第三节　开集, 闭集, 完备集

在本节中我们着重讨论两类特殊点集--开集和闭集.

定义 1. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果 E 的每一点都是 E 的内点, 则称 E 为开集, 即 $E^o = E$.

例如: (1) 整个空间 $\mathbf{R}^n$ 是开集, 空集也是开集.

(2) 在 $\mathbf{R}$ 中任意开区间 (a, b) 是开集, [0, 1) 不是开集.

(3) 在 $\mathbf{R}^2$ 中 $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 是一开集

但把 (3) 中的 E 放在 $\mathbf{R}^3$ 中来看时, 即看做

$E = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$ 就不再是开集.

定义 2. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果 E 的每一个聚点都属于 E, 则称 E 为闭集, 即

$$\bar{E} = E' \cup \{E\text{的全体孤立点}\} = E.$$

例如: 整个空间 $\mathbf{R}^n$ 是闭集, 空集是闭集.

在 $\mathbf{R}^1$ 中闭区间 [a, b] 是闭集, 但 [0, 2) 不是闭集.

在 $\mathbf{R}^2$ 中 $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le 1\}$ 是闭集.

再如任意的有限集合都是闭集.

开集、闭集利用开核、闭包等术语来说，就是: E 为开集的充要条件是 $E \subset E^o$, 亦即 $E = E^o$; E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$(或 $\partial E \subset E$).

今后开集常用字母 G 表示, 闭集常用字母 F 表示.

定理 1 对任何 $E \subset \mathbf{R}^n$, E^o 是开集, E' 和 $\overline{E}$ 都是闭集 (E^o 称为开核, $\overline{E}$ 称为闭包的理由也在于此).

注 E^o 是包含于 E 的最大开集, $\bar{E}$ 是包含 E 的最小闭集.

证明 要证 E^o 是开集, 只需证每一点 $P \in E^o$ 都是 E^o 的内点, 即证存在邻域 $U(P) \subset E^o$. 由 E^o 的定义存在邻域 $U(P,\delta) \subset E$, 对于任意的 $Q \in U(P,\delta)$ 需证 $Q \in E^o$. 从邻域基本性质 (3) 可知, 有 $U(Q,\delta_1) \subset U(P,\delta) \subset E$, $\delta_1 = \delta - d(P,Q)$. 即 Q 是 E 的内点, 故 $U(P,\delta) \subset E^o$, 所以 P 是 E^o 的内点, 故 E^o 是开集.

其次证明 E' 为闭集. 设 $P_0 \in (E')'$(P_0 是 E' 的聚点), 则由 § 2 定理 1 的 (2), 对任意的 $\delta > 0$, 在邻域 $U(P_0,\delta)$ 内至少含有一个属于 E' 而异于 P_0 的点 P_1. 令 $\delta_1 = \min\{\delta - d(P_0,P_1), d(P_0,P_1)\}$, 则 $U(P_1,\delta_1) \subset U(P_0,\delta)$. 因为 $P_1 \in E'$, 所以 $U(P_1,\delta_1)$ 中含有异于 P_1 的点 $P_2 \in E$, 因此 $P_1 \neq P_2$, $P_2 \neq P_0$, $P_2 \in U(P_1,\delta_1) \subset U(P_0,\delta)$. 再利用 §2 定理 1(2), 即得 $P_0 \in E'$. 所以 E' 是闭集.

最后证明 $\overline{E}$ 是闭集. 因为 $\overline{E} = E \bigcup E'$, 由 §2 定理 3,

$$(\overline{E})' = E' \bigcup (E')' \subset E' \bigcup E' = E' \subset \overline{E}.$$

从而 E 是闭集. ■

定理 2(开集与闭集的对偶性) 设 E 是开集, 则 E^c 是闭集; 设 E 是闭集, 则 E^c 是开集.

