目录

Chapter 1

第 4 周作业

第 4 周作业截止时间：2026年4月10日24:00

第 4 周作业完成时间：Friday 10th April, 2026 18:22

1. [2 分] 证明

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}y_1 - \dfrac{1}{4}y_2\,, & 0 \le y_1 \le 2,\ |y_2| \le 1 - |1 - y_1|\,, \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.1}$$

是一个概率密度函数.

【证明】 要验证这是一个概率密度函数需验证非负性以及积分等于 1。

非负性： 在定义域内，$y_1 \ge 0$，且 $|y_2| \le 1 - |1 - y_1|$。分两种情况：

- 当 $0 \le y_1 \le 1$ 时，$|1 - y_1| = 1 - y_1$，则 $|y_2| \le y_1$。此时

$$\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \ge \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_1 = \frac{1}{4}y_1 \ge 0.$$

- 当 $1 \le y_1 \le 2$ 时，$|1 - y_1| = y_1 - 1$，则 $|y_2| \le 2 - y_1$。此时

$$\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \ge \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}(2 - y_1) = \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{2} \ge \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0.$$

因此 $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) \ge 0$ 处处成立。

归一性： 计算二重积分

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2.$$

先对 y_2 积分。对于固定的 y_1，令 $L = 1 - |1 - y_1|$，则 y_2 从 $-L$ 到 L，且被积函数关于 y_2 为线性，奇次项积分为零：

$$\int_{-L}^{L}\left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2\right)\mathrm{d}y_2 = \frac{1}{2}y_1\cdot(2L) = y_1 L.$$

于是

$$I=\int_0^2 y_1\big(1-|1-y_1|\big)\,\mathrm{d}y_1.$$

分段计算：

$$\int_0^1 y_1\cdot y_1\,\mathrm{d}y_1=\int_0^1 y_1^2\,\mathrm{d}y_1=\frac{1}{3},$$

$$\int_1^2 y_1\cdot(2-y_1)\,\mathrm{d}y_1=\int_1^2(2y_1-y_1^2)\,\mathrm{d}y_1=\left[y_1^2-\frac{1}{3}y_1^3\right]_1^2$$

$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

故 $I=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$。积分值为 1，又具有非负性，因此 f_Y 是一个概率密度函数。□

2. 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\,X_2)^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数为

$$f\,(x_1\,,\,x_2)=\begin{cases}4\,x_1x_2\,\mathrm{e}^{-x_1^2}\,, & x_1>0\,,\,0<x_2<1\,,\\ 0\,, & \text{其它}.\end{cases}\tag{1.2}$$

(a) [2 分] 计算 $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$ 与 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})$.

【解】 边际密度为：

$$f_{X_1}(x_1)=\int_0^1 4x_1x_2\mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_2=2x_1\mathrm{e}^{-x_1^2},\quad x_1>0,$$

$$f_{X_2}(x_2)=\int_0^\infty 4x_1x_2\mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1=2x_2,\quad 0<x_2<1.$$

$$f\,(x_1\,,\,x_2)=f_{X_1}(x_1)\cdot f_{X_2}(x_2)\tag{1.3}$$

可见 X_1 与 X_2 独立

$$\mathbb{E}(X_1)=\int_0^\infty x_1\cdot 2x_1\mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1=2\int_0^\infty x_1^2\mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\mathbb{E}(X_2)=\int_0^1 x_2\cdot 2x_2\,\mathrm{d}x_2=2\int_0^1 x_2^2\,\mathrm{d}x_2=\frac{2}{3},$$

由于独立，协方差为 0。故

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},\qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1-\frac{\pi}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

(b) [2 分] 计算 $\mathbb{E}\,(X_1\,|X_2\,)$ 与 $\mathbb{E}\,(X_2\,|X_1\,)$.

