《多元统计分析》课后作业

姓名：李倩倩

学号：2024017349

班级：统计 24-1 班

中国石油大学（北京）克拉玛依校区文理学院数学与统计系

Friday 3rd April, 2026

作业要求

1. 可以和其他同学讨论作业当中的问题，但应当自己独立完成作业
2. 计算、证明等要有过程，要有主要步骤的说明
3. 请将计算、绘图所用的 R 代码以及生成的结果和图像一并添加在作业文件当中
4. 请使用 LaTeX编辑并生成 PDF 格式的文件，第X周作业文件命名方式：学号-姓名-X.pdf
5. 评分标准：每一问得分 $\in \{2, 1, 0\}$
   - 2: 按时完成并上交作业，且答案基本正确
   - 1: 按时完成并上交作业，且答案部分正确
   - 0: 答案完全错误，或者迟交作业(规定时间72小时之后)
6. 请将完成的 PDF 格式的作业文件发送至邮箱：xiaolei@cup.edu.cn
7. 每位同学可以有一次迟交作业的机会，但不得晚于规定时间三日之后
8. 第2周作业截止时间：2026年3月27日24:00

目录

Chapter 1

第 3 周作业

第 3 周作业完成时间： Friday 3rd April, 2026 20:39

1. 设 $\boldsymbol{X}=(X_1\,,\,X_2)^{\mathrm{T}}$ 是二维随机向量，且

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\,,\quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

(a) [2 分] 定义 $Y=X_1+X_2$，则 Y 是 $\boldsymbol{X}$ 的一个线性变换，写出变换矩阵 $\mathcal{A}$.

【解】 由于 $Y=X_1+X_2=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$，故变换矩阵为

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}.$$

(b) [2 分] 计算 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$.

【解】 由协方差矩阵的线性变换性质，

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)=\mathcal{A}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})\,\mathcal{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=1\cdot1+1\cdot2=3.$$

因此 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)=3$.

2. [2 分] 设 $\boldsymbol{X}=(X_1\,,\,X_2)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度函数为

$$f\,(x_1\,,\,x_2)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}\,, & x_1>0\,,\,x_2>0\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}\tag{1.1}$$

令 $U_1=X_1+X_2$，$U_2=X_1-X_2$，求 $\boldsymbol{U}=(U_1\,,\,U_2)^{\mathrm{T}}$ 的联合概率密度函数.

【解】 由

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2, \\ u_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

反解出 x_1, x_2：

$$x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \qquad x_2 = \frac{u_1 - u_2}{2}.$$

计算雅可比行列式的绝对值：

$$J = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

原密度非零区域为 $x_1 > 0,\ x_2 > 0$，即

$$\frac{u_1 + u_2}{2} > 0 \quad 且 \quad \frac{u_1 - u_2}{2} > 0,$$

等价于 $u_1 + u_2 > 0$ 且 $u_1 - u_2 > 0$，亦即 $u_1 > |u_2|$。同时由 $u_1 = x_1 + x_2 > 0$ 自动满足。因此变换后 (u_1, u_2) 的定义域为 $\{(u_1, u_2) \mid u_1 > 0,\ -u_1 < u_2 < u_1\}$。

联合密度函数为

$$f_U(u_1, u_2) = f_X\left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{u_1 - u_2}{2}\right) \cdot |J| = \mathrm{e}^{-\left(\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_1-u_2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-u_1} \cdot \frac{1}{2},$$

在定义域内成立；否则为 0。故

$$f_U(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u_1}, & u_1 > 0,\ |u_2| < u_1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

3. 假设

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} k\,(x_1 + x_2 x_3), & 0 < x_1, x_2, x_3 < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases} \tag{1.2}$$

(a) [2 分] 确定 k 的值，使得 f 是 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^{\mathrm{T}}$ 的概率密度函数.

