

第五节 康托尔三分集

例 (康托尔集) 先给出康托尔集的构造:

区间 $[0, 1]$ 三等分, 去掉中间的开区间 $I_1^{(1)} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; 将剩下两个闭区间 $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ 分别再三等分. 再去掉中间的两个开区间 $I_1^{(2)} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^{(2)} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; 如此一直下去, 当三等分进行到第 n 次时, 一共去掉 2^{n-1} 个开区间 $I_1^{(n)} = (\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n})$, $I_2^{(n)} = (\frac{7}{3^n}, \frac{8}{3^n})$, \dots , $I_{2^{n-1}}^{(n)} = (\frac{3^n-2}{3^n}, \frac{3^n-1}{3^n})$; 剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间, 而在第 $n+1$ 次时, 再将这 2^n 个闭区间各三等分, 并去掉中间的一个开区间, 如此继续下去, 就从 $[0, 1]$ 去掉了可数个互不相交 (而且没有公共端点) 的开区间. 因此由 §4 定理 2, 剩下的必是一个闭集 (它至少包含各邻接区间的端点及其聚点), 称之为康托尔集, 记为 P . 于是

$$P = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^{(n)}.$$

让我们来考察这个闭集 P 的性质.

1. P 是完备集.

由于 P 的邻接区间的作法, 它们任何两个之间根本不存在一公共端点, 因此 P 是完备集.

2. P 没有内点.

事实上, 在 P 的作法中讲过, "去掉" 手续进行到第 n 次为止时, 剩下 2^n 个长度是 3^{-n} 的互相隔离的闭区间, 因此任何一点 $x \in P$ 必含在这 2^n 个闭区间的某一个里面. 从而在 x_0 的任一邻域 $U(x_0, 3^{-n})$ 内至少有一点不属于 P , 但 $3^{-n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故 x_0 不可能是 P 的内点.

定义 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果具有以下性质: 空间任一邻域内至少包含某点的一个邻域, 其中不含 E 的点, 则称 E 为 **疏朗集合**, 或**无处稠密集合**

E 是疏朗集合的特征是 \bar{E} 没有内点. 因此 P 是一个疏朗集合.

3. P 的测度为 0.

由于 $[0, 1] \setminus P$ 是可数个互不相交的开区间, 第 n 次去掉的 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 区间, 因此 $[0, 1] \setminus P$ 中互不相交的开区间的长度之和为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$, 若 P 有长度, 其长度只能为 0. 在下一章, 我们将定义非区间的点集的长度为测度, 因此 P 的测度为零.

4. P 的基数为 c

若把 $[0, 1]$ 中的数用三进制小数表示, 第一次去掉的区间 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 中每个数的第一位小数都是 1, 第二次去掉的两个区间中的每个数的第二位小数都是 1. 依此类推, 第 n 次去掉的 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间中的数的第 n 位小数是 1, 因此所有每位小数可以仅用 0 或 2 表示的数 (即 P 中的点) 是永远不会去掉的. 定义映射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow P$, 对

$$x \in [0, 1], x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \text{ 令 } \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}. \text{ 其中 } b_n = \begin{cases} 0, & a_n = 0 \\ 2, & a_n = 1 \end{cases} \text{ 由}$$

以上分析 $\varphi(x) \in P$, 且易知 φ 是单射. 因此 $\overline{P} \geq c$. 又 $P \subset [0, 1]$, 又有 $\overline{P} \leq c$, 因此 $\overline{P} = c$.

综上所述, 康托尔三分集是一个测度为零且基数为 c 的疏朗完备集.

作业:

P36 习题 11