第一节　可测函数及其性质

$+\infty$ 是全体有限实数的上确界，$-\infty$ 是全体有限实数的下确界：$-\infty < a < +\infty$(a 为任何有限实数)．关于含 $\pm\infty$ 的实数运算作如下规定：对于任何有限实数 a，$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=\pm\infty$，

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty),\quad \frac{a}{\pm\infty}=0;$$

对任何有限实数 $a>0$，

$a(\pm\infty)=(\pm\infty)$，$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty$；$0\cdot(\pm\infty)=0$.

反之，$(+\infty)+(-\infty), \frac{\pm\infty}{(\pm\infty)}, \frac{a}{0}, \frac{\pm\infty}{0}$，都认为是无意义的．

今后凡提到函数都指定义在$\mathbf{R}^n$ 中某点集上的实函数，且允许它以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为函数值．$\pm\infty$ 也称为非真正的实数，通常的实数则称为有限实数．函数值都是有限实数的函数称为有限函数．

设 $a,b \in \mathbb{R}$. f 是定义在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的实函数, 记 $E[f > a] \triangleq \{x|x \in E, f(x) > a\}$, $E[a < f \leqslant b] \triangleq \{x|x \in E, a < f(x) \leqslant b\}$ 等等.

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的实函数. 如果对于任何有限实数 a, $E[f > a]$ 都是可测集, 则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数.

定理 1设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数, 下列任一条件都是 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件:

(1) 对任何有限实数 a, $E[f \geq a]$ 都可测;

(2) 对任何有限实数 a $E[f < a]$ 都可测;

(3) 对任何有限实数 a, $E[f \leq a]$ 都可测;

(4) 对任何有限实数 a, $b(a < b)$, $E[a \leq f < b]$ 都可测 (但充分性要求 $|f(x)| < \infty$).

推论设 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $E[f=a]$ 总可测, 不论 a 是有限实数 $\pm\infty$.

例 1 区间 $[a,b]$ 上的连续函数及单调函数都是可测函数.

定义 2 定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实函数 $f(x)$ 称为在 $x_0\in E$ 连续, 如果 $y_0=f(x_0)$ 有限, 且对 y_0 的任一邻域 $V(y_0)$, 存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$, 使得 $f(U\bigcap E)\subset V$, 即只要 $x\in E$ 且 $x\in U(x_0)$ 时, 便有 $f(x)\in V(y_0)$. 若 $f(x)$ 在 E 中每点都连续, 则称 $f(x)$ 在 E 上连续.

定理 2 可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数是可测函数.

存在不可测函数. 例如取 $[0,1]$ 中不可测集 E, 定义

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\in[0,1]\setminus E\end{cases},$$

则 $f(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的可测函数.

定理 3 (1) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 而 $E_1 \subset E$ 为 E 的可测子集, 则 $f(x)$ 看作定义在 E_1 上的函数时, 它是 E_1 上的可测函数;

(2) 设 $f(x)$ 定义在有限个可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的并集 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{s} E_i$ 上, 且 $f(x)$ 在每个 E_i 上都可测, 则 $f(x)$ 在 E 上也可测.

证明 (1) 对于任何有限数 a, $E_1[f>a]=E_1\bigcap E[f>a]$. 由假设等式右边是可测集.

(2)E 是可测集而且对于任何有限数 a, 有

$$E[f>a]=\bigcup_{i=1}^{s} E_i[f>a].$$

由假设等式右边也是可测集. 证毕. ■

引理 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 E 上的可测函数, 则 $E[f > g]$ 与 $E[f \geq g]$ 都是可测集.

定理 4设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测, 则下列函数皆在 E 上可测:

(1). $f(x) + g(x)$; (2)$|f(x)|$; (3)$\frac{1}{f(x)}$; (4)$f(x) \cdot g(x)$.

定理 5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列 (或有限个) 可测函数, 则

$$\mu(x) = \inf_n f_n(x), \ \lambda(x) = \sup_n f_n(x)$$ 都在 E 上可测.

定理 6. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上一列可测函数, 则

$$F(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x), \ G(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$$ 在 E 上可测.

当 $f(x) = \lim_n f_n(x)$ 存在时, 也在 E 上可测.

设 $f(x)$ 是定义在 E 上的实函数．令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x), & 当 f(x)\geqslant 0, \\ 0, & 当 f(x)\leqslant 0. \end{cases}$$

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\begin{cases} -f(x), & 当 f(x)\leqslant 0, \\ 0, & 当 f(x)\geqslant 0. \end{cases}$$

则 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 都是 E 上非负函数, 分别称为 $f(x)$ 的正部和负部.

由定义, 有 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$, $|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$.

进而知 $f(x)$ 是 E 上可测函数当且仅当 $f^+(x), f^-(x)$ 是 E 上可测函数.

定义 3 设 $f(x)$ 的定义域 E 分为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_s$ 的并，即 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{s} E_i$, 如果 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某常数 c_i, 则称 $f(x)$ 为简单函数．通常 f 可表示为 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$. 其中

$$\chi_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i \\ 0, & x \notin E_i \end{cases}$$

为 E_i 的特征函数.

例如, 在区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, \ x\text{为有理数}; \\ 0, \ x\text{为无理数} \end{cases}$$

便是一简单函数．因此 Dirichlet 函数是可测的非连续函数.

由于简单函数都是可测函数，因此由定理 6 的推论 7 可知：E 上一列简单函数 $\varphi_n(x)$ 的极限函数 $f(x) = \lim_n \varphi_n(x)$ 也是 E 上的可测函数．反之有

定理 7. (可测函数与简单函数的关系)

(1) 设 $f(x)$ 在 E 上非负可测，则存在一列非负简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足 $\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x)$，且 $f(x) = \lim_n \varphi_n(x)$；

(2) 设 $f(x)$ 在 E 上可测，则存在一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$，使得对任意的 $x \in E, f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. 若 f 在 E 上有界，则上述收敛可以是一致的.

结论： 函数 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是 $f(x)$ 总可表示为一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 的极限函数，其中 $|\varphi_1(x)| \leqslant |\varphi_2(x)| \leqslant \cdots$.

定义 4 设 π 是一个与集合 E 的点 x 有关的命题，若存在 E 的子集 M，适合 $mM=0$，使得 π 在 $E-M$ 上恒成立，也即 $E\setminus E[\pi$ 成立$]$ 是零测度集，则我们称 π 在 E 上几乎处处成立，或说 π 于 Ea.e. 成立.

例 2 $|\tan(x)|<\infty$ a.e. 于 $\mathbf{R}$；$[0,1]$ 上的狄利克雷函数 $D(x)=0$ a.e. 于 $[0,1]$.

注记： 若 π_1 a.e. 于 E 且 π_2 a.e. 于 E，则 π_1 且 π_2 a.e. 于 E.

例 3 设 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E，且 $g(x)=h(x)$ a.e. 于 E，则 $f(x)=h(x)$ a.e. 于 E.

作业

P65 习题 1，2，3，4