【解】 由归一性：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = 1.$$

计算积分：

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x_1 + x_2x_3)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int_0^1\int_0^1\left[\frac{1}{2}x_1^2 + x_2x_3x_1\right]_{x_1=0}^1 \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2} + x_2x_3\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3.$$

$$= \int_0^1\left[\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2^2x_3\right]_{x_2=0}^1 \mathrm{d}x_3 = \int_0^1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3\right)\mathrm{d}x_3 = \left[\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

故 $k \cdot \frac{3}{4} = 1$，解得

$$k = \frac{4}{3}.$$

(b) [2 分] 计算 $\Sigma_{\boldsymbol{X}} = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})$.

【解】 先计算各一阶矩。由于密度为 $\frac{4}{3}(x_1 + x_2x_3)$ 在单位立方体上，积分可分解。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1] &= \frac{4}{3}\iiint x_1(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\Big(\int_0^1 x_1^2\mathrm{d}x_1 + \int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1 \int_0^1 x_2\mathrm{d}x_2 \int_0^1 x_3\mathrm{d}x_3\Big) \\ &= \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{11}{24} = \frac{11}{18}.\end{aligned}$$

由对称性（x_2与x_3对称）：

$$\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = \frac{4}{3}\iiint x_2(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{9}.$$

二阶矩：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2] &= \frac{4}{3}\iiint x_1^2(x_1+x_2x_3) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}, \\ \mathbb{E}[X_2^2] &= \frac{4}{3}\iiint x_2^2(x_1+x_2x_3) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{24} = \frac{7}{18}, \\ \mathbb{E}[X_1X_2] &= \frac{4}{3}\iiint x_1x_2(x_1+x_2x_3) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}[X_2X_3] &= \frac{4}{3}\iiint x_2x_3(x_1+x_2x_3) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\Big) = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\Big) = \frac{4}{3}\cdot\frac{17}{72} = \frac{17}{54}.\end{aligned}$$

由对称性，$\mathbb{E}[X_1X_3] = \mathbb{E}[X_1X_2] = \frac{1}{3}$，$\mathbb{E}[X_3^2] = \frac{7}{18}$。

计算方差与协方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_1) &= \frac{4}{9} - \Big(\frac{11}{18}\Big)^2 = \frac{4}{9} - \frac{121}{324} = \frac{144-121}{324} = \frac{23}{324}, \\ \mathrm{Var}(X_2) &= \frac{7}{18} - \Big(\frac{5}{9}\Big)^2 = \frac{7}{18} - \frac{25}{81} = \frac{63}{162} - \frac{50}{162} = \frac{13}{162}, \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \frac{1}{3} - \frac{11}{18}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3} - \frac{55}{162} = \frac{54-55}{162} = -\frac{1}{162}, \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_3) &= \frac{17}{54} - \Big(\frac{5}{9}\Big)^2 = \frac{17}{54} - \frac{25}{81} = \frac{51}{162} - \frac{50}{162} = \frac{1}{162}.\end{aligned}$$

由对称性，$\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = -\frac{1}{162}$，$\mathrm{Var}(X_3) = \frac{13}{162}$。

因此协方差矩阵为

$$\Sigma_{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \frac{23}{324} & -\frac{1}{162} & -\frac{1}{162} \\ -\frac{1}{162} & \frac{13}{162} & \frac{1}{162} \\ -\frac{1}{162} & \frac{1}{162} & \frac{13}{162} \end{pmatrix} = \frac{1}{324}\begin{pmatrix} 23 & -2 & -2 \\ -2 & 26 & 2 \\ -2 & 2 & 26 \end{pmatrix}.$$

(c) [2 分] 给定 $X_1 = x_1$ 时，计算 (X_2, X_3) 的条件协方差矩阵.