证明 第一部分: 若 P_0 是 E^c 的任一聚点, 那么, P_0 的任一邻域都有不属于 E 的点. 这样, P_0 就不可能是 E 的内点, 从而不属于 E(因 E 是开集, $E = E^o$), 也就是 $P_0 \in E^c$. 故 E^c 是闭集.

第二部分: 设 E 是闭集 ($E = \bar{E}$), 对任一 $P_0 \in E^c$, 假如 P_0 不是 E^c 的内点, 则 P_0 的任一邻域内至少有一个属于 E 的点, 而且这点又必异于 P_0(因 $P_0 \in E^c$), 这样 P_0 就是 E 的聚点 (§2 定理 1), 从而必属于 E(因 E 是闭集), 和假设矛盾.

另证, 设 E 是开集, 则 $E = E^o$, 由闭包、开核对偶关系, 得 $\overline{E^c} = (E^o)^c = E^c$, 可见 E^c 是闭集. 同样设 E 是闭集 ($E = \bar{E}$), $(E^c)^o = \bar{E}^c = E^c$, E^c 是开集. 证毕.

定理 3 任意多个开集之和仍是开集, 有限多个开集之交仍是开集.

证明 第一部分显然, 现证第二部分. 不妨就两个开集来证明.

设 G_1, G_2 为开集, 任取 $P_0 \in G_1 \bigcap G_2$ 因 $P_0 \in G_i$, i=1, 2, 故存在 $U_i(P_0) \subset G_i$. 由邻域性质 (2), 存在 $U_3(P_0) \subset U_1(P_0) \bigcap U_2(P_0)$, 从而 $U_3(P_0) \subset G_1 \bigcap G_2$, 可见 P_0 是 $G_1 \bigcap G_2$ 的内点. ■

注意, 任意多个开集的交不一定是开集. 例如,

$$G_n = \left(-(1+\frac{1}{n}), 1+\frac{1}{n}\right) (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

每个 G_n 是开集, 但 $\bigcap_{n=1}^{\infty} = [-1, 1]$ 不是开集.

定理 4 任意多个闭集之交仍为闭集, 有限多个闭集之和仍为闭集.

证明 利用德摩根公式. 设 $F_i, i \in \Lambda$(或 $i = 1, 2, \cdots, m$) 是闭集, 则由定理 2 知各 F_i^c 是开集, 从而由定理 3 知 $\bigcup_{i\in\Lambda} F_i^c$(或 $\bigcap_{i=1}^m F_i^c$) 也是开集, 但由德摩根公式有 $\bigcap_{i\in\Lambda} F_i = (\bigcup_{i\in\Lambda} F_i^c)^c$(或 $\bigcup_{i=1}^m F_i = (\bigcap_{i=1}^m F_i^c)^c$), 故再利用定理 2 便知 $\bigcap_{i\in\Lambda} F_i$(或 $\bigcup_{i=1}^m F_i$) 是闭集. 证毕. ■

注意, 任意多个闭集的和不一定是闭集. 例如,

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] (n = 3, 4, \cdots),$$

则 F_n 是闭集, 而 $\bigcup\limits_{n=3}^{\infty} F_n = (0, 1)$ 不是闭集.

例 1 设 F_1、F_2 是 $\mathbf{R}$ 中两个互不相交的闭集. 证明: 存在两个互不相交的开集 G_1、G_2, 使 $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$.

证明 对任何 $P \in F_1$, 则 $d(P, F_2) > 0$. 事实上, 若有 $P_0 \in F_1$, 使 $d(P_0, F_2) = 0$. 则由于 $d(P_0, F_2) = \inf_{P \in F_2} d(P_0, P)$, 所以由下确界定义, 存在点列 $\{P_n\} \subset F_2$, 使 $\lim_{n\to\infty} d(P_0, P_n) = d(P_0, F_2) = 0$, 因此 $P_0 \in F_2' \subset F_2$, 这与 $F_1 \bigcap F_2 = \varnothing$ 矛盾.