【解】 由独立性，条件期望等于无条件期望：

$$\mathbb{E}(X_1\mid X_2)=\mathbb{E}(X_1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\qquad \mathbb{E}(X_2\mid X_1)=\mathbb{E}(X_2)=\frac{2}{3}.$$

(c) [2 分] 计算 $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_1\,|X_2\,)$ 与 $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_2\,|X_1\,)$.

【解】 由独立性，条件方差等于无条件方差：

$$\mathbb{E}(X_1^2)=\int_0^\infty x_1^2\cdot 2x_1 \mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1=2\int_0^\infty x_1^3\mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1=2\cdot\frac{1}{2}=1,\quad \mathrm{Var}(X_1)\quad=\mathbb{E}(X_1^2)-\big(\mathbb{E}(X_1)\big)^2=1-\frac{\pi}{4},$$

$$\mathbb{E}(X_2^2)=\int_0^1 x_2^2\cdot 2x_2\,\mathrm{d}x_2=2\int_0^1 x_2^3\,\mathrm{d}x_2=\frac{1}{2},\quad \mathrm{Var}(X_2)\quad=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

$$\mathrm{Var}(X_1\mid X_2)=\mathrm{Var}(X_1)=1-\frac{\pi}{4},\quad \mathrm{Var}(X_2\mid X_1)=\mathrm{Var}(X_2)=\frac{1}{18}.$$

3. [2 分] 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,\,X_2)^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数为

$$f\,(x_1\,,\,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\,, & 0<x_1<2\pi\,,\,0<x_2<1\,,\\[2ex] 0\,, & \text{其它}.\end{cases}\tag{1.4}$$

令

$$\begin{cases}U_1=(\sin X_1)\,\sqrt{-2\,\ln X_2}\\[2ex] U_2=(\cos X_1)\,\sqrt{-2\,\ln X_2}\end{cases}\tag{1.5}$$

求 $\boldsymbol{U}=(U_1,\,U_2)^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数 $g\,(u_1\,,\,u_2)$.

【解】 由题易知 X_1 与 X_2 独立，$X_1\sim\mathrm{Uniform}(0,2\pi)$，$X_2\sim\mathrm{Uniform}(0,1)$。定义中间变量

$$R=\sqrt{-2\ln X_2},\qquad \Theta=X_1,$$

则 $U_1=R\sin\Theta$, $U_2=R\cos\Theta$，又变换 $(X_1,X_2)\mapsto(U_1,U_2)$ 是一一映射。其逆变换为

$$X_1=\Theta=\mathrm{atan2}(U_1,U_2),\qquad X_2=\exp\left(-\frac{R^2}{2}\right)=\exp\left(-\frac{U_1^2+U_2^2}{2}\right).$$

计算雅可比行列式。先由极坐标变换 $(U_1,U_2)\to(R,\Theta)$，其雅可比绝对值为 R，故 $(R,\Theta)\to(U_1,U_2)$ 的雅可比绝对值为 $1/R$。再计算 $(X_1,X_2)\to(R,\Theta)$：

$$X_1=\Theta,\quad X_2=e^{-R^2/2},$$

则

$$\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(R,\Theta)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -Re^{-R^2/2} & 0\end{vmatrix}=Re^{-R^2/2}.$$

因此从 (U_1,U_2) 到 (X_1,X_2) 的雅可比行列式绝对值为

$$\left|\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(U_1,U_2)}\right|=\left|\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(R,\Theta)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(R,\Theta)}{\partial(U_1,U_2)}\right|=\left(Re^{-R^2/2}\right)\cdot\frac{1}{R}=e^{-(U_1^2+U_2^2)/2}.$$

于是，$\boldsymbol{U}$ 的联合密度为

$$g(u_1,u_2)=f\big(x_1(u_1,u_2),x_2(u_1,u_2)\big)\cdot e^{-(u_1^2+u_2^2)/2}.$$

由于 $f(x_1,x_2)=1/(2\pi)$ 在定义域内，且变换后 (u_1,u_2) 可取遍整个 $\mathbb{R}^2$，故

$$g(u_1,u_2)=\frac{1}{2\pi}\,e^{-(u_1^2+u_2^2)/2},\qquad (u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2.$$