【解】 先求 X_1 的边缘密度：

$$f_{X_1}(x_1)=\int_0^1\int_0^1\frac{4}{3}(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\frac{4}{3}\Big(x_1+\frac{1}{4}\Big)=\frac{4x_1+1}{3},\qquad 0<x_1<1.$$

条件密度为

$$f(x_2,x_3\mid x_1)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_1}(x_1)}=\frac{\frac{4}{3}(x_1+x_2x_3)}{(4x_1+1)/3}=\frac{4(x_1+x_2x_3)}{4x_1+1},\quad 0<x_2,x_3<1.$$

记 $c=\frac{4}{4x_1+1}$，则条件密度为 $c(x_1+x_2x_3)$。

计算条件期望：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_2\mid x_1]&=c\int_0^1\int_0^1 x_2(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=c\Big(x_1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\Big)=c\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big),\\
\mathbb{E}[X_3\mid x_1]&=c\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big)\quad(\text{对称}),\\
\mathbb{E}[X_2^2\mid x_1]&=c\int_0^1\int_0^1 x_2^2(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=c\Big(x_1\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\Big)=c\Big(\frac{x_1}{3}+\frac{1}{8}\Big),\\
\mathbb{E}[X_2X_3\mid x_1]&=c\int_0^1\int_0^1 x_2x_3(x_1+x_2x_3)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=c\Big(x_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\Big)=c\Big(\frac{x_1}{4}+\frac{1}{9}\Big).
\end{aligned}$$

于是条件方差：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_2\mid x_1)&=\mathbb{E}[X_2^2\mid x_1]-\big(\mathbb{E}[X_2\mid x_1]\big)^2=c\Big(\frac{x_1}{3}+\frac{1}{8}\Big)-c^2\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big)^2,\\
\mathrm{Var}(X_3\mid x_1)&=\text{相同},\\
\mathrm{Cov}(X_2,X_3\mid x_1)&=\mathbb{E}[X_2X_3\mid x_1]-\mathbb{E}[X_2\mid x_1]\mathbb{E}[X_3\mid x_1]\\
&=c\Big(\frac{x_1}{4}+\frac{1}{9}\Big)-c^2\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big)^2.
\end{aligned}$$

其中 $c=\dfrac{4}{4x_1+1}$。故条件协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X_2\mid x_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_3\mid x_1)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_3\mid x_1) & \mathrm{Var}(X_3\mid x_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix},$$

其中

$$A=\frac{4}{4x_1+1}\Big(\frac{x_1}{3}+\frac{1}{8}\Big)-\frac{16}{(4x_1+1)^2}\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big)^2,\qquad B=\frac{4}{4x_1+1}\Big(\frac{x_1}{4}+\frac{1}{9}\Big)-\frac{16}{(4x_1+1)^2}\Big(\frac{x_1}{2}+\frac{1}{6}\Big)^2.$$

4. 设有概率密度函数

$$f\,(x_1\,,\,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x_1}\,, & x_1>|x_2|\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}\tag{1.3}$$

(a) [2 分] 计算 $\mathbb{E}(\boldsymbol{X})$ 与 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X})$.

【解】 先求边缘密度。对 x_1 积分：

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{|x_2|}^{\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_1}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_2|}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

对 x_2 积分：

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-x_1}^{x_1} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_1}\,\mathrm{d}x_2 = x_1\mathrm{e}^{-x_1}, \quad x_1 > 0.$$

于是 $X_1 \sim \mathrm{Gamma}(2,1)$，故 $\mathbb{E}(X_1) = 2$，$\mathrm{Var}(X_1) = 2$。 X_2 服从 Laplace 分布，密度 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_2|}$，其均值为 0，方差为 2。协方差：

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \iint_{x_1>|x_2|} x_1x_2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_1}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = 0,$$

因为被积函数关于 x_2 为奇函数且区域对称。故 $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$。因此

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) [2 分] 计算 $\mathbb{E}\,(X_1\,|X_2\,)$ 与 $\mathbb{E}\,(X_2\,|X_1\,)$.