对每个 $P \in F_1$, 以 $\delta_P = \frac{1}{2} d(P, F_2)$ 为半径, 作 P 的邻域 $U(P, \delta_P)$, 令 $G_1 = \bigcup_{P \in F_1} U(P, \delta_P)$, 则 G_1 是开集且 $F_1 \subset G_1$. 同理, 对每个 $Q \in F_2$, 以 $\delta_Q = \frac{1}{2} d(Q, F_1)$ 为半径, 作 Q 的邻域 $U(Q, \delta_Q)$ 令 $G_2 = \bigcup_{Q \in F_2} U(Q, \delta_Q)$, 则 G_2 是开集且 $F_2 \subset G_2$.

下证 $G_1\bigcap G_2=\varnothing$. 若 $G_1\bigcap G_2\neq\varnothing$, 则存在 $P_0\in G_1\bigcap G_2$, 由 G_1 及 G_2 的作法知必有 $P\in F_1, Q\in F_2$, 使 $P_0\in U(P,\delta_P)$ 和 $P_0\in U(Q,\delta_Q)$, 即 $d(P_0,P)<\delta_P=\frac{1}{2}d(P,F_2)$, 同理 $d(P_0,Q)<\delta_Q=\frac{1}{2}d(Q,F_1)$ 从而有

$$d(P,Q)\leq d(P,P_0)+d(Q,P_0)<\frac{1}{2}[d(P,F_2)+d(Q,F_1)].$$

注意到 $d(P,F_2)\leq d(P,Q)$, $d(Q,F_1)\leq d(P,Q)$, 故有 $d(P,Q)\geq \frac{1}{2}[d(P,F_2)+d(Q,F_1)]>d(P,Q)$. 矛盾, 故有 $G_1\bigcap G_2=\varnothing$. 证毕.

注: 两个闭集 F_1、F_2 不相交并不能推出它们之间的距离

$$d(F_1,F_2)=\inf_{P\in F_1 q\in F_2} d(P,Q)>0.$$

反例: $A=\{(x,y):xy=1\}$ 和 $B=\{(x,y):y=0\}$ 都是闭集, $A\cap B=\varnothing$, $d(A,B)=0$.

定理 5(Heine-Borel 有限覆盖定理) 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 一个有界闭集, $\mathcal{M}$ 是一族开集 $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$. 它覆盖了 F(即 $F\subset\bigcup_{i\in\Lambda}U_i$), 则 $\mathcal{M}$ 中一定存在有限多个开集 $U_1,U_2\cdots,U_m$, 它们同样覆盖了 F(即 $F\subset\bigcup_{i=1}^m U_i$).

证明 因 F 是有界闭集, 所以在 $\mathbf{R}^n$ 中存在闭区间 I 包含 F. 记 $\mathcal{D}$ 为由 $\mathcal{M}$ 中的全体开集与开集 F^c 一起所组成的新的开集族, 则 $\mathcal{D}$ 覆盖了 $\mathbf{R}^n$, 因此也覆盖了 I. 对于 I 中任一点 P, 存在 $\mathcal{D}$ 中开集 U_p, 使得 $P\in U_P$, 因而存在开区间 $I_P\subset U_P$, 并且 $P\in I_P$, 所以开区间族 $\{I_P,|P\in I\}$ 覆盖了 I. 由数学分析中有限覆盖定理, 在这族开区间中存在有限个开区间, 设为 $I_{P_1}, I_{P_2}, \cdots, I_{P_m}$ 仍然覆盖了 I, 则由 $F\subset I$, 及 $I_{P_i}\subset U_{P_i}(i=l,2,\cdots,m)$, 得 $F\subset\bigcup U_{P_i}$. 如果开集 F^c 不在这 m 个开集中, 则 $U_{P_1},U_{P_2}\cdots,U_{P_m}$ 覆盖了 F, 定理得证; 否则从这 m 个开集中去掉 F^c, 因为 F^c 与 F 不相交, 所以剩下的 $m-1$ 个开集仍然覆盖了 F. 证毕. ■