即 $\boldsymbol{U}$ 服从标准二元正态分布 $N_2(\mathbf{0},I_2)$。

4. [2 分] 设 $\boldsymbol{X}\sim N_p(\boldsymbol{\mu},\,\varSigma)$，其概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{x})=|2\pi\varSigma|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\varSigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}. \tag{1.6}$$

若 $\mathcal{A}$ 为 $p\times p$ 的非奇异矩阵，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^p$ 为常数向量. 证明:

$$\boldsymbol{Y}=\mathcal{A}\,\boldsymbol{X}+\boldsymbol{c}\sim N_p\left(\mathcal{A}\,\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c},\,\mathcal{A}\,\varSigma\mathcal{A}^{\mathrm{T}}\right). \tag{1.7}$$

【证明】 由于 $\mathcal{A}$ 非奇异，变换 $\boldsymbol{y}=\mathcal{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$ 是一一映射，其逆变换为 $\boldsymbol{x}=\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})$。雅可比行列式的绝对值为

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{y}}\right|=|\det(\mathcal{A}^{-1})|=|\det(\mathcal{A})|^{-1}.$$

因此 $\boldsymbol{Y}$ 的密度函数为

$$g(\boldsymbol{y})=f\big(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})\big)\cdot|\det(\mathcal{A})|^{-1}.$$

代入 f 的表达式:

$$g(\boldsymbol{y})=|2\pi\Sigma|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\big(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{\mu}\big)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\big(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{\mu}\big)\right\}\cdot|\det(\mathcal{A})|^{-1}.$$

将指数中的括号合并:

$$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{\mu}=\mathcal{A}^{-1}\big(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c}-\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}\big)=\mathcal{A}^{-1}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big).$$

于是二次型成为

$$\big(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{\mu}\big)^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\big(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{\mu}\big)=\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big)^{\mathsf{T}}(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathcal{A}^{-1}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big).$$

注意到

$$(\mathcal{A}^{-1})^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathcal{A}^{-1}=(\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}})^{-1},$$

因为 $(\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\mathcal{A}^{\mathsf{T}})^{-1}\Sigma^{-1}\mathcal{A}^{-1}$。所以指数部分变为

$$-\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big)^{\mathsf{T}}(\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}})^{-1}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big).$$

常数因子部分：

$$|2\pi\Sigma|^{-1/2}\cdot|\det(\mathcal{A})|^{-1} = \big((2\pi)^p|\Sigma|\big)^{-1/2}|\det(\mathcal{A})|^{-1} = \big((2\pi)^p|\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}|\big)^{-1/2},$$

因为 $|\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}| = |\mathcal{A}|\cdot|\Sigma|\cdot|\mathcal{A}^{\mathsf{T}}| = |\mathcal{A}|^2|\Sigma|$，所以 $|\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}|^{1/2} = |\det(\mathcal{A})|\cdot|\Sigma|^{1/2}$，从而

$$|\det(\mathcal{A})|^{-1}|\Sigma|^{-1/2} = |\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}|^{-1/2}.$$

因此

$$g(\boldsymbol{y}) = |2\pi\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big)^{\mathsf{T}}(\mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}})^{-1}\big(\boldsymbol{y}-(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c})\big)\right\},$$

这正是 $N_p\big(\mathcal{A}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{c},\ \mathcal{A}\Sigma\mathcal{A}^{\mathsf{T}}\big)$ 的密度函数。□

5. 考虑矩不存在的 Cauchy 分布，从而中心极限定理 (CLT) 无法应用.

   (a) [2 分] 取三个不同的样本容量 n，对来自 Cauchy 分布总体的样本均值 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 进行模拟，作直方图以及相应的核密度曲线图. **提示：** Cauchy 分布可以通过 rcauchy(n, location = 0, scale = 1) 进行模拟.