【解】 给定 $X_2 = x_2$，条件密度为

$$f_{X_1|X_2}(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_1}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_2|}} = \mathrm{e}^{-(x_1-|x_2|)}, \quad x_1 > |x_2|.$$

即 $X_1 = |x_2| + Y$，$Y \sim \mathrm{Exp}(1)$，故

$$\mathbb{E}(X_1 \mid X_2 = x_2) = |x_2| + 1.$$

给定 $X_1 = x_1$，条件密度为

$$f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_1}}{x_1\mathrm{e}^{-x_1}} = \frac{1}{2x_1}, \quad |x_2| < x_1,$$

即 X_2 在 $(-x_1, x_1)$ 上均匀分布，因此

$$\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = 0.$$

故

$$\mathbb{E}(X_1 \mid X_2) = |X_2| + 1, \qquad \mathbb{E}(X_2 \mid X_1) = 0.$$

(c) [2 分] 计算 $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_1\,|X_2\,)$ 与 $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(X_2\,|X_1\,)$.

【解】 由上述分布：

$$\mathrm{Var}(X_1 \mid X_2 = x_2) = \mathrm{Var}(Y) = 1, \quad \text{故 } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 \mid X_2) = 1.$$

均匀分布的方差：

$$\mathrm{Var}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \frac{(2x_1)^2}{12} = \frac{x_1^2}{3}, \quad \text{故 } \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_2 \mid X_1) = \frac{X_1^2}{3}.$$

5. 设有概率密度函数

$$f\left(x_1\,,\,x_2\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} x_1^{-\frac{1}{2}}\,, & 0 < x_1 < x_2 < 1 \\ 0\,, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.4}$$

(a) [2 分] 计算 $\mathbb{P}\left(X_1 < 0.25\right)$.

【解】

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 < 0.25) &= \int_{x_1=0}^{0.25} \int_{x_2=x_1}^{1} \frac{3}{4} x_1^{-1/2}\,\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^{0.25} \frac{3}{4} x_1^{-1/2} (1 - x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{3}{4} \left(\int_0^{0.25} x_1^{-1/2}\,\mathrm{d}x_1 - \int_0^{0.25} x_1^{1/2}\,\mathrm{d}x_1 \right) \\
&= \frac{3}{4} \left(\left[2x_1^{1/2}\right]_0^{0.25} - \left[\frac{2}{3} x_1^{3/2}\right]_0^{0.25} \right) \\
&= \frac{3}{4} \left(2 \cdot 0.5 - \frac{2}{3} \cdot (0.5)^3 \right) \quad (\text{因为 } 0.25^{1/2} = 0.5,\ 0.25^{3/2} = 0.125) \\
&= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot 0.125 \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{0.25}{3} \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{16}.
\end{aligned}$$

故 $\mathbb{P}(X_1 < 0.25) = \frac{11}{16}$.

(b) [2 分] 计算 $\mathbb{P}\left(X_2 < 0.25\right)$.

【解】 注意定义域要求 $x_1 < x_2$，且 $x_2 < 0.25$，则 x_1 从 0 到 x_2：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 < 0.25) &= \int_{x_2=0}^{0.25} \int_{x_1=0}^{x_2} \frac{3}{4} x_1^{-1/2}\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^{0.25} \frac{3}{4} \left[2x_1^{1/2}\right]_0^{x_2} \mathrm{d}x_2 = \int_0^{0.25} \frac{3}{4} \cdot 2x_2^{1/2}\,\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{0.25} x_2^{1/2}\,\mathrm{d}x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[x_2^{3/2}\right]_0^{0.25} = (0.25)^{3/2} = 0.125 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

故 $\mathbb{P}(X_2 < 0.25) = \frac{1}{8}$.

(c) [2 分] 计算 $\mathbb{P}\left(X_2 < 0.25 \,|\, X_1 < 0.25\right)$.

