第四节　直线上的开集、闭集、完备集的构造

定义 1. 设 G 是直线上的开集．如果开区间 $(\alpha,\beta) \subset G$, 而且端点 α,β 不属于 G，那么称 (α,β) 为 G 的构成区间.

例如，开集 $(0,1)\bigcup(2,3)$ 的构成区间是 (0，1) 以及 (2，3).

定理 1. (开集构造定理) 直线上任一个非空开集可以表示成有限个或可数个互不相交的构成区间的和集．又当非空开集表示成互不相交的开区间的和集时，这些区间必是构成区间.

证明　设 G 是直线上的一个非空开集，分以下几步来论证：

(1) 开集 G 的任何两个不同的构成区间必不相交．否则，设 (α_1,β_1), (α_2,β_2) 是 G 的两个不同的构成区间，但相交．这时必有一个区间的端点在另一个区间内，例如 $\alpha_1 \in (\alpha_2,\beta_2)$, 但 $(\alpha_2,\beta_2) \subset G$, 这和 $\alpha_1 \notin G$ 矛盾．因此不同的构成区间不相交．再由第一章 §4 例 1 题，开集 G 的构成区间全体最多只有可数个.

(2) 开集中任何一点必含在一个构成区间中. 事实上, 任意取 $x_0 \in G$, 记 A_{x_0} 为适合条件 $x_0 \in (\alpha,\beta) \subset G$ 的开区间 (α,β) 全体所成的区间集. 因为 G 是开集, A_{x_0} 不会空. 记 $\alpha_0 = \inf_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}} \alpha, \beta_0 = \sup_{(\alpha,\beta)\in A_{x_0}} \beta$, 作开区间 (α_0,β_0). 显然, $x_0 \in (\alpha_0,\beta_0)$

现在证明 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间. 先证 $(\alpha_0,\beta_0) \subset G$. 任意取 $x' \in (\alpha_0,\beta_0)$, 不妨设 $x' \leqslant x_0$. 由于 α_0 是下确界, 所以必有 $(\alpha,\beta) \in A_{x_0}$, 使 $\alpha_0 < \alpha < x'$, 因此 $x' \in (\alpha, x_0] \subset (\alpha,\beta) \subset G$. 同样, 如果 $x' > x_0$, 也可以证明类似的结果. 因此 $(\alpha_0,\beta_0) \subset G$. 由此顺便得到 $(\alpha_0,\beta_0) \in A$. 再证 $\alpha_0 \notin G$. 如果不对, 那么 $\alpha_0 \in G$, 因为 G 是开集, 必有区间 (α',β'), 使得 $\alpha_0 \in (\alpha',\beta') \subset G$. 这样, $x_0 \in (\alpha',\beta_0) \subset (\alpha',\beta')\bigcup(\alpha_0,\beta_0) \subset G$, 因此, $(\alpha',\beta_0) \in A_{x_0}$, 而 $\alpha' < \alpha_0$, 这就和 α_0 是 A 中的区间左端点的下确界相矛盾. 所以 $\alpha_0 \notin G$. 同样有 $\beta_0 \notin G$. 这就是说 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间.

(3) 作 G 的所有构成区间的和 $\bigcup(\alpha,\beta)$，由 (2) 它应是 G．由 (1)，G 必定是有限个或可数个互不相交的构成区间的和集．用 $(\alpha_\nu\beta_\nu)(\nu = 1,2,\cdots,n$ 或 $\nu = 1,2,\cdots)$ 表示 G 的构成区间，那么 $G = \bigcup(\alpha_\nu,\beta_\nu)$. 定理第一部分证毕.

(4) 设 $G = \bigcup_\nu(\alpha_\nu,\beta_\nu)$ 是一组互不相交的开区间的和集．现在只要证明每个 (α_ν,β_ν) 都是 G 的构成区间．显然，$(\alpha_\nu,\beta_\nu) \subset G$，若它不是构成区间，比方说 $\alpha_\nu \in G$，那么必有 $\mu \neq \nu$ 使得 $\alpha_\nu \in (\alpha_\mu,\beta_\mu)$. 因而 (α_μ,β_μ) 与 (α_ν,β_ν) 相交．这和假设矛盾．所以 $\alpha_\nu \notin G$. 同样 $\beta_\nu \notin G$. 所以 (α_ν,β_ν) 是构成区间.

因此非空开集必然唯一地表示成可数个或有限个互不相交的开区间的和集．■

既然闭集的余集是开集，那么从开集的构造可以引入余区间的概念.

定义 2. 设 A 是直线上的闭集，称 A 的余集 A^c 的构成区间为 A 的余区间或邻接区间.

我们又可以得到闭集的构造如下：

定理 2. 直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可数个互不相交的开区间 (即 F 的余区间) 所得到的集.

由孤立点的定义很容易知道，直线上点集 A 的孤立点必是包含在 A 的余集中的某两个开区间的公共端点. 因此，闭集的孤立点一定是它的两个余区间的公共端点. 完备集是没有孤立点的闭集，所以，完备集就是没有相邻接的余区间的闭集.

$\mathbf{R}^n$ 上的开集的构造

命题 1. $\mathbf{R}^n$ 中任何开集可以分解为至多可列个互不相交的连通分支之并，而且这一分解是唯一的.

命题 2. $\mathbf{R}^n$ 的开集可以分解为一列互不相交的左开右闭的区间的并.

这里所谓左开右闭区间是指 $\mathbf{R}^n$ 中形如

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ a_k < x_k \leqslant b_k, k=1,\cdots,n\}$$

的点集.

定理 3. $\mathbf{R}^n$ 中任意一个开集可以表示为至多可数个开区间的并.

作业:

P36 习题 10, 12, 15