   【解】 样本容量取 $n = 5,\ 30,\ 100$，重复次数 $N_{\text{sim}} = 5000$。

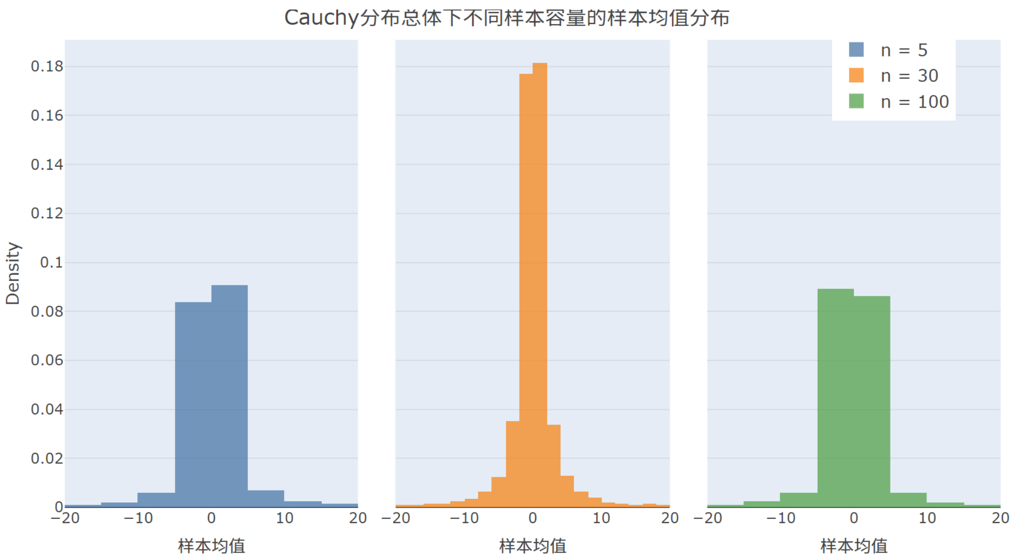

图 1.1: 直方图

```
library(plotly)
```

```r
set.seed(123)

n_values <- c(5, 30, 100)
B <- 5000

mean_1 <- replicate(B, mean(rcauchy(n_values[1], 0, 1)))
mean_2 <- replicate(B, mean(rcauchy(n_values[2], 0, 1)))
mean_3 <- replicate(B, mean(rcauchy(n_values[3], 0, 1)))

fig1 <- plot_ly(
  x = mean_1,
  type = "histogram",
  histnorm = "probability density",
  name = "n = 5",
  marker = list(color = "#4C78A8"),
  opacity = 0.75
)

fig2 <- plot_ly(
  x = mean_2,
  type = "histogram",
  histnorm = "probability density",
  name = "n = 30",
  marker = list(color = "#F58518"),
  opacity = 0.75
)

fig3 <- plot_ly(
  x = mean_3,
  type = "histogram",
  histnorm = "probability density",
  name = "n = 100",
  marker = list(color = "#54A24B"),
  opacity = 0.75
)

subplot(
```

```
    fig1, fig2, fig3,
    nrows = 1,
    shareY = TRUE
  ) %>%
    layout(
      title = "Cauchy分布总体下不同样本容量的样本均值分布",

      plot_bgcolor = '#e5ecf6',

      xaxis = list(title = "样本均值", range = c(-20,20)),
      xaxis2 = list(title = "样本均值", range = c(-20,20)),
      xaxis3 = list(title = "样本均值", range = c(-20,20)),

      yaxis = list(title = "Density"),

      legend = list(
        x = 0.82,
        y = 1.02,
        font = list(size = 14)
      )
    )
```

(b) [2 分] 当 $n \to \infty$ 时，你预期会出现什么情况?.

【解】预期依然是个 Cauchy 分布，依然有尖峰和厚尾，不服从中心极限定理，也不收敛