【解】 条件概率为

$$\mathbb{P}(X_2 < 0.25 \mid X_1 < 0.25) = \frac{\mathbb{P}(X_2 < 0.25,\ X_1 < 0.25)}{\mathbb{P}(X_1 < 0.25)}.$$

分子为区域 $\{0 < x_1 < 0.25,\ x_1 < x_2 < 0.25\}$ 上的积分：

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 < 0.25,\ X_1 < 0.25) &= \int_{x_1=0}^{0.25}\int_{x_2=x_1}^{0.25} \frac{3}{4}x_1^{-1/2}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^{0.25} \frac{3}{4}x_1^{-1/2}(0.25 - x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{3}{4}\left(0.25\int_0^{0.25} x_1^{-1/2}\mathrm{d}x_1 - \int_0^{0.25} x_1^{1/2}\mathrm{d}x_1\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(0.25\cdot 2\cdot 0.5 - \frac{2}{3}(0.25)^{3/2}\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(0.25 - \frac{2}{3}\cdot 0.125\right) = \frac{3}{4}\left(0.25 - \frac{0.25}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{0.5}{3} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

分母为 $\frac{11}{16}$，因此

$$\mathbb{P}(X_2 < 0.25 \mid X_1 < 0.25) = \frac{1/8}{11/16} = \frac{1}{8}\cdot\frac{16}{11} = \frac{2}{11}.$$

6. 设 $\boldsymbol{X} \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，其中

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

(a) [2 分] 当 $a = 0, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 1$ 时，分别作 $\boldsymbol{X}$ 的密度曲面的等值线椭圆的图形. 注意：要给出代码以及对应的图形！

【解】 使用 ellipse 包生成椭圆上的点。等值线椭圆方程：

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) = \chi_2^2(0.5) \quad (\text{或固定半径})$$

为展示形状，选取 $c = \chi_2^2(0.5) \approx 1.386$。代码如下：

```
    library(ellipse)
mu <- c(1, 2)
a_vals <- c(0, -0.5, 0.5, 1)
par(mfrow = c(2,2), mar = c(4,4,2,1))
for (a in a_vals) {
  Sigma <- matrix(c(2, a, a, 2), nrow = 2)

  radius <- sqrt(qchisq(0.5, 2))
  ell_pts <- ellipse::ellipse(x = Sigma, centre = mu, level = 0.5)
  plot(ell_pts, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
       xlim = c(-2,4), ylim = c(-1,5), asp = 1,
       main = paste("a =", a), xlab = "x1", ylab = "x2")
  points(mu[1], mu[2], pch = 19, col = "red")
}
```