定义 3 设 M 是度量空间 X 中一集合, $\mathcal{M}$ 是 X 中任一族覆盖了 M 的开集, 如果必可从 $\mathcal{M}$ 中选出有限个开集仍然覆盖 M, 则称 M 为 X 中的紧集

由定理 5 知 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集必为紧集, 反之我们有

定理 6 设 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集, 则 M 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集.

证明 设点 $Q \in \mathcal{C}M$, 对于 M 中的任意一点 P, 由于 $P \neq Q$, 由邻域性质, 存在 $\delta_P > 0$, 使得 $U(P,\delta_P) \cap U(Q,\delta_P) = \varnothing$. 显然开集族 $\{U(P,\delta_P)|P \in M\}$ 覆盖了 M, 由于 M 是紧集, 因此存在有限个邻域 $U(P_i,\delta_{P_i})$, $(i = 1,2,\cdots,m)$, 使得 $M \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(P_i,\delta_{P_i})$. 由此立即可知 M 是有界集. 又令 $\delta = \min\{\delta_{P_1},\delta_{P_2},\cdots\delta_{P_m}\}$, 则 $\delta > 0$, 并且 $U(Q,\delta)\bigcap U(P_i,\delta_{P_i}) = \varnothing(i = 1,2,\cdots,m)$, 由此可知 $U(Q,\delta)\bigcap M = \varnothing$, 因此 Q 不是 M 的聚点, 所以 $M'\bigcap \mathcal{C}M = \varnothing$, 这说明 $M' \subset M$, 即 M 是闭集. 证毕. ■

由定理 5 及定理 6 说明, 在 $\mathbf{R}^n$ 中紧集与有界闭集是一致的. 但是在一般度量空间中完全与定理 6 类似可以证明, 紧集一定是有界闭集, 但反之不然 (见第十一章 §3).

例 2设 $A \subset \mathbf{R}$ 为非空集, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 A 的一个开覆盖 (即每个 G_α 为开集且 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \supset A$), 那么从 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中可选出可数 (或有限) 个开集 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots, G_{\alpha_n} G, \cdots$ 覆盖 A.

证明 对于任意的 $x \in A$, 显然存在 $\alpha_x \in \Lambda$, 使得 $x \in G_{\alpha_x}$, 于是存在 $\delta_x > 0$, 使得 $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset G_{\alpha_x}$. 取有理数 r'_x, r''_x, 使 $x-\delta_x < r'_x < r''_x < x+\delta_x$, 则 $x \in (r'_x, r''_x) \subset G_{\alpha_x}, \bigcup_{x\in A} r'_x, r''_x) \supset A$, 但这种开区间 (r'_x, r''_x) 至多为可数个, 记为 $O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots$. 对每个 O_n, 显然存在 $\alpha_n \in \Lambda$, 使得 $O_n \subset G_{\alpha_n}$, 于是 $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \cdots G_{\alpha_n} \cdots$ 构成 A 的一个可数 (或有限) 开覆盖. 证毕. ■

定义 4 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果 $E \subset E'$, 就称 E 是自密集.

换句话说，当集合中每点都是这个集的聚点时，这个集是自密集．另一个说法是没有孤立点的集就是自密集.

例如，空集是自密集，$\mathbf{R}$ 中有理数全体所组成的集是自密集.

定义 5 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，如果 $E = E'$，则称 E 为完备集或完全集.

完备集就是自密闭集，也就是没有孤立点的闭集, 自密的闭集是完备的.

例如，空集是完备集，$\mathbf{R}$ 中的任一闭区间 $[a, b]$ 及全直线都是完备集.

作业:

P35-36 习题 5, 6, 8, 14