运行后得到四个子图：

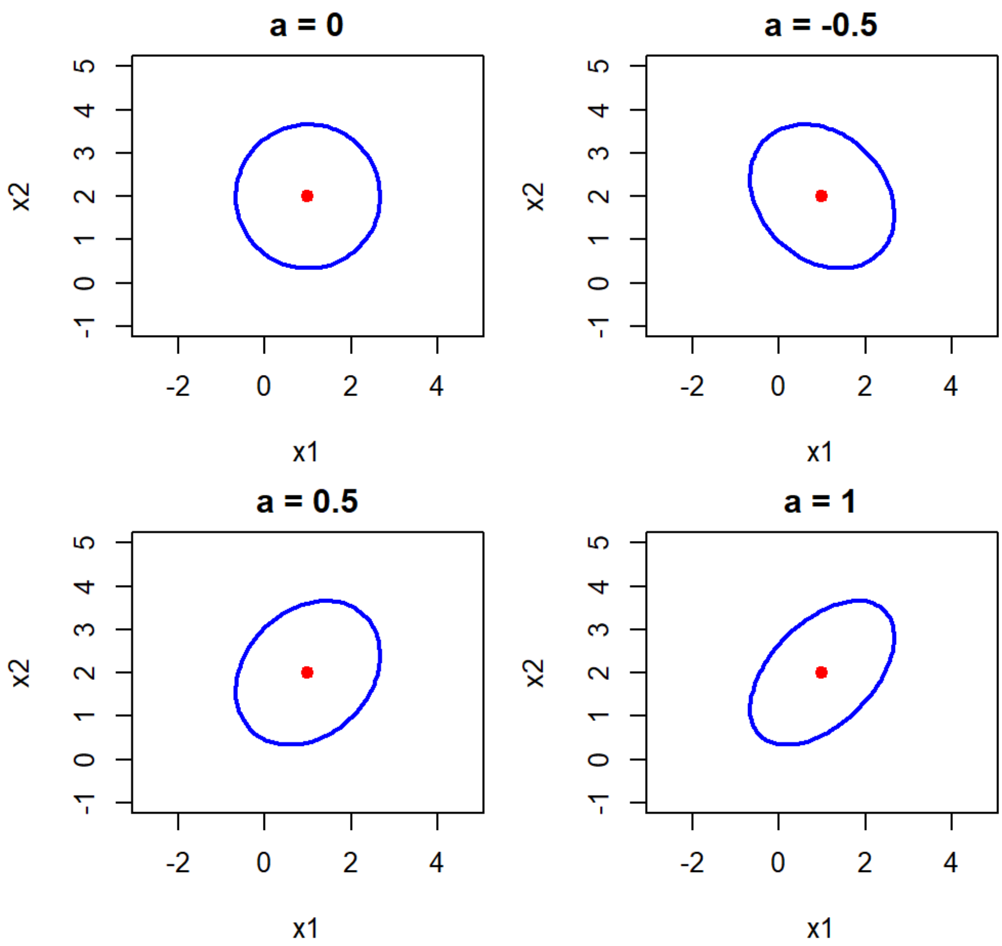

图 1.1: a取不同值时$\boldsymbol{X}$ 的密度曲面的等值线椭圆

- $a = 0$：正圆（独立同方差）。
- $a = 0.5$：椭圆长轴沿 $x_1 = x_2$ 方向（正相关）。
- $a = -0.5$：椭圆长轴沿 $x_1 = -x_2$ 方向（负相关）。
- $a = 1$：椭圆最扁长（接近退化）。

(b) [2 分] 对 $a = \frac{1}{2}$，确定以$\boldsymbol{\mu}$ 为中心的 $\boldsymbol{X}$ 的区域，该区域以 0.90 的概率覆盖真实参数 $\boldsymbol{\mu}$，画出该区域的图形.

【解】 对于 $a = 1/2$，$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{pmatrix}$。90% 概率区域为

$$\{\boldsymbol{x} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \le \chi_2^2(0.9)\},$$

其中 $\chi_2^2(0.9) \approx 4.60517$。使用 ellipse 包绘制：

```
library(ellipse)
mu <- c(1, 2)
a <- 0.5
Sigma <- matrix(c(2, a, a, 2), nrow = 2)
ell_pts <- ellipse::ellipse(x = Sigma, centre = mu, level = 0.9)
plot(ell_pts, type = "l", col = "blue", lwd = 2,
     xlim = c(-2,4), ylim = c(-1,5), asp = 1,
     main = "90% Probability Ellipse (a=0.5) ",
     xlab = "x1", ylab = "x2")
points(mu[1], mu[2], pch = 19, col = "red")
```

图形为一个中心在 $(1, 2)$ 的椭圆，覆盖了 $\boldsymbol{X}$ 的 90% 可能取值。

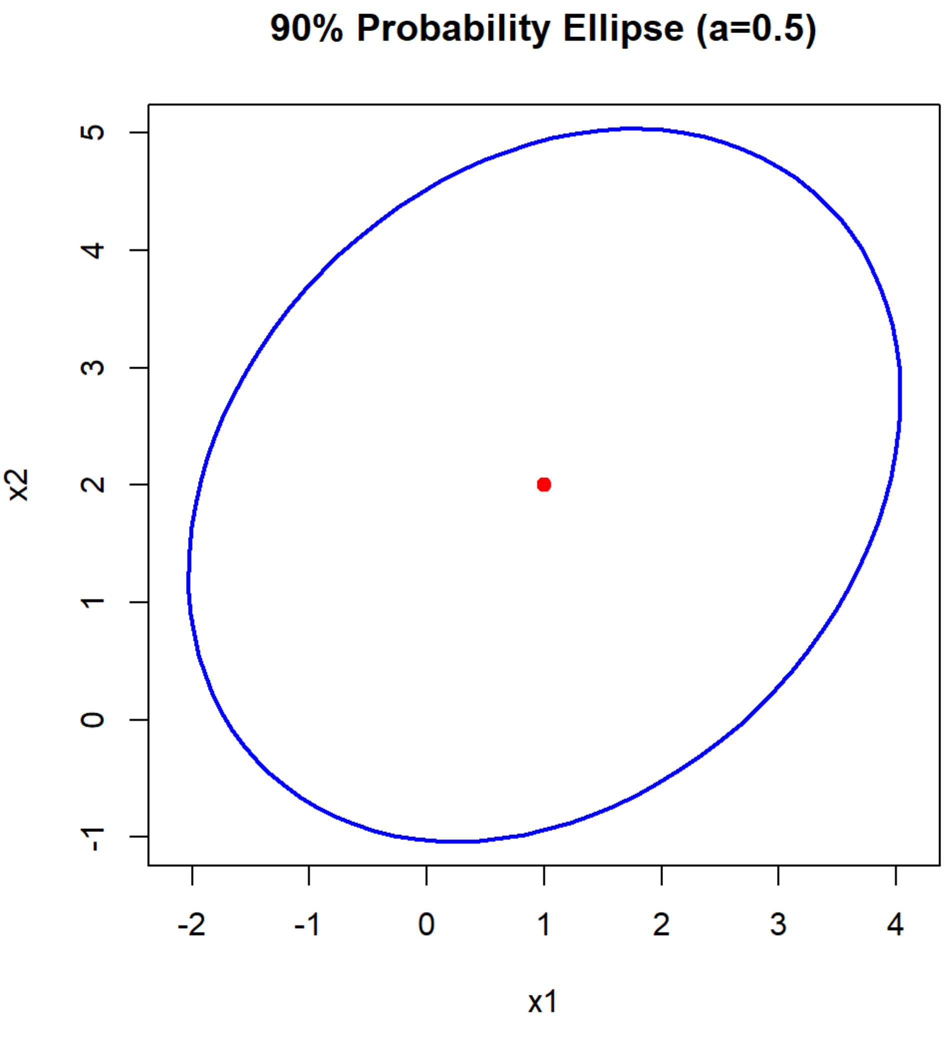

图 1.2: 0.90 Probability Ellipse (a=0.5)

7. 设有概率密度函数

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{8x_2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x_1}{2x_2}+\frac{x_2}{4}\right)}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.6}$$

(a) [2 分] 计算 $f_{X_2}(x_2)$.

【解】 对 x_1 积分：

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{8x_2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x_1}{2x_2}+\frac{x_2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{8x_2}\,\mathrm{e}^{-x_2/4}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x_1/(2x_2)}\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{8x_2}\,\mathrm{e}^{-x_2/4}\cdot 2x_2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x_2/4}, \quad x_2 > 0. \end{aligned}$$

故 $X_2 \sim \mathrm{Exp}(1/4)$，即 $f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x_2/4}$.

(b) [2 分] 计算 $f(x_1 | x_2)$.

【解】 由条件密度公式：

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\frac{1}{8x_2}\mathrm{e}^{-(x_1/(2x_2)+x_2/4)}}{\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x_2/4}} = \frac{1}{2x_2}\,\mathrm{e}^{-x_1/(2x_2)}, \quad x_1 > 0.$$

即 $X_1 \mid X_2 = x_2 \sim \mathrm{Exp}(1/(2x_2))$，均值为 $2x_2$.

(c) [2 分] 给出利用 X_2 的一个函数对 X_1 的最佳逼近.

【解】 最佳逼近为条件期望 $\mathbb{E}(X_1 \mid X_2)$。由指数分布均值：

$$\mathbb{E}(X_1 \mid X_2) = 2X_2.$$

(d) [2 分] 计算最佳逼近的误差的方差.

【解】 误差方差为条件方差 $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 \mid X_2)$。指数分布方差等于均值的平方：

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 \mid X_2) = (2X_2)^2 = 4X_2^2.$$